环上的 Clifford 代数*

佟文廷

（南京大学）

§1. 引言与记号

如众周知，域上的 Clifford 代数乃是概括域上的 Grassmann 代数（外代数）以及广义四元数代数的一个代数。它不但在数学的一些分支（如群表示论、二次型理论等）中有着重要的应用，而且也是近代理论物理中的有用工具之一（比如参看[1]）。1954 年，C. Chevalley 在[2]中完美地给出了域上 Clifford 代数的基本理论。本文的主要目的是建立可换环上的 Clifford 代数，即给出它的定义、存在性与唯一性等。容易看出，这是域上的 Clifford 代数之推广。因此这里的一切结果都是域上 Clifford 代数中相应结果的概括与推广。在本文中我们也顺便证明了域上的 Clifford 代数已不能向无零因子的非可换环（比如体）作非平庸的推广。在本文的 §3 中，我们定义了环上的广义四元数与广义复数的概念，并用本文的结果证明它们都可纳入我们定义的环上之 Clifford 代数之中。

在本文中，凡未加另外说明的地方均坚持使用如下记号：

R：特征数不为 2（即 $ChR\neq 2$）的可换酉环；

V：左 R 模；

φ：$V\times V\to R$：双线性对称映射，记成 $\varphi\in SB(V\times V,R)$；

U：有单位元 1_U 的 R 结合代数；

$f\in H(A,B)$：f 为 $A\to B$ 的同态；

$f|_D$：f 在 D 上的限制；

I_A：A 上的恒等映射。

§2. 定义与基本性质

先定义相容的概念。

定义1. 设 V 为左 R 模，$\varphi\in SB(V\times V,R)$，$U$ 为有单位元 1_U 的 R 结合代数，若

$$c:\ V\to U$$

为线性单射且满足

$$c(x)^2=\varphi(x,x)1_U,\ \forall x\in V$$

* 1981年1月14日收到。
推荐者：周伯壎（南京大学数学系）。

则称(U, c)与V，φ是相容的(Compatible)。

在此定义的基础上我们来定义可换酉环上的Clifford代数：

定义2. 设R为可换酉环，V为左R模，$\varphi\in SB(V\times V, R)$，且$(C, c)$与$V,\varphi$相容，若又有

(i) C由$I_m\subset U$ $\{r1_C|\forall r\in R\}$ (代数地)生成；

(ii) (泛性质)若(U, c_1)也与V，φ相容，则存在R代数同态$h\in H(C, U)$使下图可换(即$c_1=h\circ c$)且

$$h(1_C)=1_U,$$

则称(C, c)为对于V，φ的Clifford R代数。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c_1"'] & C \arrow[dl, dashed, "h"] \\ U & \end{tikzcd}$$

容易证明，将此定义中的(i)省去而将(ii)中h的存在改为h的存在且唯一，这样定义的Clifford R代数与上述定义是等价的。

为了下文的需要，再来定义φ-正交的有关概念：

定义3. 若有$\varphi\in SB(V\times V,R)$，则称左$R$模$V$为内积$R$模。设$E=\{e_i|_{i\in I}\}$为$V$之基，它满足条件

$$\varphi(e_i, e_j)=0,\ i\neq j,\ \forall i,j\in I.$$

则称E为V的φ-正交基。

若x，$y\in V$，$\varphi(x, y)=0$，则称x，y为φ-正交的，记为$x\perp y$。

若$L\subseteq V$，则称

$$L^{\perp}\equiv\{y|\varphi(x, y)=0,\ \forall x\in L\}$$

为L的φ-**正交补**。

若$x\in V$满足$\varphi(x, x)=0$，则称x为φ-**迷向的**(isotropic)，否则就称x为φ-**反迷向的**(anisotropic)。

我们先来证明

定理1. 设R为P.I.D.(即主理想整环)，$ChR\neq 2$，$\varphi\in SB(V\times V,R)$且或者$\varphi(x, x)=0$，$\forall x\in V$，或者存在$e_1\in V$使$\varphi(e_1, e_1)$为可逆元，其中$V$为有限维自由左$R$模，则$V$必有$\varphi$-正交基，

证 由$ChR\neq 2$知

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{2}[\varphi(x+y, x+y)-\varphi(x, x)-\varphi(y,y)]\quad\forall x,y\in V \tag{1}$$

若V中一切元素均为φ-迷向的，则由(1)知

$$\varphi(x,y)=0,\quad\forall x,y\in V$$

此时V的任一基均为其φ-正交基，定理当然成立。

若有 $e_1\in V$ 使 $\varphi(e_1,e_1)$ 可逆，记 $E_1=Re_1$，$E_1^\perp$ 为 E_1 之 φ-正交补。若 $\dim V=1$，则定理显然成立。现设 $\dim V=n>1$，$\{f_1,\cdots,f_n\}$ 为 V 之基。注意 $E_1^\perp$ 显然为 V 的子 R 模。又由设知 R 为P. I. D.，故由 Dedekind 定理(比如参看 M. Marcus[3], P. 298)。知 $E_1^\perp$ 也是自由 R 模同时 $K\equiv\dim E_1^\perp\leqslant n$。且若 $\{g_1,\cdots,g_k\}$ 为 $E_1^\perp$ 之基，则经调动基元素次序后必有

$$\begin{aligned}g_1&=a_{11}f_1+\cdots+a_{1n}f_n\\ g_2&=\qquad a_{22}f_2+\cdots+a_{2n}f_n\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ g_k&=\qquad\qquad a_{kk}f_k+\cdots+a_{kn}f_n.\end{aligned}$$

其中 $a_{ij}\in R$，$i=1,\cdots,k$；$j=1,\cdots,n$ 且 $a_{jj}\neq0$，$j=1,\cdots,k$，现在先来证明 $k<n$。事实上，由 $E_1^\perp$ 之定义知

$$a_{jj}\varphi(e_1,\ f_j)+\cdots+a_{jn}\varphi(e_1,\ f_n)=(e_1,\ g_j)=0,\ j=1,\cdots,k.$$

由于 R 为P. I. D.，因此它无零因子，于是注意到 $a_{jj}\neq0$, $j=1,\cdots,k$，由上面的一组式子自下而上地可推出在 $k=n$ 时必有

$$\varphi(e_1,\ f_j)=0,\ j=1,\cdots,n.$$

由此又可推出 $\varphi(e_1,\ e_1)=0$，这与 $\varphi(e_1,\ e_1)$ 为可逆元矛盾。因此 $k<n$。

现对 n 用数学归纳法。设 $E_1^\perp$ 有 φ-正交基 $\{e_2,\cdots,e_m\}$，于是由 $E_1^\perp$ 之定义知

$$\varphi(e_j,\ e_l)=0,\ j\neq l.\ 1\leqslant j,\ l\leqslant m.$$

因此只须再证 $\{e_1,\ e_2,\cdots,e_m\}$ 为 V 之基。为此，任取 $0\neq x\in V$，令

$$x_1=\varphi(e_1,\ e_1)x-\varphi(x,\ e_1)e_1, \tag{2}$$

则

$$\varphi(x_1,\ e_1)=\varphi(e_1,\ e_1)\varphi(x,\ e_1)-\varphi(x,\ e_1)\varphi(e_1,\ e_1)=0,$$

因此 $x_1\in E_1^\perp$，于是由(2)知

$$\varphi(e_1,\ e_1)x\in\sum_{j=1}^{m}Re_j.$$

但 $\varphi(e_1,\ e_1)$ 可逆，因此

$$x\in\sum_{j=1}^{m}Re_j.$$

由此知 $\{e_1,\ e_2,\cdots,e_m\}$ 为 V 的生成系。下面再证 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 线性无关。事实上，反设它们线性相关，则由 $e_2,\cdots,e_m$ 线性无关知必有 $0\neq a_1\in R$ 使

$$a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_me_m=0.\qquad a_j\in R,\qquad j=1,\cdots,m.$$

由此可得

$$a_1\varphi(e_1,\ e_1)=0.$$

但 $\varphi(e_1, e_1)$ 为可逆元，于是 $a_1=0$，这就得出了矛盾．于是定理证毕．

注　定理1中条件 $ChR\neq 2$ 十分重要，因为即使 R 为域，若 $ChR=2$，定理1中的结论仍不能成立．

例．设 $R=F$ 为域，$ChF=2$，考察 F 上以 $\{e_1, e_2\}$ 为基的线性空间（也是左 R 模）V，定义 $\varphi\in SB(V\times V, F)$ 使

$$\varphi(e_1, e_1)=\varphi(e_2, e_2)=0, \qquad \varphi(e_1, e_2)=1_F.$$

因为对 V 之任一基 $\{f_1, f_2\}$，必有 $A=(a_{ij})\in F^{2\times 2}$ 使

$$f_1=a_{11}e_1+a_{12}e_2$$

$$\det A\neq 0$$

$$f_2=a_{21}e_1+a_{22}e_2,$$

而

$$\begin{aligned}\varphi(f_1, f_2)&=(a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21})\varphi(e_1, e_2)\\&=a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}\\&=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\\&=\det A\neq 0,\end{aligned}$$

因此，对这样定义的 $\varphi\in SB(V\times V, F)$，$V$ 不存在 φ-正交基

通常关于基的推广除对P. I. D. 进行外，还可对除环（体）进行．但后者对 φ-正交基是没有意义的，因为我们有如下的定理：

定理2． 设 R 为无零因子的不可换环，V 为左 R 模，而

$$\varphi: V\times V\to R$$

为双线性映射，则 $\varphi=0$．

证　由设知至少有一对 $a, b\in R$ 使 $ab-ba\neq 0$，由 φ 的双线性性知

$$\varphi(ax, by)=ab\varphi(x, y)=ba\varphi(x, y), \forall x, y\in V.$$

于是

$$(ab-ba)\varphi(x, y)=0.$$

但 R 无零因子，$0\neq ab-ba\in R$，$\varphi(x, y)\in R$，因此

$$\varphi(x, y)=0, \quad \forall x, y\in V.$$

故 $\varphi=0$．

由此定理也可看出，域上的Clifford代数已不能再向体上作有意义的推广．

我们再来证明

定理3． 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为左 R 模 V 的一个 φ-正交基，(U, c) 与 V，φ 相容，且 U 由 $I_m c$ 与 1_U 生成，而 $x_j=c(e_j)$，$j=1, \cdots, n$，则

1°．U 必由形如

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{m_j}, \quad m_j=0 \text{ 或 } 1$$

的 2^n 个元素线性生成；

2^0.
$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i}\right)=(-1)^N\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i+q_i}$$

其中　$N=\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} p_i q_j$.

3^0. (U, c)为对于V，φ的Clifford R代数；

4^0. 当R又为P. I. D.时，$\dim U\leqslant 2^n$.

证：1^0. 由(U, c)与V，φ相容知

$$c(x)^2=\varphi(x, x)1_U, \quad \forall x\in V.$$

因此

$$\begin{aligned}c(x+y)^2&=\varphi(x+y, x+y)1_U\\&=[\varphi(x, x)+\varphi(y, y)+2\varphi(x, y)]1_U\\&=c(x)^2+c(y)^2+2\varphi(x, y)1_U, \quad \forall x, y\in V,\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}c(x+y)^2&=(c(x)+c(y))^2\\&=c(x)^2+c(y)^2+c(x)c(y)+c(y)c(x), \quad \forall x, y\in V.\end{aligned}$$

由此得

$$c(x)c(y)+c(y)c(x)=2\varphi(x, y)1_U, \quad \forall x, y\in V.$$

由此可以看出，若记$r_j=\varphi(e_j, e_j)$，$j=1,\cdots,n$，则有

$$x_j^2=r_j 1_U \tag{3}$$

$$x_j x_k=-x_k x_j \qquad j\neq k, \ 1\leqslant j, \ k\leqslant n,$$

于是对U中的任一积$x_{j_1},\cdots,x_{j_m}$，$j_1,\cdots,j_m\in\{1,\cdots,n\}$，都有$d\in R$使

$$x_{j_1},\cdots,x_{j_m}=dx_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(r)}.$$

其中$\sigma\in S_n$(S_n为$\{1,\cdots,n\}$上的置换群)且满足条件：$i>j$时$\sigma(i)>\sigma(j)$，而U由$I_m c$与1_U生成，故U也由2^n个元素

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}, \qquad m_i=0 \text{ 或 } 1,$$

线性生成.

2^0. 由1^0之证知

$$x_i^p x_j^q=(-1)^{pq}x_j^q x_i^p.$$

由此用数学归纳法即得欲证.

3^0. 注意到由1^0与2^0之证知，事实上2^0只依赖于$\{e_1,\cdots,e_n\}$为V之φ-正交基以及(U, c)与V，φ相容这两个条件，因此，若$(\widetilde{U}, \widetilde{c})$也与$V$,$\varphi$相容，而令$y_i=\widetilde{c}(e_i)$，$i=1,\cdots,n$，则由$2^0$知

$$\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{q_i}\right)=(-1)^N\prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i+q_i}.$$

其中 $N=\sum\limits_{1\le i<j\le h} p_i q_j$，又由 1^0 之证知

$$y_i y_j=-y_j y_i,\quad i\ne j,\qquad 1\le i,\ j\le n$$

$$y_i^2=r_i 1_{\tilde U},$$

且由 1^0 知，若令

$$h\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}\Big)=\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i},\quad m_i=0\text{ 或 }1, \tag{4}$$

并对 h 作线性开拓，则可得到一个线性映射 h：$U\to\tilde U$。

由于 $c(e_i)=x_i$，$\tilde c(e_i)=y_i$，$i=1,\cdots,n$，于是由(4)知

$$h(1_U)=1_{\tilde U}.$$

且右图为可换图，即

$$\tilde c=h\circ c.$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tilde c"] \arrow[d, "c"'] & \tilde U \\ U \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

下面只须再证 $h\in H(U,\tilde U)$。为此只须证明

$$h\Big[\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i}\Big)\Big]=h\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\Big)h\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i}\Big).$$

事实上，由前知

$$\begin{aligned}
h\Big[\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i}\Big)\Big]&=(-1)^N h\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i+q_i}\Big)\\
&=(-1)^N\Big(\prod_{p_i+q_i=2} r_i\Big)h\Big(\prod_{p_i+q_i\ne 2} x_i^{p_i+q_i}\Big)\\
&=(-1)^N\Big(\prod_{p_i+q_i=2} r_i\Big)\prod_{p_i+q_i\ne 2} y_i^{p_i+q_i}\\
&=(-1)^N\prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i+q_i}\\
&=\Big(\prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i}\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} y_i^{q_i}\Big)\\
&=h\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\Big)h\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i}\Big)
\end{aligned}$$

这就证出了3^0。

4^0。当R为P. I. D. 且U为自由R模时，由Dedekind定理知，当1^0中2^n个元素线性相关时$\dim U\leqslant 2^n$(注意U与R^{2^n}之一子R模同构)。否则必有$\dim U=2^n$，因此4^0成立。从而定理证毕。

下面，我们来建立可换酉环上Clifford代数的唯一性与存在性定理，先来证唯一性定理。

定理 4.（唯一性定理）. 设R为可换酉环，$ChR\neq 2$，V为左R模，$\varphi\in SB(V\times V,R)$，$(C_1, c_1)$与$(C_2, c_2)$均为对于$V$，$\varphi$的Clifford R代数，则必有唯一的R-代数同构h：$C_1\to C_2$使$h\circ c_1=c_2$，因此，在同构意义下对于V，φ的Clifford R代数若存在，则是唯一的。

证：考察下图

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "c_1"] \arrow[d, "c_2"'] & C_1 \arrow[dl, dashed, bend left=10, "h_1=h"] \\ C_2 \arrow[ur, dashed, bend left=10, "h_2"] & \end{tikzcd}$$

由定义2之条件(ii)知，必有保持单位元对应的$h_1\in H(C_1, C_2)$与$h_2\in H(C_2, C_1)$使

$$c_2=h_1\circ c_1;$$

$$c_1=h_2\circ c_2,$$

因此

$$c_1=h_2\circ h_1\circ c_1.$$

对$\forall x\in I_m c_1$显然有

$$x=h_2\circ h_1(x),$$

即

$$h_2\circ h_1|_{I_mC_1}=I_{I_mC_1}.$$

且对$\forall r\in R$显然有

$$h_2\circ h_1(r1c_1)=r1c_2.$$

于是由定义2之条件(i)知，对C_1之生成集而言，$h_2\circ h_1$仍为恒等映射，但$h_2\circ h_1$为R-代数同态，于是

$$h_2\circ h_1=Ic_1,$$

同理可证

$$h_1\circ h_2=Ic_2.$$

这就证出了$h=h_1$：$C_1\to C_2$为R-代数同构。

再来证明h的唯一性，事实上，由上段证明已可看出，若k：$C_1\to C_2$也是满足定理要求的一个R-代数同构. 则由上证知

$$k|_{I_mC_1}=h|_{I_mC_1}$$

且

$$k(r1c_1)=r1c_2=h(r1c_1),\quad \forall r\in R,$$

于是，由定义2之条件(i)即知$k=h$，定理证毕。

现在，我们来证明对任给的可换酉环R，左R模V以及$\varphi\in SB(V\times V, R)$，都有Clifford R代数存在，我们的方法是用可换酉环R上的张量代数(比如参看[4])来具体构

作出对于V，φ的 Clifford R 代数．由定理4知，这是由R，V，φ在R－同构意义下唯一决定的 Clifford R 代数模型．

定理5．设R为可换西环，$ChR\neq 2$，V为左R模，$\varphi\in SB(V\times V,\ R)$，$\otimes V$为$V$上的$R$张量代数，$J$为由

$$\{x\otimes x-\varphi(x,\ x)1_R \mid \forall x\in V\}$$

生成的$\otimes V$之双侧理想，而

$$C_V=\otimes V/J,$$

π：$\otimes V\to C_V$为标准投射，j_V：$V\to\otimes V$为标准内射，又令$i_V=\pi\circ j_V$为一线性映射，则$(C_V,\ i_V)$为对于V，φ的 Clifford R 代数．

证：首先注意C_V为R商代数，于是对$\forall x\in V$有

$$\begin{aligned} i_V(x)^2 &= (\pi\circ j_V(x))^2=\pi(j_V(x))^2 \\ &=\pi(x\otimes x) \\ &=\pi(x\otimes x-\varphi(x,x)1_{C_V}+\varphi(x,x)1_{C_V}) \\ &=\varphi(x,x)1_{C_V}. \end{aligned}$$

因此$(C_V,\ i_V)$与V，φ相容．

又因为$\otimes V$由V，1_R代数地生成，π为满射，因此i_V满足定义2之条件(i)．下面只需再证它也满足定义2之条件(ii)．

事实上，由$\otimes V$之定义(见[4])知，若A为有单位元1_A的结合R代数，η：$V\to A$为线性映射，则有唯一的$h\in H(\otimes V,A)$使$h(1_{\otimes V})=1_A$且使下图为可换图　因此，若(A,η)也与V，φ相容，则对上述的h有

$$\begin{aligned} h(x\otimes x-\varphi(x,x)1_{\otimes V}) &= h(x\otimes x)-\varphi(x,x)h(1_{\otimes V}) \\ &=\eta(x)^2-\varphi(x,x)1_A=0,\quad \forall x\in V. \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "j_V"'] & A \\ \otimes V \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

于是$J\subseteq \mathrm{Ker}h$，所以由模同态定理(比如参看[4]，定理3.4)知有$f\in H(C_V,\ A)$使$h=f\circ\pi$，但

$$\begin{aligned} f\circ i_V(x) &= f\circ\pi\circ j_V(x)=f\circ\pi(x) \\ &=h(x)=\eta(x),\quad \forall x\in V. \end{aligned}$$

因此i_V满足定义2之条件(ii)，于是定理证毕．

联系到可换环R上的外代数$\wedge V$(比如仍参看〔4〕)，由上述定理我们可以证明它是Clifford R代数的一个特例，即

定理 6. 设R为可换酉环，$ChR \neq 2$，V为左R模，则R上的外代数$\wedge V$为对于V，0的Clifford R代数。

证： 在定理5中取$\varphi = 0$，则J为$\otimes V$中由$\{x \otimes x \mid \forall x \in V\}$生成的双侧理想，因此$C_V = \wedge V$即$\wedge V$为对于$V$，0的Clifford R代数

§3. 可换环上的广义四元数与广义复数

在本节中，我们来定义可换环上的广义四元数代数。容易看出，它是域上广义四元数体（比如见〔5〕）的推广，我们在下面用上节的结果证明它（关于给定的c与φ）为对于$R^2 = R \times R$，φ的Clifford R代数。另外，我们又定义了可换环上的广义复数代数，并用上节的结果证明它(关于给定的C，φ)为对于R，φ的Clifford R代数。作为这些结果的直接推论可以看出实数域上的四元数体及复数域都是Clifford代数。

先给出

定义 4. 设R为可换酉环，Q为4维R结合代数，$\{e, j, k, l\}$为Q的基，Q的乘法定义为

$$e^2 = -j^2 = -k^2 = e.$$

$$ex = xe = x, \quad x = j, \ k, \ l.$$

$$jk = -kj = l,$$

则称Q为R广义四元数代数。Q的元素称为R广义四元数。

注意，由定义可推出

$$jl = j(jk) = (jj)k = -ek = -k = -lj.$$

$$kl = -k(-l) = -k(kj) = -(kk)j = j = -lk.$$

$$l^2 = (jk)(jk) = -(jj)(kk) = -(-e)(-e) = -e.$$

因此Q为域上广义四元数体之推广。

现在来证

定理 7. 设R为可换酉环，Q为R广义四元数代数，$\{x_1, x_2\}$为$V = R \times R$之标准基，对任意的$x = rx_1 + sx_2$，$y = r'x_1 + s'x_2 \in V$，定义

$$\varphi(x, \ y) = -rr' - ss'.$$

而c：$V \to Q$为由

$$c(x) = rj + sk, \quad \forall x = rx_1 + sx_2 \in V.$$

给出的线性映射，则$(Q, \ c)$为对于V，φ的Clifford R代数。

证： 容易看出V为左R模，$\varphi \in SB(V \times V, \ R)$且$\{x_1, \ x_2\}$为$V$的$\varphi$-正交基，$c$为线性单射，又

$$c(x)^2 = (rj + sk)^2 = -(r^2 + s^2)e = \varphi(x, \ x)e.$$

而Q由$I_m c = Rj + Rk$与$e = 1_Q$(代数地)生成。故由定理3知(Q, c)为对于V，φ的Clifford R代数。

再来给出

定义 5. 设R为可换酉环，定义i为满足$x^2+1_R=0$且$ri=ir$，$\forall r\in R$的一个符号。则称$C=R+Ri$为R广义复数代数，C的元素称为R广义复数。

我们来证明

定理 8. 设R为可换酉环，C为R广义复数代数，而φ：$R\times R\to R$由

$$\varphi(x,\ y)=-xy,\quad \forall x,\ y\in R$$

给出，c：$R\to C$由

$$c(x)=ix,\quad \forall x\in R$$

给出，则$(C,\ c)$为对于R，φ的Clifford R代数。

证： 显然c为线性单射，$\varphi\in SB(R\times R,\ R)$，$R$为左$R$模，$\{1_R\}$即为$R$的$\varphi$—正交基。又由

$$c(x)^2=(ix)^2=-x^2 1_R=\varphi(x,\ x)1_R,\quad \forall x\in R.$$

因此$(C,\ c)$与R，φ相容，而C显然由$I_m c$与$1_C=1_R$生成。故由定理3即知$(C,\ c)$为对于R，φ的Clifford R代数。

由上可以看出，我们定义的Clifford R代数是复数、四元数、外代数等的一个比过去更进一步的推广。关于Clifford R代数更深入的结构理论，我们将另文发表。

参 考 文 献

1. Emch, G. G., Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory, John Willy and Sons, Inc., (1972).
2. Chevalley, C., The Algebraic theory of spinors, Columbia Univ. Press. New York, (1954).
3. Marcus, M., Introduction to modern algebra, Marcel Dekker, Inc., (1978).
4. Blyth, T. S., Module theory (An approach to linear algebra), Clarendon Press, Oxford, (1977).
5. 华罗庚、万哲先，典型群，上海科技出版社（1963）.

Clifford Algebra Over a Ring

By Tong Wenting (佟文廷)

Abstract

In the literature, only the Clifford algebra over a field F is defined and considered. The theory of such Clifford algebra is very important in representation theory of groups, theory of quadratic forms, statistical mechanics and quantum field theory. In this paper, the Clifford R-algebra over a commutative ring R is defined. In addition, we proved uniqueness theorem and existence theorem of Clifford R-algebra. We also defined R-generalized quaternions algebra and R-generalized complex algebra, and proved that they are Clifford R-algebra. It is easy to see that exterior algebra, quaternions algebra, complex (field) are Clifford R-algebra from this paper.