逻辑导数与逻辑积分*

郑维行　苏维宜

（南京大学）

逻辑导数与逻辑积分，又称p-adic导数与p-adic积分，在Walsh分析中占有重要地位。由于这些概念的引入，促进了Walsh分析的发展。1969年，J. E. Gibbs等人[5]定义了有限二进群上函数的dyadic导数，人们称Gibbs导数；1972年开始，P. L. Butzer与H. J. Wagner[1]-[4],[9]对dyadic导数进行一系列的研究，并引进了dyadic积分概念，得到很多重要结果，发展了Walsh分析。1977年，C. W. Onnerweer讨论了紧群上的p-adic导数与p-adic分数阶导数[6][7]。1978年，郑维行等[10]定义了p-adic局部紧群。

$$G=\{(x_{-s},\cdots x_{-1},x_0,x_1,x_2,\cdots):x_j\in\{0,1,\cdots,p-1\},j\in R\equiv\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}\}$$

上函数的p-adic导数，并得到了很多新的结果[11]-[14]，特别是在Walsh系的逼近算子方面作了重要工作。

本文§1简要叙述在p-adic导数与p-adic积分方面的重要结果，§2则给出空间$L^q_{[0,\infty)}$ $(1\leqslant q\leqslant2)$中p-adic积分的定义与性质。

§1. 记号与重要结果

设$p\geqslant2$为整数，区间$[0,\infty)$中任一点x有p-adic表示$x=(x_\nu)$

$$x=\sum_{\nu=-s}^{\infty}x_\nu p^{-\nu},\qquad x_\nu\in\{0,1,\cdots,p-1\}\tag{1.1}$$

p-adic有理点约定用有限表示。规定$x,y\in[0,\infty)$的伪加$\oplus$、伪减$\ominus$、伪乘$\odot$运算如下：

$$x\oplus y=(x_\nu\oplus y_\nu),\qquad x_\nu\oplus y_\nu=x_\nu+y_\nu(mod\ \ p),$$

$$x\ominus y=(x_\nu\ominus y_\nu),\qquad x_\nu\ominus y_\nu=x_\nu-y_\nu(mod\ \ p),$$

$$x\odot y=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}x_{1-\nu}y_\nu.$$

复数$A_j=A_j(p)$，　$j=0,1,\cdots,p-1$，由方程组

$$\sum_{j=0}^{p-1}A_j\omega^{kj}=k,\qquad k=0,1,\cdots,p-1,\tag{1.2}$$

* 1981年3月17日收到.

确定，其中$\omega=\exp\frac{2\pi i}{p}$，并可解出

$$A_0(p)=(p-1)/2,\qquad A_j(p)=\omega^j(1-\omega^j)^{-1},\qquad j=1,\cdots,p-1. \tag{1.3}$$

考察定义在$[0,\infty)$上的实值或复值函数$f(x)$，如果对于一点$x\in[0,\infty)$，和式

$$\sum_{k=-n}^{n}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})\right\} \tag{1.4}$$

当$n\to\infty$时收敛，则称这极限值为$f(x)$在点x的p-adic导数，记为$f^{(1)}(x)$。p adic导函数可象通常那样定义。

若$f\in L^q_{[0,\infty)}$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，则和式(1.4)在$L^q_{[0,\infty)}$范数意义下的极限称为$f(x)$的强p-adic导数，记为$D^{(1)}f$。也可定义$L^q_{[0,\infty)}$意义下的弱p-pdic导数。高阶按点的与强的p-adic导数可归纳地定义。

如果函数$f(x)$的定义域为$[0,1)$，则(1.1)式中带有负指标部分全为0，此时$x\in[0,1)$的p-adic表示$x=(x_\nu)$成为

$$x=\sum_{\nu=0}^{\infty}x_\nu p^{-\nu},\qquad x_\nu\in\{0,1,\cdots,p-1\}, \tag{1.1$_1$}$$

而$f(x)$的按点的与强的p-adic导数则由单向和式

$$\sum_{k=0}^{n}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})\right\} \tag{1.4$_1$}$$

相应的按点与范数极限来定义。此外，当我们用和式

$$\sum_{k=-n}^{n}p^k\left\{\sum_{j=0}^{p-1}\overline{A_j}f(x\ominus jp^{-k-1})\right\} \tag{1.4$_2$}$$

代替(1.4)时，又可得到按点的与强的伴随p-adic导数，分别记为$f_{(1)}$与$D_{(1)}f$。

对于$x\in[0,1)$，可以定义$f(x)$的p-adic积分$I^{(1)}f$如下

$$(I^{(1)}f)(x)=(W_1\otimes f)(x), \tag{1.5}$$

这里$W_1(x)$的Walsh变式为

$$W_1^\wedge(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{1}{k}, & k\in N\equiv\{1,2,3,\cdots,\}\end{cases} \tag{1.6}$$

而$(W_1\otimes f)(x)$是$f(x)$与$W_1(x)$的p-adic卷积

$$(W_1\otimes f)(x)=\int_0^1 f(u)W_1(x\ominus u)du, \tag{1.7}$$

高阶p-adic积分可归纳地定义。

我们有

定理1.1[11] 对于$x\in[0,\infty)$，Walsh函数

$$w(x,y)=\exp\left(\frac{2\pi i}{p}x\odot y\right) \tag{1.8}$$

具有任意阶的按点p-adic导数与伴随p-adic导数

$$w^{(r)}(x,y)=y^r w(x,y)=w_{(r)}(x,y),\qquad r\in N$$
$$\bar{w}^{(r)}(x,y)=(\ominus y)^r\bar{w}(x,y)=\bar{w}_{(r)}(x,y),$$

其中$y\in[0,\infty)$为参数。当$y\in p\equiv\{0,1,2,\cdots\}$时，(1.8)就是通常的自然序Walsh函数$w_k(x)$，$k\in p$。

定理1.2[14]　对于$x\in[0,1)$，有

1) $D^{(1)}$为$X_{[0,1)}$中的线性闭算子，

这里$X_{[0,1)}=\begin{cases}WC_{[0,1)},\\ L^q_{[0,1)}, & 1\leqslant q<\infty;\end{cases}$　$WC_{[0,1)}$是$[0,1)$上的W连续函数类，它们在p-adic无理点连续而在p-adic有理点右连续。

2) 若$D^{(1)}f=0$，则$f=\text{const}\,(a.e.)$。

3) 若f，$D^{(r)}f$，$D_{(r)}f\in X_{[0,1)}$，则

$[D^{(r)}f]^\wedge(k)=k^r f^\wedge(k)=[D_{(r)}f]^\wedge(k)$，$k\in p$，

其中$f^\wedge(k)=\int_0^1 f(t)\bar{w}_k(t)dt$，　$k\in p$。

定理1.3　对于$x\in[0,1)$，有

1) $W_r\in L^1_{[0,1)}$，其中$W_r^\wedge(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{1}{k^r}, & k\in N,\ r\in N\end{cases}$

2) 若$f\in L^1_{[0,1)}$，且$f^\wedge(0)=0$，则

$$(I^{(r)}f)^{(r)}(x)=f(x)\quad(a.e.).$$

3) 设$f\in X_{[0,1)}$，则

a) $D^{(r)}(W_r\circledast f)=f\ (a.e.)$，

b) 再设$D^{(r)}f\in X_{[0,1)}$，且$\int_0^1 f(u)du=f^\wedge(0)=0$，则

$$W_r\circledast D^{(r)}f=f\ (a.e.).$$

§2. 空间$L^q_{[0,\infty)}(1\leqslant q\leqslant 2)$中函数的p-adic导数与积分

我们记$L^q\equiv L^q_{[0,\infty)}$，$1\leqslant q\leqslant 2$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$，

$$D_a(t)=\int_0^a w(x,t)dx,\qquad a,t\in[0,\infty),$$
$$S(f;a;x)=\int_0^{\to\infty}f(x\ominus u)D_a(u)du\equiv(D_a\circledast f)(x).$$

关于p-adic导数的Walsh变换，有如下定理。

定理2.1　若$f,D^{(r)}f\in L^q$，则

$$[D^{(r)}f]^\wedge(v)=v^r f^\wedge(v)=[D_{(r)}f]^\wedge(v),\ a.e.\qquad(2.1)$$

证　只须证明 $r=1$ 时(2.1)正确，对 $r>1$ 可由归纳法证得.

首先证 $q=1$ 时(2.1)成立. 由于在 L^1 中，Walsh 变换是 L^1 到 WC 中的范数非增变换，

$$|g^\wedge(v)|\leqslant\|g\|_1,\qquad g\in L^1,$$

故由 $g_n, g\in L^1$ 与 $\lim\limits_n\|g_n-g\|_1=0$ 可得到

$$\lim_n g_n^\wedge(v)=g^\wedge(v),\quad a.e.$$

令
$$(D_n^{(1)}f)(x)=\sum_{k=-n}^{n}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1}),\quad \text{于是}$$

$$\begin{aligned}
[D_n^{(1)}f]^\wedge(v)&=\int_0^\infty(D_n^{(1)}f)(x)\overline{w}(x,v)dx\\
&=\sum_{k=-n}^{n}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_j\int_0^\infty f(x\oplus jp^{-k-1})\overline{w}(x,v)dx\\
&=\sum_{k=-n}^{n}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_jw(jp^{-k-1},\ v)\int_0^\infty f(x)\overline{w}(x,v)dx\\
&=f^\wedge(v)\sum_{k=-n}^{n}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_jw(jp^{-k-1},v),
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，上式极限为 $vf^\wedge(v)$，亦即

$$\lim_n[D_n^{(1)}f]^\wedge(v)=vf^\wedge(v).$$

另一方面，由定义，$\|D_n^{(1)}f-D^{(1)}f\|_1\to0$，$n\to\infty$，故 $\lim\limits_n[D_n^{(1)}f]^\wedge(v)=[D^{(1)}f]^\wedge(v)$，$n\to\infty$，从而由极限的唯一性得

$$[D^{(1)}f]^\wedge(v)=vf^\wedge(v),\quad a.e.$$

其次，设 $1<q\leqslant2$. 若仍记 f 的 L^q 变式 $F^q[f]$ 为 $f^\wedge(v)$，亦即

$$f^\wedge(v)=\underset{M\to\infty}{\overset{q'}{\mathrm{l.i.m.}}}\int_0^M f(x)\overline{w}(x,v)dx,$$

借助于 L^q 中 Walsh 变换的范数非增性，有

$$\|g^\wedge\|_{q'}\leqslant\|g\|_q,\qquad g\in L^q,\qquad g^\wedge\in L^{q'},$$

推知当 $D^{(1)}f\in L^q$ 时，有 $\lim\limits_n\|D_n^{(1)}f-D^{(1)}f\|_q=0$，从而 $\lim\limits_n\|[D_n^{(1)}f]^\wedge(0)-[D^{(1)}f]^\wedge(0)\|_{q'}=0$. 但

$$\begin{aligned}
[D_n^{(1)}f]^\wedge(v)&=\left[\sum_{k=-n}^{n}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_jf(x\oplus jp^{-k-1})\right]^\wedge(v)\\
&=\sum_{k=-n}^{n}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_jf^\wedge(v)w(jp^{-k-1},v)
\end{aligned}$$

代入前式得，当 $n\to\infty$ 时，

$$\|[D_n^{(1)}f]^\wedge(0)-[D^{(1)}f]^\wedge(0)\|_{q'}=\|f^\wedge(0)\sum_{k=-1}^{n}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_jw(jp^{-k-1},0)-[D^{(1)}f]^\wedge(0)\|_{q'}\to 0,$$

故存在子序列$n_l\to\infty$，使

$$\lim_{n_l\to}f^\wedge(v)\sum_{k=-n_l}^{n_l}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_jw(jp^{-k-1},v)=[D^{(1)}f]^\wedge(v)\quad(a.e.)$$

但由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}p^k\sum\limits_{j=0}^{p-1}A_jw(jp^{-k-1},v)=v$，因此

$$[D^{(1)}f]^\wedge(v)=vf^\wedge(v),\quad a.e.$$

对于$D_{(1)}f$可类似地证得.

下面再证明几个引理.

引理2.1　设$f\in L^q$，则$S(f;p^n;x)\in L^q$，且有

$$\|S(f;p^n;\circ)\|_q\leqslant\|f\|_q,\tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|S(f;p^n;\circ)-f(\circ)\|_q=0\tag{2.3}$$

证　由$S(f;p^n;x)$的表示式$S(f;p^n;x)=(D_{p^n}\otimes f)(x)$得$\|S(f;p^n;\circ)\|_q=\|D_{p^n}\otimes f\|_q\leqslant\|f\|_q\|D_{p^n}\|_1$，再据

$$D_{p^n}(t)=\int_0^{p^n}w(x,t)dx=\begin{cases}p^n, & 0\leqslant t<p^{-n}\\ 0, & p^{-n}\leqslant t\end{cases}$$

知$\|D_{p^n}\|_1=1$，从而(2.2)成立. 对于(2.3)，由

$$\|S(f;p^n;\circ)-f(\circ)\|_q=\left\{\int_0^\infty|S(f;p^n;x)-f(x)|^qdx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left\{\int_0^\infty\left|\int_0^\infty f(x\ominus u)D_{p^n}(u)du-\int_0^\infty f(x)D_{p^n}(u)du\right|^qdx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\int_0^\infty|D_{p^n}(u)|\,\|f(\circ\ominus u)-f(\circ)\|_q\,du=\int_0^{\frac{1}{p^n}}p^n\|f(\circ\ominus u)-f(\circ)\|_qdu,$$

据$f\in L^q$的平均连续性，知$n\to\infty$时上述积分趋于0，亦即(2.3)成立. 引理得证.

引理2.2　设$f\in L^q$且$f^\wedge(\circ)=0\quad a.e.$，则$f=0\quad a.e.$

证　　令$f_\rho(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x<\rho\\ 0, & x>\rho,\end{cases}$　　其中$\rho>0$.

由$f_\rho\in L^1\cap L^q$得

$$S(f_\rho;\alpha;x)=\int_0^\alpha f_\rho^\wedge(t)w(x,t)dt.$$

另一方面，由定义知$\|f_\rho^\wedge-f^\wedge\|_{q'}\to 0$. 因为当$f^\wedge\in L^1$时，

$$\lim_{\rho\to\infty}S(f_\rho;\alpha;x)=\int_0^\alpha f^\wedge(t)w(x,t)dt,$$

取 $\alpha=p^n$ 并据 $f^\wedge=0$ $a.e.$ 得 $\lim\limits_{\rho\to\infty} S(f_\rho;p^n;x)=0$.

但当 $f\in L^q$ 时，$S(f_\rho;p^n;x)\in L^q$，$S(f;p^n;x)\in L^q$，并且由引理 2.1 知

$$\lim_{\rho\to\infty}\|S(f_\rho;p^n;\circ)-S(f;p^n;\circ)\|_q\leqslant\lim_{\rho\to\infty}\|f_\rho-f\|_q=0,$$

这样，存在子序列 $\rho_j\to\infty$，使

$$\lim_{\rho_j\to\infty} S(f_{\rho_j};p^n;x)=S(f;p^n;x),\ a.e.$$

但左边极限为 0，故对任何 p^n，有 $S(f;p^n;x)=0$ $a.e.$ 最后再由引理 2.1 的 (2.3)，得 $\|f\|_q=0$，于是 $f=0$ $a.e.$

上述引理是唯一性定理，它是 Walsh-Fourier 变换法的基础。

引理2.3 设 $f\in L^q$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{p^n} f(u)du=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\|S(f;p^{-n};\circ)\|_q=0 \tag{2.4}$$

证 当 $n\in N$ 时，虽然也成立 $\|S(f;p^{-n};\circ)\|_q\leqslant\|f\|_q$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{p^n} f(u)du=0$，任给 $\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，使 $\left|\int_0^{p^n} f(u)du\right|<\varepsilon^{\frac{1}{q}}$ 对 $n>N_1$ 成立。
又因

$$S(f;p^{-n};x)=\int_0^\infty f(x\ominus u)D_{p^{-n}}(u)du=p^{-n}\int_0^{p^n} f(x\ominus u)du, \tag{2.5}$$

任取 $n>N_1$，则

$$\|S(f;p^{-n};\circ)\|_q^q=\int_0^\infty\left|p^{-n}\int_0^{p^n} f(x\ominus u)du\right|^q dx\equiv\int_0^{p^n}+\int_{p^n}^\infty.$$

对于积分 $I_1\equiv\int_0^{p^n}\left|p^{-n}\int_0^{p^n} f(x\ominus u)du\right|^q dx$，有估计

$$I_1^{\frac{1}{q}}=\left\{\int_0^{p^n}\left|p^{-n}\int_0^{p^n} f(x\ominus u)du\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}<\left\{\varepsilon p^{-n}\int_0^{p^n} dx\right\}^{\frac{1}{q}}=\varepsilon^{\frac{1}{q}},$$

故 $I_1<\varepsilon$.

对于积分 $I_2\equiv\int_{p^n}^\infty\left|p^{-n}\int_0^{p^n} f(x\ominus u)du\right|^q dx$，有

$$I_2^{\frac{1}{q}}=\left\{\int_{p^n}^\infty\left|p^{-n}\int_0^{p^n} f(x\ominus u)du\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant p^{-n}\int_0^{p^n}\left\{\int_{p^n}^\infty|f(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}du,$$

由于 $f\in L^q$，故存在 $N_2>0$，使当 $n>N_2$ 时有

$$\int_{p^n}^\infty|f(x)|^q dx<\varepsilon.$$

取 $N=\max(N_1,N_2)$，则当 $n>N$ 时 $\int_{p^n}^\infty|f(x)|^q dx<\varepsilon$,

故 $I_2<\varepsilon$。从而引理得证。

现在可以得到

定理2.2 设$f\in L^q$，且$D^{(1)}f=0$ 或 $D_{(1)}f=0$，则 $f=0$ a.e.

证 由定理2.1，得

$$[D^{(1)}f]^\wedge(v)=vf^\wedge(v) \quad a.e.$$

但由 $D^{(1)}f=0$，故$[D^{(1)}f]^\wedge(v)=0$，从而 $f^\wedge(v)=0$ a.e. 由唯一性定理（引理 2.2）知

$$f=0 \quad a.e. \qquad \text{证完。}$$

借助于 p-adic 卷积运算可以定义 p-adic 积分算子，它与 p-adic 导数恰为互逆运算。以下讨论是就 $p\geqslant 2$ 与 $1\leqslant q\leqslant 2$ 进行的。至于 $p=2$，$q=1$ 的情形，可参考[9]。

考察基本函数 $V_{1,n}(x)$，它的 Walsh 变式满足

$$V_{1,n}^\wedge(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}, & t\in[p^{-n},\infty)\\ 0, & t\in[0,p^{-n}),\end{cases} \quad n\in Z \tag{2.6}$$

这里变式是指 L^1 意义下的，用[8]中方法可证

定理2.3 $V_{1,n}\in L^1\cap L^2$。且对每个固定的n，有

$$\|V_{1,-n}\|_1=O(p^{-n}). \quad n\to\infty.$$

证明从略。

由于定理2.3，我们可以定义 $D^{(1)}$ 的逆算子 $I^{(1)}$ 如下：

若 $f\in L^q$，$1\leqslant q<\infty$，如果存在 $g\in L^q$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|g(\circ)-(V_{1,n}\circledast f)(\circ)\|_q=0 \tag{2.6}$$

则称 g 为 f 的一阶强 p-adic 积分，记为 $I^{(1)}f$。高阶 p-adic 积分可归纳地定义。也可以定义按点 p-adic 积分。

为得到 $D^{(1)}$ 与 $I^{(1)}$ 的互逆关系，先证两个引理。

引理2.4 设m，n为二整数，且$m>n$，则

$$(V_{1,n}\circledast f)(x)-(V_{1,m}\circledast f)(x)=S(g;p^{-n};x)-S(g;p^{-m};x) \quad a.e. \tag{2.7}$$

其中 $f,g\in L^q$，且 $g^\wedge(v)=\begin{cases}v^{-1}f^\wedge(v), & v\in(0,\infty) \quad a.e.\\ 0\end{cases}$

证 据卷积公式得

$$[V_{1,n}\circledast f]^\wedge(v)=V_{1,n}^\wedge(v)f^\wedge(v)=\begin{cases}v^{-1}f^\wedge(v), & v\in[p^{-n},\infty)\\ 0, & v\in[0,p^{-n}).\end{cases}$$

从而当 $m>n$ 时，有

$$[V_{1,n}\circledast f]^\wedge(v)-[V_{1,m}\circledast f]^\wedge(v)=\begin{cases}0, & v\in[p^{-n},\infty)\\ v^{-1}f^\wedge(v), & v\in[p^{-m},p^{-n})\\ 0, & v\in[0,p^{-m}).\end{cases}$$

另一方面，

$$[S(g;p^{-n};\circ)]^\wedge(v)=g^\wedge(v)D^\wedge_{p^{-n}}(v)=\begin{cases}g^\wedge(v), & v\in[0,p^{-n})\\ 0, & v\in[p^{-n},\infty).\end{cases}$$

比较$[S(g;p^{-n};\circ)]^\wedge(v)-[S(g;p^{-m};\circ)]^\wedge(v)$与$[V_{1,n}\otimes f]^\wedge(v)-[V_{1,m}\otimes f]^\wedge(v)$并利用引理2.2，得(2.7). 证完.

引理2.5 对于$f,g\in L^q$，设$\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^{p^m}g(u)du=0$，则下述论断等价：

1) $g=I^{(1)}f\quad a.e.$

2) $g^\wedge(v)=v^{-1}f^\wedge(v)\quad a.e.$

注 当$q=1$时，条件$\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^{p^m}g(u)du=0$即为$g^\wedge(0)=0$.

证 首先证$q=1$时引理成立.

1)⇒2). 由$g=I^{(1)}f\quad a.e.$ 知$\|g(\circ)-(V_{1,n}\otimes f)(\circ)\|_1\to0$，$(n\to\infty)$，于是$g^\wedge(v)$

$$=\lim_{n\to\infty}[V_{1,n}\otimes f]^\wedge(v)=\lim_{n\to\infty}V^\wedge_{1,n}(v)f^\wedge(v)=\begin{cases}v^{-1}f^\wedge(v), & v\in(0,\infty)\\ 0, & v=0,\end{cases}$$

即2)成立.

2)⇒1). 利用(2.7)式与$g^\wedge(\circ)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{p^n}g(u)du=0$，据引理2.3得$\lim\limits_{n\to\infty}\|S(g;p^{-n};\circ)\|_1=0$，于是

$$\lim_{m,n\to\infty}\|V_{1,n}\otimes f)(\circ)-(V_{1,m}\otimes f)(\circ)\|_1=0,$$

据L^1空间的完备性知存在$h\in L^1$，使

$$\lim_{n\to\infty}\|h(\circ)-(V_{1,n}\otimes f)(\circ)\|_1=0.$$

再由定义得$h=I^{(1)}f$.

另一方面，显然有$h^\wedge(v)=\lim\limits_{n\to\infty}[V_{1,n}\otimes f]^\wedge(v)=\begin{cases}v^{-1}f^\wedge(v), & v\in(0,\infty)\\ 0, & v=0,\end{cases}$

依$g^\wedge(v)=v^{-1}f^\wedge(v)\quad a.e.$ 与唯一性定理得$h=g\quad a.e.$ 从而$g=I^{(1)}f$.

次证当$1<q\leqslant2$时引理成立.

1)⇒2). 因$g=I^{(1)}f\quad a.e.$，由定义与L^q变式的范数非增性得

$$\lim_n\|g^\wedge(\circ)-[V_{1,n}\otimes f]^\wedge(\circ)\|_{q'}=0$$

但因

$$[V_{1,n}\otimes f]^\wedge(v)=\begin{cases}v^{-1}f^\wedge(v), & v\in[p^{-n},\ \infty)\\ 0, & v\in[0,p^{-n}),\end{cases}$$

从而(2.8)成为$\lim\limits_{n\to\infty}\|g^\wedge(\circ)-V^\wedge_{1,n}(\circ)f^\wedge(\circ)\|_{q'}=0$. 于是存在子序列$n_k\to\infty$，使$g^\wedge(v)=\lim\limits_{n_k\to\infty}V^\wedge_{1,n_k}(v)f^\wedge(v)\quad a.e.$ 因为$V^\wedge_{1,n}(v)f^\wedge(v)$当$n\to\infty$时存在极限

$$\lim_{n\to\infty} V_{1,n}^{\wedge}(v) f^{\wedge}(v) = \begin{cases} v^{-1} f^{\wedge}(v), & v \in (0, \infty) \\ 0, & v = 0 \end{cases}$$

故 $g^{\wedge}(v) = v^{-1} f^{\wedge}(v)$　$a.e.$

2)⇒1)。方法类似于 $q=1$．只是利用(2.7)式，引理 2.3 得到 $V_{1;n} \otimes f$ 是 L^q 中的基本列，而由 L^q 的完备性类似地得到1)。

现在能证明 p-adic 导数与积分之间的关系。

定理2.4　设 $f, D^{(r)} f \in L^q$．且 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{p^n} f(x)dx$，则

$$f = I^{(r)}(D^{(r)} f), \quad a.e. \tag{2.8}$$

证　由定理2.1，我们有 $[D^{(r)} f]^{\wedge}(v) = v^r f^{\wedge}(v)$,　$a.e.$，

故当 $v \neq 0$ 时，$f^{\wedge}(v) = \frac{1}{v^r}[D^{(r)} f]^{\wedge}(v)$,　$a.e.$ 视 f 为引理2.5中的 g，而视 $D^{(r)} f$ 为 f，便得(2.8)。

定理2.5　设 $f, g \in L^q$，且 $g = I^{(r)} f$，$r \in N$，又若 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{p^n} g(u)du = 0$，则

$$D^{(r)}(I^{(r)} f) = f \quad a.e. \tag{2.9}$$

证　只须证 $r=1$ 情形，$r>1$ 由归纳法证明。

第一步，先证等式

$$g(x) = S(g; p^m; x) + (V_{1,-m} \otimes f)(x) \quad a.e. \tag{2.10}$$

因 $g = I^{(1)} f \in L^q$，由引理 2.5 知 $g^{\wedge}(v) = v^{-1} f^{\wedge}(v)$　$a.e.$ 再由 p-adic积分定义 $\lim\limits_{n\to\infty} \| g(\circ) - (V_{1,n} \otimes f)(\circ) \| = 0$，故存在子序列 $n_k \to \infty$，使 $\lim\limits_{n_k\to\infty} (V_{1,n_k} \otimes f)(x) = g(x)$　$a.e.$

另一方面，当 $n_k > m$ 时，利用 Walsh—Fourier 变换法得

$$(V_{1,n_k} \otimes f)(x) = S(V_{1,n_k} \otimes f; p^m; x) + (V_{1,-m} \otimes f)(x) \quad a.e. \tag{2.11}$$

再注意到

$$J = \int_0^{p^m} [V_{1,n_k} \otimes f]^{\wedge}(v) w(x,v) dv$$

$$= \begin{cases} \int_0^{p^m} \left\{ \int_0^{\infty} [V_{1,k} \otimes f](u) \bar{w}(u,v) du \right\} w(x,v) dv, & q = 1 \\ \int_0^{p^m} \left\{ \operatorname*{l.i.m}^{q'}_{M\to\infty} \int_0^M [V_{1,n_k} \otimes f](u) \bar{w}(u,v) du \right\} w(x,v) dv, & 1 < q \leq 2, \end{cases}$$

于是，当 $q=1$ 时，有

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ [V_{1,n_k} \otimes f](u) \int_0^{p^m} w(x \ominus u, v) dv \right\} du = S(V_{1,n_k} \otimes f; p^m; x),$$

而当 $1 < q \leq 2$ 时，

$$J=\lim_{M\to\infty}\int_0^{p^m}\left\{\int_0^M [V_{1,n_k}\otimes f](u)\overline{w}(u,v)\,du\right\}w(x,v)\,dv$$
$$=\lim_{M\to\infty}\int_0^M [V_{1,n_k}\otimes f](u)\left\{\int_0^{p^m} w(x\ominus u,v)\,dv\right\}du=S(V_{1,n_k}\otimes f;p^m;x),$$

这最后一个等式是由于作为 L^q 中的元，$S(V_{1,n_k}\otimes f;p^m;x)\in L^q$ 是存在的.因此对 $1\leqslant q\leqslant 2$ 总有

$$S(V_{1,n_k}\otimes f;p^m;x)=S(g;p^m;x)-\int_0^{\frac{1}{p^{n_k}}} g^\wedge(v)w(x,v)\,dv,$$

因 $g^\wedge\in L^{q'}$，上式第二项当 $n_k\to\infty$ 时极限为 0，所以

$$\lim_{n_k\to\infty} S(V_{1,n_k}\otimes f;p^m;x)=S(g;p^m;x),$$

于是对(2.11)取极限，当 $n_k\to\infty$ 时便得(2.10).

对于 $g\in L^q$，令

$$(D_m^{(1)}g)(x)\equiv\sum_{k=-(m-1)}^{m-1} p^k\sum_{j=0}^{p-1} A_j g(x\oplus jp^{-k-1}) \tag{2.12}$$

由(2.10)，知

$$(D_m^{(1)}g)(x)=D_m^{(1)}S(g;p^m;x)+D_m^{(1)}(V_{1,-m}\otimes f)(x)\quad a.e.,$$

因此

$$\|D_m^{(1)}g-f\|_q\leqslant\|(D_m^{(1)}g)(\circ)-D_m^{(1)}S(g;p^m;\circ)\|_q+\|D_m^{(1)}S(g;p^m;\circ)-f(\circ)\|_q$$
$$=\|D_m^{(1)}(V_{1,-m}\otimes f)(\circ)\|_q+\|D_m^{(1)}S(g;p^m;\circ)-(f\circ)\|_q. \tag{2.13}$$

第二步，证　$$\lim_{m\to\infty}\|D_m^{(1)}S(g;p^m;\circ)-f(\circ)\|=0. \tag{2.14}$$

用 Walsh Fourier 变换法立得

$$S(f;p^m;x)=\sum_{k=-\infty}^{m-1} p^k\sum_{j=0}^{p-1} S(g;p^m;x\oplus jp^{-k-1})\quad a.e.,$$

令 $S(f;p^m;x)=\sum_{k=-\infty}^{-m}+\sum_{k=-m+1}^{m-1}\equiv J_1+J_2$，因

$$\|J_1\|_q\leqslant\sum_{k=-\infty}^{-m} p^k\sum_{j=0}^{p-1}|A_j|\,\|S(g;p^m;\circ\oplus jp^{-k-1})\|\leqslant\left(\sum_{j=0}^{p-1}|A_j|\right)\|g\|\,p^{-m+1},$$

故 $\lim_{m\to\infty}\|J_1\|_q=0$. 这样由 $J_2=D_m^{(1)}S(g;p^m;x)$ 得

$$\|S(f;p^m;\circ)-D_m^{(1)}S(g;p^m;\circ)\|_q\leqslant\|J_1\|_q\to 0\quad(m\to\infty).$$

但 $\|D_m^{(1)}S(g;p^m;\circ)-f(\circ)\|_q\leqslant\|D_m^{(1)}S(g;p^m;\circ)-S(f;p^m;\circ)\|+\|S(f;p^m;\circ)-f(\circ)\|_q$，据引理 2.1 上式右边第二项趋于 0，从而(2.14)成立.

第三步，证 $$\lim_{m\to\infty}\|D_m^{(1)}(V_{1,-m}\otimes f)(\circ)\|_q=0. \tag{2.15}$$

因$V_{1,-m}\in L^1, f\in L^q$，故$(V_{1,-m}\otimes f)\in L^q, D_m^{(1)}(V_{1,-m}\otimes f)\in L^q$，由卷积定理及求导公式，得

$$[D_m^{(m)}(V_{1,-m}\otimes f)]^\wedge(v)=[f\otimes D_m^{(1)}V_{1,-m}]^\wedge(v),$$

所以 $D_m^{(1)}(V_{1,-m}\otimes f)(x)=(f\otimes D_m^{(1)}V_{1,-m})(x)\quad a.e.$

令 $G_m(x)=(D_m^{(1)}V_{1,-m})(x)$，据定理 2.3 $\|V_{1,-m}\|_1\leqslant Kp^{-m}$，我们有

$$\|G_m\|_1=\|\sum_{k=-m+1}^{m-1}p^k\sum_{j=0}^{p-1}A_jV_{1,-m}(\circ\oplus jp^{-k-1})\|_1\leqslant\Big(\sum_{j=0}^{p-1}|A_j|\Big)\sum_{k=-(m-1)}^{m-1}p^k\|V_{1,-m}\|_1$$

$$\leqslant\Big\{Kp^{-m}\sum_{k=-(m-1)}^{m-1}p^k\Big\}\Big\{\sum_{j=0}^{p-1}|A_j|\Big\}\leqslant M,$$

其中M为适当的常数。因此

$$\|f\otimes G_m\|_q\leqslant\|G_m\otimes(f-S(f;p^k;\circ))\|_q+\|G_m\otimes S(f;p^k;\circ)\|_q$$

$$\leqslant\|G_m\|_1\|S(f;p^k;\circ)-f(\circ)\|_q+\|G_m\otimes S(f;p^k;\circ)\|_q,$$

上式右边第一项趋于0（引理2.1），而第二项当 $m>k$ 时为 0，故(2.15)成立。联合(2.13)、(2.14)、(2.15)便得(2.9)。　　证完。

最后，关于算子 $D^{(r)}$ 的性质，我们有

定理2.6　设 $U=\Big\{f\in L^q:\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^{p^m}f(u)du=0 \text{ 且 } ^\exists D^{(r)}f\in L^q\Big\}$，则 $D^{(r)}$ 是U上的线性闭算子。

证　设 $f_n, f\in L^q$，$D^{(1)}f_n$，$g\in L^q$，且 $\begin{cases}\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^{p^m}f_n(u)du=0,\\ \lim\limits_{m\to\infty}\int_0^{p^m}f(u)du=0,\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_q=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|D^{(1)}f_n-g\|_q=0$，只须证 $f\in U$ 且 $g=D^{(1)}f$。

因$\|D^{(1)}f_n-g\|_q\to0$，故$\|[D^{(1)}f_n]^\wedge-g^\wedge\|_{q'}\to0$。但 $[D^{(1)}f_n]^\wedge(v)=vf_n^\wedge(v)$，上面第二式化为 $\|vf_n^\wedge(v)-g^\wedge(v)\|_{q'}\to0$。

再由 $\|f_n-f\|_q\to0$，可得 $\|f_n^\wedge-f^\wedge\|_{q'}\to0$，从而存在子序列 $n_k\to\infty$，使

$$\lim_{n_k\to\infty}f_{n_k}^\wedge(v)=f^\wedge(v)\quad a.e.$$

于是$\lim\limits_{n_k\to\infty}vf_{n_k}^\wedge(v)=f^\wedge(v)\quad a.e.$ 这样，据L^q中极限的唯一性定理得 $vf^\wedge(v)=g^\wedge(v)\quad a.e.$

所以当 $v\neq0$ 时有 $f^\wedge(v)=v^{-1}g^\wedge(v)\quad a.e.$ 再由 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_0^{p^m}f(u)du=0$，知 f 与 g 满足引理2.5的条件，因此 $f=I^{(1)}g$，这表明 $I^{(1)}g\in L^q$。利用定理 2.5 知 $D^{(1)}(I^{(1)}g)=g\quad a.e.$ 但$I^{(1)}g=f$，故$D^{(1)}f=g\quad a.e.$ 且 $f\in U$。

$r>1$ 情形由归纳法得证。

参考文献

[1] Butzer, P. L., Wagner, H. J., Applicable Anal., 3(1973), 29-46.

[2] ——, Proc. Sympos. Naval Res. Lab., Washington D. C., (1973), 75—81.

[3] ——, Proc. Sympos. Hatfield Polytechnic, (1973).

[4] ——, Anal. Math., 1(1975). 177—196.

[5] Gibbs, J. E., Millard, M. J., NPL. DES Rept. No. 1, (1969).

[6] Onneweer, C. W., Anal. Math., 3 (1977), No. 2, 119—130.

[7] ——, Acta Sci. Math. (Szeged) 39(1977), 121—128.

[8] Pâl, J., Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolardo eölvös., Sect. Math. 18(1975), 49—54.

[9] Wagner. H. J., Sympos. Hatfield, Herts., July 1—3(1975).

[10] 任福贤，苏维宜，郑维行，南京大学学报（自然科学版），3(1978), 1—7.

[11] 苏维宜，南京大学学报（自然科学版），2(1980), 6—14.

[12] 郑维行，数学学报，V.22:3(1979), 362—374.

[13] ——，逼近论会议论文集，杭州(1978), 104—107.

[14] 郑维行，苏维宜，任福贤，逼近论会议论文集，杭州（1978），42—50.

The Logical Derivatives and Integrals

By Zheng Weixing (郑维行) and Su Weiyi (苏维宜)

Abstract

Walsh analysis has evolved over the past decade and the end of the development is nowhere in sight. However, it is sure that the logical derivatives and integrals, or p-adic derivatives and integrals, play a very important role in Walsh analysis. In this paper, we introduce the concept of p—adic integrals in $L^q_{(0,\infty)}$, $1\leqslant q\leqslant 2$, study some properties of them and obtain the relation between p-adic derivative and integral.