关于Euler-Maclaurin求和公式的一种余项表示*

徐利治　　王兴华

（吉林大学）　（杭州大学）

Euler-Maclaurin 求和公式在经典分析技巧中的重要地位是毋庸多议的．近二十余年来，在数值积分的领域里，随着外推算法，样条函数以及振荡积分的渐近展开等强有力方法的出现，此公式的重要性有增无已，因为这些新方法都与之有关．

关于 Euler-Maclaurin 公式的余项，传统的估计方法是这样的：设 k 是自然数，假如定义于$[a,b]$的函数 $f(t)$ 对该区间上所有的 t，都有

$$f^{(2k)}(t)\geqslant 0 \text{ 并且 } f^{(2k+2)}(t)\geqslant 0, \tag{1}$$

或者对所有的 t 都有

$$f^{(2k)}(t)\leqslant 0 \text{ 并且 } f^{(2k+2)}(t)\leqslant 0, \tag{1'}$$

则积分

$$\mathrm{I}_a^b(f)=\int_a^b f(t)\,dt \tag{2}$$

的值满足不等式

$$\sigma_{k-1}(f)\lesseqgtr I_a^b(f)\lesseqgtr\sigma_k(f), \tag{3}$$

这里

$$\sigma_m(f)=h\left\{\frac{1}{2}f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)+\frac{1}{2}f(b)\right\}-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{h^{2\nu}B_{2\nu}}{(2\nu)!}\left\{f^{(2\nu-1)}(b)-f^{(2\nu-1)}(a)\right\}$$

$$(m=0,1,2,\cdots),\quad h=\frac{b-a}{n}, \tag{4}$$

n 为自然数，$B_{2\nu}$ 为 Bernoulli 数．

上述估计方法的条件是相当严峻的，难以适应在实际应用中可能出现的种种情形．因此，在较宽的条件下怎样给出余项估计，自然是一个有意义的研究课题．这方面的工作有过一些，但以不能因袭估值 (3) 为缺憾．因为这一估值条件虽然严峻，但一旦被满足，所得的估值是很有效的。像关于 $\log\Gamma(x)$ 的渐近展开，便是一个例子．

* 1980年10月10日收到．

我们的下述结果，则是这一估计方法的自然拓广。

定理。设函数 $f(t)$ 定义于区间 $[a,b]$，并且 $f^{(r-1)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上是有界变差的，这里 r 是大于1的自然数。那么，对任意 $x\in[0,1]$，有

$$I_a^b(f)=h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+(i+x)h)-\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{h^\nu}{\nu\,!}B_\nu(x)\Delta_a^b(f^{(\nu-1)})-\frac{h^r}{r\,!}\Big(B_r(x)-\frac{B_r}{2^r}\Big)$$

$$\cdot\Delta_a^b(f^{(r-1)})+\theta_r\frac{h^r}{r!}\Big(\|B_r\|-\frac{|B_r|}{2^r}\Big)V_a^b(f^{(r-1)}),\tag{5}$$

式中

$$\Delta_a^b(\varphi)=\varphi(b)-\varphi(a),$$

$$v_a^b(\varphi)=\int_a^b|d\varphi(t)|,\tag{6}$$

$B_\nu(x)$ 为 Bernoulli 多项式，B_r 为 Bernoulli 数，$\|B_r\|=\max\limits_{0\le x\le1}|B_r(x)|$，而 $|\theta_r|\leqslant1$。

证。利用 Riemann-Stieltjes 积分的部分积分法，易证

$$I_a^b(f)=h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+(i+x)h)-\sum_{\nu=1}^{r}\frac{h^\nu}{\nu!}B_\nu(x)\Delta_a^b(f^{(\nu-1)})+\frac{h^r}{r!}\int_a^b\overline{B_r}\Big(x-\frac{t-a}{h}\Big)$$

$$\cdot df^{(r-1)}(t),\tag{7}$$

这里 $\overline{B_r}(t)=B_r(t-[t])$，$[t]$ 表示 t 的整数部分。(7)中的积分，对任意常数 c 可以写成

$$\int_a^b\Big\{\overline{B_r}\Big(x-\frac{t-a}{h}\Big)-c\Big\}df^{(r-1)}(t)+c\Delta_a^b(f^{(r-1)}).$$

取

$$c=\frac{1}{2}\Big\{\max_{0\le u\le1}B_r(u)+\min_{0\le u\le1}B_r(u)\Big\}=\frac{B_r}{2^r},$$

则不难验明

$$\Big|\overline{B_r}\Big(x-\frac{t-a}{h}\Big)-c\Big|\leqslant\|B_r\|-\frac{|B_r|}{2^r}.$$

由是从(7)可以得到(5)，并且其中 $|\theta_r|\leqslant1$。证毕。

当条件(1)成立时，于(5)取 $x=0$，$r=2k$ 以及 $r=2k+2$，则得

$$I_a^b(f)=\sigma_{k-1}(f)-(1+(-1)^k\theta_{2k})\Big(1-\frac{1}{2^{2k}}\Big)\frac{h^{2k}}{(2k)!}B_{2k}\Delta_a^b(f^{(2k-1)}),\tag{8}$$

以及

$$I_a^b(f)=\sigma_k(f)-(1+(-1)^{k+1}\theta_{2k+2})\Big(1-\frac{1}{2^{2k+2}}\Big)\frac{h^{2k+2}}{(2k+2)!}B_{2k+2}\Delta_b^a(f^{(2k+1)}).\tag{9}$$

由于 $1+(-1)^k\theta_{2k}\geqslant0$，$1+(-1)^{k+1}\theta_{2k+2}\geqslant0$，所以

$$\{I_a^b(f)-\sigma_{k-1}(f)\}\cdot\{\sigma_k(f)-I_a^b(f)\}\geqslant0.$$

这便是(3)。

定理所包含的结论是相当丰富的。例如，若$f'''(t)$在$[a,b]$上绝对连续，我们知道

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta_a^b(f''')+V_a^b(f''')\right\}=\int_a^b \max f^{(4)}(t),0)\,dt,$$

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta_a^b(f''')-V_a^b(f''')\right\}=\int_a^b \max(-f^{(4)}(t),0)\,dt. \tag{10}$$

于是，倘于(5)取$x=0$，$n=1$，$r=4$，便得

$$-\frac{1}{384}(b-a)^4\int_a^b \max(-f^{(4)}(t),0)\,dt\leqslant I_a^b(f)-\frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))$$

$$+\frac{1}{12}(b-a)^2\Delta_a^b(f')\leqslant\frac{1}{384}(b-a)^4\int_a^b \max(f^{(4)}(t),0)\,dt\,. \tag{11}$$

(11)的左边部分，即是Mitrinović的书[1]所介绍的Atkinson[2]的结果。又如，若$f'(t)$当$t\geqslant 1$时单调增加，则于(8)取$k=1$，$a=1$，$b=n$，$h=1$，便得

$$0<\frac{1}{2}f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-I_1^n(f)<\frac{1}{8}\Delta_1^n(f')\,.$$

这是Pólýa和Szegö的书[3]中第Ⅱ章问题19。

本文的定理也是对[4]中定理1在周期情形估值的拓广，一般情形估值的改进，并且把二者统一了起来。

显然，定理的证明关键在于引进数值

$$C=B_r/2^r \tag{12}$$

今采用类似的方法，可以立即获得某种振荡型积分展开式的一个余项估计式。

设$F(x,y)$为平面域D：$[0,1]\times(-\infty,\infty)$上的连续函数，对$x$具有$r$阶连续偏导数$F_x^{(r)}(x,y)$，且关于$y$具有周期1。则当$N$为大过2的正整数时有展开公式(参阅[5])：

$$\int_0^1 F(x,Nx)\,dx=\int_0^1\int_0^1 F(x,y)\,dxdy+S_r+\rho_r, \tag{13}$$

其中S_r为N的负幂多项式

$$S_r=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{N}\right)^k\int_0^1\left[\frac{\partial^{k-1}F}{\partial x^{k-1}}\right]_{x=0}^{x=1}B_k(y)\,dy \tag{14}$$

又余项ρ_r可表示成

$$\rho_r=-\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{N}\right)^r\int_0^1 dx\int_{Nx}^{Nx+1}B_r(y-Nx)\left(\frac{\partial^r F}{\partial x^r}\right)dy. \tag{15}$$

若将(13)式中的r改为$r-1$，则$S_r+\rho_r=S_{r-1}+\rho_{r-1}$。往下我们将证明简单估计式

$$|\rho_{r-1}|\leqslant\frac{2}{r!}\left(\|B_r\|-\frac{|B_r|}{2^r}\right)\cdot\left\|\frac{\partial^r F}{\partial x^r}\right\|\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^r \tag{16}$$

此处$\|\partial^r F/\partial x^r\| = \max\limits_{0\le x,y\le 1} |F_x^{(r)}(x,y)|$。显然当$r$为偶数时，这是对[5]中第8章估计式(32)（也即增订本[6]第14章的估计式(21)）的一个改进。

为证明(16)，只须将S_r中的末一项与ρ_r合併估值即可。先在(15)式中按(12)引进C，则得

$$r!N^r\rho_r = -\int_0^1 dx\int_{Nx}^{Nx+1}[B_r(y-Nx)-C]F_x^{(r)}(x,y)dy - C\int_0^1 dx\int_{Nx}^{Nx+1}F_x^{(r)}(x,y)dy.$$

注意$F_x^{(r)}(x,y)$关于y具有周期1，故

$$C\int_0^1 dx\int_{Nx}^{Nx+1}F_x^{(r)}(x,y)dy = C\int_0^1 dx\int_0^1 F_x^{(r)}(x,y)dy = C\int_0^1 [F_x^{(r-1)}(x,y)]_{x=0}^{x=1}dy.$$

于是可得

$$\begin{aligned} r!N^r\rho_{r-1} &= r!N^r\rho_r + \int_0^1\left[\frac{\partial^{r-1}F}{\partial x^{r-1}}\right]_{x=0}^{x=1}B_r(y)dy \\ &= -\int_0^1 dx\int_{Nx}^{Nx+1}[B_r(y-Nx)-C]F_x^{(r)}(x,y)dy + \\ &\quad\int_0^1[B_r(y)-C][F_x^{(r-1)}(x,y)]_{x=0}^{x=1}dy \\ &= J_1+J_2, \end{aligned}$$

其中J_1与J_2分别代表的两个积分各有估值

$$|J_1| \le \left(\|B_r\| - \frac{1}{2^r}|B_r|\right)\|F_x^{(r)}(x,y)\|,$$

$$\begin{aligned} |J_2| &\le \left(\|B_r\| - \frac{1}{2^r}|B_r|\right)\int_0^1 dy\int_0^1 |F_x^{(r)}(x,y)|dx \\ &\le \left(\|B_r\| - \frac{1}{2^r}|B_r|\right)\|F_x^{(r)}(x,y)\|. \end{aligned}$$

由此代入即得(16)。

在某种一般条件下，上述渐近展开公式(13)的余项精估问题，已由施咸亮与卢志康所解决。欲知其详，请参阅他们的合著论文。

参 考 文 献

[1] Mitrinović, D.S., Analytic inequalities, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1970).

[2] Atkinson, F.V., Some further stimates concerning sums of powers of complex numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 20(1969), 193-210.

[3] Pólya, G. and Szegö, G., Problems and Theorems in Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1972).

[4] 王兴华，关于求积公式的若干注记，计算数学，(1978)第三期，pp.76－84.

[5] 徐利治，高维的数值积分，科学出版社，(1963)第8章，§3.

[6] 徐利治、周蕴时，高维数值积分，科学出版社，(1980)第14章，§2.

An Expression for the Remainder Term of the Euler-Maclaurin Summation Formula

By *Hsu L.C.* (徐利治) and *Wang Xinghua* (王兴华)

Abstract

Let f(t) be a functiin defined on [a,b] and Let $f^{(r-1)}(t)(r\geqslant 2)$ be of bounded variation there. Then for any $x\in[0,1]$ we have

$$\int_a^b f(t)dt = h\sum_{i=1}^{n-1} f(a+(i+x)h) - \sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{h^\nu}{\nu!}B_\nu(x)\Delta_a^b(f^{(\nu-1)}) -$$

$$\frac{h^r}{r!}(B_r(t)-\frac{B_r}{2^r})\Delta_a^b(f^{(r-1)}) + \theta_r\frac{h^r}{r!}(\|B_r\|-\frac{|B_r|}{2^r})V_a^b(f^{(r-1)}),$$

where $\Delta_a^b(\varphi)=\varphi(b)-\varphi(a)$, $V_a^b(\varphi)=\int_a^b|d\varphi(t)|$, $\|B_r\|=\max\limits_{0\leqq x\leqq 1}|B_r(x)|$,

and $|\theta_r|\leqslant 1$, $B_r(x)$ being the Bernoulli polynomial.

It is shown that the expression given above has various consequences including those mentioned in [1],[2],[3], respectively. Also the result included in this note is a refined estimate fcr the remainder term of an asymptotic expansion of a kind of oscillatory integral (See (13)—(16)).