Mathieu 不等式的准确化*

王中烈　　王兴华

（加拿大里贾纳大学）　（杭州大学）

设 c 为任意正数，记下列级数的和为 S：

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+c^2)^2}\tag{1}$$

1890 年，Mathieu[1]猜测

$$S<\frac{1}{c^2}.\tag{2}$$

Berg[2]于 1952 年证实了此猜测。1976 年，Diananda[3]又将此结果改进为

$$S<\frac{1}{c^2}-\frac{1}{16c^4}+O\left(\frac{1}{c^5}\right)\qquad(c\to\infty).\tag{3}$$

另一方面，Emerslegen[4]于 1952 年就 c 为整数的情形，证明

$$S>\frac{1}{c^2}-\frac{5}{16c^4}.\tag{4}$$

1956 年，Van der Corput 和 Heflinger[5]取消了上述结果中 c 为整数的限制。

本文将证明下列一般的结果：

定理　对每个正整数 k，都有

$$S=\frac{1}{c^2}\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^{\mu}\frac{B_{2\mu}}{c^{2\mu}}+(-1)^k\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}\left\{1+\theta_k\frac{2k+1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\right\}\frac{B_{2k}}{c^{2k+2}},\tag{5}$$

这里 c 为任意正数，$B_{2\mu}$ 为 Bernoulli 数，而 $|\theta^k|<1$.

于(5)置 $k=1,2,3,4$,得

$$S=\frac{1}{c^2}-\left(1+\frac{3}{2}\theta_1\right)\frac{1}{8c^4};\tag{5—1}$$

$$S=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\left(1+\frac{15}{8}\theta_2\right)\frac{1}{32c^6};\tag{5—2}$$

$$S=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\frac{1}{30c^6}-\left(1+\frac{35}{16}\theta_3\right)\frac{3}{128c^8};\tag{5—3}$$

* 1981 年 3 月 17 日收到.

$$S=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\frac{1}{30c^6}-\frac{1}{42c^8}-\left(1+\frac{315}{128}\theta_4\right)\frac{17}{512c^{10}}. \tag{5—4}$$

于是我们得到

$$S>\frac{1}{c^2}-\frac{5}{16c^4}; \tag{6—1}$$

$$\begin{cases} S<\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}+\frac{7}{256c^6}; \\ S>\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\frac{23}{256c^6}; \end{cases} \tag{6—2}$$

$$\begin{cases} S<\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\frac{1}{30c^6}+\frac{57}{2048c^8}, \\ S>\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\frac{1}{30c^6}-\frac{153}{2048c^8}; \end{cases} \tag{6—3}$$

$$\begin{cases} S<\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\frac{1}{30c^6}-\frac{1}{42c^8}+\frac{3179}{65536c^{10}} \\ S>\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\frac{1}{30c^6}-\frac{1}{42c^8}-\frac{7531}{65536c^{10}} \end{cases} \tag{6—4}$$

(6—1)即是 Emerslegen 以及 Van der Corput 和 Heflinger 的结果(4)，(6—2)是对 Dia-nanda 的结果(3)在 c^{-4} 量级的准确化。(6—3)和(6—4)则是更高量级的准确估值。

定理的证明，关键在于计算函数

$$f(x)=\frac{2x}{(x^2+c^2)^2} \tag{7}$$

的各阶导数。为此，命

$$F(x)=\int_x^{\infty}f(x)dt=\frac{1}{x^2+c^2}. \tag{8}$$

则

$$(x^2+c^2)F(x)=1. \tag{9}$$

对(9)应用 Leibniz 微分法则，得

$$(x^2+c^2)F^{(\nu+2)}(x)+2(\nu+2)xF^{(\nu+1)}(x)+(\nu+2)(\nu+1)F^{(\nu)}(x)=0$$
$$(\nu=0,1,2,\cdots). \tag{10}$$

写

$$F^{(\nu)}(x)=(-1)^{\nu}\nu!\,q_{\nu}, \tag{11}$$

则由(10)和(8)得

$$\begin{cases} (x^2+c^2)q_{\nu+2}-2xq_{\nu+1}+q_{\nu}=0 \qquad (\nu=0,1,2,\cdots), \\ q_0=F(x)=\frac{1}{x^2+c^2}, \\ q_1=f(x)=\frac{2x}{(x^2+c^2)^2}. \end{cases} \tag{12}$$

解此差分方程得

$$q_\nu = \frac{\sin(\nu+1)\varphi}{c(x^2+c^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \qquad (\nu=0,1,2,\cdots), \tag{13}$$

这里

$$\varphi = arc\sin\frac{c}{\sqrt{x^2+c^2}}. \tag{14}$$

从而

$$\frac{f^{(\nu-1)}(x)}{\nu!} = (-1)^{\nu-1}\frac{\sin(\nu+1)\varphi}{c(x^2+c^2)^{\frac{\nu+1}{2}}} \qquad (\nu=1,2,\cdots), \tag{15}$$

并且

$$\frac{f^{(\nu-1)}(0)}{\nu!} = \begin{cases} 0 & (\nu=2\mu+1), \\ \dfrac{(-1)^{\mu+1}}{c^{2\mu+2}} & (\nu=2\mu). \end{cases} \tag{16}$$

现在我们引用带全变差余项的 Euler-Maclaurin 求和公式

$$\int_a^b f(t)dt = h\sum_{i=0}^{N-1} f[a+(i+x)h] - \sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{h^\nu}{\nu!}B_\nu(x)\{f^{(\nu-1)}(b)-f^{(\nu-1)}(a)\}$$

$$-\frac{h^r}{r!}\left(B_r(x)-\frac{B_r}{2^r}\right)\{f^{(r-1)}(b)-f^{(r-1)}(a)\}$$

$$+\theta_r\frac{h^r}{r!}\left(\|B_r\|-\frac{|B_r|}{2^r}\right)\bigvee_a^b(f^{(r-1)}), \tag{17}$$

式中 $B_\nu(x)$ 为 Bernoulli 多项式，$\|B_r\| = \max\limits_{0\le x\le 1}|B_r(x)|$，$|\theta_r|\leqslant 1$[1]。置 $r=2k$，$x=0$，$h=1$，$a=0$，$b\to\infty$，$N\to\infty$，则对满足

$$\lim_{b\to\infty} f^{(2\mu-1)}(b) = 0 \qquad (\mu=1,2,\cdots) \tag{18}$$

的函数 $f(x)$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^\infty f(t)dt + \frac{1}{2}f(0) - \sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{B_{2\mu}}{(2\mu)!}f^{(2\mu-1)}(0)$$

$$-\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)\{f^{(2k-1)}(0)+\theta_k\bigvee_0^\infty(f^{(2k-1)})\}, \tag{19}$$

式中 $|\theta_k|\leqslant 1$。

对由(7)定义的函数 $f(x)$，由(15)可知(18)是满足的。并且 $f^{(2k-1)}(x)$ 的极值点由

$$\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k+1)!} = \frac{\sin(2k+2)\varphi}{c(x^2+c^2)^{k+1}} \tag{20}$$

1）不同式子中，θ_r 的值不必相同。

的零点给出。设这些零点为 x_m，则 x_m 与 $\sin(2k+2)\varphi$ 的零点

$$\varphi_m=\frac{m\pi}{2k+2} \tag{21}$$

通过等式

$$\sin\varphi_m=\frac{c}{\sqrt{x_m^2+c^2}} \tag{22}$$

联系着。所以

$$\frac{f^{(2k-1)}(x_m)}{(2k)!}=-\frac{\sin(2k+1)\varphi_m}{c(x_m^2+c^2)^{\frac{2k+1}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{c^{2k+2}}(\sin\varphi_m)^{2k+1}\sin(2k+1)\varphi_m$$

$$=-\frac{1}{c^{2k+2}}(\sin\varphi_m)^{2k+1}\sin(m\pi-\varphi_m)$$

$$=\frac{(-1)^m}{c^{2k+2}}(\sin\varphi_n)^{2k+2}.$$

于是

$$\frac{1}{(2k)!}\bigvee_0^{\infty}(f^{(2k-1)})=\frac{1}{c^{2k+2}}\sum_{m=0}^{2k+1}(\sin\varphi_m)^{2k+2}. \tag{23}$$

由于

$$(\sin\varphi_m)^{2k+2}=\left\{\frac{1}{2i}e^{\varphi_m i}-e^{-\varphi_m i}\right\}^{2k+2}$$

$$=\frac{1}{2^{2k+2}}\sum_{n=-k-1}^{k+1}(-1)^n\binom{2k+2}{k+1-n}e^{2n\varphi_m i},$$

并且当 $n=\pm1,\pm2,\cdots,\pm(k+1)$ 时

$$\sum_{m=0}^{2k+1}e^{2n\varphi_m i}=0,$$

所以我们又有

$$\sum_{m=0}^{2k+1}(\sin\varphi_m)^{2k+2}=\frac{2k+1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}. \tag{24}$$

以(7)，(16)，(23)，(24)代入(19)，即得(5)，其中 $|\theta_k|<1$。但根据 $f(x)$ 的性质以及[6]关于(17)的证明，可知 $|\theta_k|\neq1$。所以定理得证。

参 考 文 献

[1] Mathieu, E., Traité de physique mathématique, *Vol. VI—VII*, part 2. Paris. 1890.

[2] Berg, L., Über eine Abschätzung von Mathieu, Math. Nachr. 7(1952), 257—259.

[3] Dinanda, P. H., On some inequalities related to Mathieu's, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* No. 544—No. 576(1976), 77—80.

[4] Emersleben, O., Über die Reihe $\Sigma k(k^2+c^2)^{-2}$, *Math. Ann.* 125(1952), 165—171.

[5] Van der Corput, J. G. and L. O. Heflinger, On the inequality of Mathieu, *Indagationes Math.* 18(1956), 15—20.

[6] 徐利治，王兴华，关于Euler—Maclaurin求和公式的一种余项表示，本刊，1(1981).

Refinements of the Mathieu Inequality

By Wang Chunglie(王中烈) *and Wang Xinghua*(王兴华)

Abstract

In 1890, E. Mathieu conjectured the following inequality

$$S<\frac{1}{c^2}$$

where $S=\sum_{n=1}^{\infty}2n(n^2+c^2)^{-2}$ and c is a positive number. In 1952, L. Berg proved the conjecture. In 1976, P. H. Diananda refined the result to

$$S<\frac{1}{c^2}-\frac{1}{16c^4}+0\left(\frac{1}{c^5}\right)\ (c\to\infty).$$

On the other hand, in 1952, O. Emersleben proved that

$$S>\frac{1}{c^2}-\frac{5}{16c^4}$$

for integral c. This result was extended to real c by J. G. Van der Corput and L. O. Heflinger in 1956.

Now, further refinements of the Mathieu inequality are possible because for any positive integer k, we have.

$$S=\frac{1}{c^2}\sum_{\mu=0}^{k-1}(-1)^{\mu}\frac{B_{2\mu}}{c^{2\mu}}+(-1)^{k}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}\left\{1+\theta_k\frac{2k+1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\right\}\frac{B_{2k}}{c^{2k+2}},$$

where $|\theta_k|<1$ and B_{2u} are Bernoulli numbers.

Setting $k=1,2,3$, we obtain

$$S=\frac{1}{c^2}-\left(1+\frac{3}{2}\theta_1\right)\frac{1}{8c^4}$$

$$S=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\left(1+\frac{15}{8}\theta_2\right)\frac{1}{32c^6}$$

$$S=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\frac{1}{30c^6}-\left(1+\frac{35}{16}\theta_3\right)\frac{8}{128c^8}$$

From the above, it is readily seen that the case $k=1$ yields the result of Van der Corput and Heflinger, the case $k=2$ yields the inequalities

$$\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}-\frac{23}{256c^6}<S<\frac{1}{c^2}-\frac{1}{6c^4}+\frac{7}{256c^6}$$

which in turn refines the result of Diananda thoroughly, and the cases $k\geqslant 3$ provide an abundant source of refinements of the related known results.