Hilbert空间中有界线性算子的膨胀*

吴智泉

（吉林大学）

在Hilbert空间中，有界线性算子的膨胀概念是算子的扩张概念的推广。它在讨论压缩算子的不变子空间时是有用的（见[1]）。本文的目的是给出Hilbert空间$\mathfrak{B}$上的有界线性算子B是它的闭子空间$\mathfrak{A}$上的有界线性算子A的膨胀的一个充要条件。并且利用它给出恰当膨胀和拟恰当膨胀的概念、当讨论的是压缩算子的保范膨胀和酉膨胀时，它们是分别和极小保范膨胀和极小酉膨胀相当的。

本文中其他的一些结果，大都是已有的。不过现在改用了新的陈述方式和证明，作者认为这种陈述方式和证明的改变，可能有利于对这些结果的理解与掌握。

文中所说的空间都是复Hilbert空间，各种记号的用法，都同于[1]和[2]。根据[1]，所谓B是A的膨胀(Dilation)，是表示对于任意正整数n，任意$h\in\mathfrak{A}$，都有

$$(*)\qquad A^n h = P_{\mathfrak{A}} B^n h,$$

此处$P_{\mathfrak{A}}$是从空间$\mathfrak{B}$到闭子空间$\mathfrak{A}$的正交投影，A，B分别为$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$上的有界线性算子。

定理1. B是A的膨胀的充要条件是存在$\mathfrak{B}$上的有界线性算子C，使

(i) $C^n\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}\quad(n=1,2,3,\cdots)$.

(ii) $B=AP_{\mathfrak{A}}+C$.

证明　必要性. 设B是A的膨胀。则

$$P_{\mathfrak{A}}BP_{\mathfrak{A}}=AP_{\mathfrak{A}},$$

令I为$\mathfrak{B}$上的恒等算子，

$$C=P_{\mathfrak{A}}B(I-P_{\mathfrak{A}})+(I-P_{\mathfrak{A}})B.$$

则

$$\begin{aligned}B&=P_{\mathfrak{A}}B+(I-P_{\mathfrak{A}})B\\&=P_{\mathfrak{A}}BP_{\mathfrak{A}}+P_{\mathfrak{A}}B(I-P_{\mathfrak{A}})+(I-P_{\mathfrak{A}})B\\&=AP_{\mathfrak{A}}+C,\end{aligned}$$

以下证明$C^n\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}\quad(n=1,2,3,\cdots)$.

当$h\in\mathfrak{A}$时，$(I-P_{\mathfrak{A}})h=0$。所以

$$Ch=(I-P_{\mathfrak{A}})Bh\in\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}.$$

* 1980年12月9日收到.

即 $C\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$. 若已知当$n\leqslant k$时，$C^n\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$
则$AP_{\mathfrak{A}}C^nh=0\quad(h\in\mathfrak{A},\ n\leqslant k)$. 所以对于$h\in\mathfrak{A}$,

$$\begin{aligned}B^{k+1}h&=(AP_{\mathfrak{A}}+C)^{k+1}h\\&=(AP_{\mathfrak{A}})^{k+1}h+C(AP_{\mathfrak{A}})^kh+\cdots+C^kAP_{\mathfrak{A}}h+C^{k+1}h\\&=A^{k+1}h+CA^kh+\cdots+C^kAh+C^{k+1}h.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}P_{\mathfrak{A}}B^{k+1}h&=P_{\mathfrak{A}}A^{k+1}h+P_{\mathfrak{A}}C^{k+1}h.\\&=A^{k+1}h+P_{\mathfrak{A}}C^{k+1}h\end{aligned}$$

由(*)式即得 $P_{\mathfrak{A}}C^{k+1}h=0$，所以

$$C^{k+1}\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}.$$

由归纳法即知对一切 $n\geqslant1$ 都有 $C^n\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$.

充分性. 设$B=AP_{\mathfrak{A}}+C$，$C^n\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}\,(n=1,2,\cdots)$，则对一切$h\in\mathfrak{A}$，都有

$$P_{\mathfrak{A}}C^nh=0\quad(n\geqslant1)$$

所以当 $h\in\mathfrak{A}$时，

$$\begin{aligned}B^nh&=(AP_{\mathfrak{A}}+C)^nh\\&=(AP_{\mathfrak{A}})^nh+C(AP_{\mathfrak{A}})^{n-1}h+\cdots+C^nh\\&=A^nh+h',\end{aligned}$$

此处

$$\begin{aligned}h'&=C(AP_{\mathfrak{A}})^{n-1}h+\cdots+C^{n-1}AP_{\mathfrak{A}}h+C^nh\\&=CA^{n-1}h+\cdots+C^{n-1}Ah+C^nh\in\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}.\end{aligned}$$

从而

$$P_{\mathfrak{A}}B^nh=A^nh\quad(h\in\mathfrak{A},\ n\geqslant1)$$

可见 B 是 A 的膨胀. 证完.

推论1. 如果 $B=AP_{\mathfrak{A}}+C$ 是 A 的膨胀，则

$$B^*=A^*P_{\mathfrak{A}}+C^*$$

便是 A^* 的膨胀.

证明. 由于

$$\begin{aligned}B^*&=(AP_{\mathfrak{A}}+C)^*=(P_{\mathfrak{A}}AP_{\mathfrak{A}}+C)^*\\&=P_{\mathfrak{A}}A^*P_{\mathfrak{A}}+C^*=A^*P_{\mathfrak{A}}+C^*.\end{aligned}$$

所以只要证明$C^{*n}\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$即可. 而这是很显然的，因为当 $h,h'\in\mathfrak{A}$时，$C^nh'\in\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$ $(n\geqslant1)$.

所以

$$(C^{*n}h,h')=(h,C^nh')=0.$$

证完.

推论2. 如果$B=AP_{\mathfrak{A}}+C$是A的膨胀，则对于任意$n\geqslant 1$及$h\in\mathfrak{A}$，都有

(1)　$B^n h=A^n h+CA^{n-1}h+\cdots+C^n h$,

(1)′　$B^{*n}h=A^{*n}h+C^*A^{*n-1}h+\cdots+C^{*n}h$,

(2)　$C^n h=B^{n-1}(B-A)h=B^n h-B^{n-1}Ah$,

(2)′　$C^{*n}h=B^{*n-1}(B^*-A^*)h=B^{*n}h-B^{*n-1}A^*h$.

证明. 显然只要证(1)和(2)，(1)式的证明已见于定理1的证明.以下证明(2)式.$n=1$时，(2)式显然是成立的. 如果$n=k$时（2）式为真，则由于$C^m\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$ ($m\geqslant 1$)，所以对于$h\in\mathfrak{A}$,

$$\begin{aligned}C^{k+1}h&=(B-AP_{\mathfrak{A}})C^k h\\&=BC^k h-AP_{\mathfrak{A}}C^k h\\&=BC^k h=B(B^{k-1}(B-A)h)\\&=B^k(B-A)h.\end{aligned}$$

即$n=k+1$时，（2）式仍真. 所以（2）式普遍成立.

定理2. 若$B=AP_{\mathfrak{A}}+C$是A的膨胀，又

$$M_+=\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}},\quad M_+^*=\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^{*n}\mathfrak{A}},$$

则M_+和M_+^*分别是B^m和B^*的不变子空间.

证明. 只需证M_+是B的不变子空间，设$h\in\mathfrak{A}$，$n\geqslant 1$，由(2)式

$$\begin{aligned}BC^n h&=B(B^{n-1}(B-A)h)=B^n(B-A)h\\&=C^{n+1}h,\end{aligned}$$

所以$BC^n\mathfrak{A}\subset M_+$，而$B$是连续算子，所以定理2成立.

定义1. 如果$B=AP_{\mathfrak{A}}+C$是A的膨胀，并且

$$\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}},$$

则说B是A的恰当膨胀. 如果

$$\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}\right)\vee\left(\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^{*n}\mathfrak{A}}\right)$$

则说B是A的拟恰当膨胀.

定理3. 若B是A的恰当膨胀，则$\mathfrak{A}$是B^*的不变子空间，并且

$$P_{\mathfrak{A}}B=AP_{\mathfrak{A}},\quad C^*|_{\mathfrak{A}}=0,\quad A^*=B^*|_{\mathfrak{A}}.$$

证明. 由于$\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}$. 所以$\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$是$C$的不变子空间. 已知$C\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$，所以$C\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$，从而$P_{\mathfrak{A}}C=0$. 于是

$$P_{\mathfrak{A}}B=P_{\mathfrak{A}}(AP_{\mathfrak{A}}+C)=AP_{\mathfrak{A}}$$

所以

$$B^*P_{\mathfrak{A}}=(P_{\mathfrak{A}}AP_{\mathfrak{A}})^*=P_{\mathfrak{A}}A^*P_{\mathfrak{A}}=A^*P_{\mathfrak{A}}$$

因而 $B^*\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}$，$C^*|_{\mathfrak{A}}=(B^*-A^*P_{\mathfrak{A}})|_{\mathfrak{A}}=0$，$A^*=B^*|_{\mathfrak{A}}$。

定理4. 若 $B=AP_{\mathfrak{A}}+C$ 是 A 的膨胀，则它是恰当膨胀的充要条件是

$$\mathfrak{B}=\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^n\mathfrak{A}};$$

它是拟恰当膨胀的充要条件是

$$\mathfrak{B}=\Big(\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^n\mathfrak{A}}\Big)\vee\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{B^{*n}\mathfrak{A}}\Big).$$

证明. 从(2)及(2′)，

$$B^nC\mathfrak{A}=C^{n+1}\mathfrak{A},\quad B^{*n}C^*\mathfrak{A}=C^{*n+1}\mathfrak{A}. \tag{3}$$

所以

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}=\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^nC\mathfrak{A}}\subset\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^n\mathfrak{A}},$$

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^{*n}\mathfrak{A}}=\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^{*n}C^*\mathfrak{A}}\subset\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^{*n}\mathfrak{A}},$$

如果 $\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}$，则

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\oplus(\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A})=\mathfrak{A}\oplus\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}\Big)$$

$$\subset\mathfrak{A}\vee\Big(\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^n\mathfrak{A}}\Big)=\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^n\mathfrak{A}}\subset\mathfrak{B}.$$

同样，如果 $\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n}\Big)\vee\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^{*n}\mathfrak{A}}\Big)$，则

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\oplus(\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A})\subset\Big(\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^n\mathfrak{A}}\Big)\vee\Big(\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^{*n}\mathfrak{A}}\Big)$$

$$=\Big(\bigvee_{n=0}^{\infty}\overline{B^n\mathfrak{A}}\Big)\vee\Big(\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{B^{*n}\mathfrak{A}}\Big)\subset\mathfrak{B}.$$

这证明了必要性部分。

另一方面，从(1)及(1′)，当 $n\geqslant1$ 时，

$$B^n\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}\oplus\Big(\bigvee_{k=1}^{n}\overline{C^k\mathfrak{A}}\Big)\subset\mathfrak{A}\oplus\Big(\bigvee_{k=1}^{\infty}\overline{C^k\mathfrak{A}}\Big),$$

$$B^{*n}\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}\oplus\Big(\bigvee_{k=1}^{n}\overline{C^{*k}\mathfrak{A}}\Big)\subset\mathfrak{A}\oplus\Big(\bigvee_{k=1}^{\infty}\overline{C^{*k}\mathfrak{A}}\Big).$$

所以

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{B^n\mathfrak{A}}\subset\mathfrak{A}\oplus\Big(\bigvee_{k=1}^{\infty}\overline{C^k\mathfrak{A}}\Big),$$

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{B^{*n}\mathfrak{A}}\subset\mathfrak{A}\oplus\Big(\bigvee_{k=1}^{\infty}\overline{C^{*k}\mathfrak{A}}\Big).$$

可见当 $\mathfrak{B}=\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\overline{B^n\mathfrak{A}}$ 时，$\mathfrak{A}\oplus\bigvee\limits_{k=1}^{\infty}\overline{C^k\mathfrak{A}}=\mathfrak{B}$，从而 $\bigvee\limits_{k=1}^{\infty}\overline{C^k\mathfrak{A}}=\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$；当 $\mathfrak{B}=\left(\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}B^n\mathfrak{A}\right)\vee\left(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\overline{B^{*n}\mathfrak{A}}\right)$ 时，$\mathfrak{A}\oplus\left\{\left(\bigvee\limits_{k=1}^{\infty}\overline{\phantom{C^k\mathfrak{A}}}\right)\vee\left(\bigvee\limits_{k=1}^{\infty}\overline{C^{*k}\mathfrak{A}}\right)\right\}=\mathfrak{B}$，从而 $\left(\bigvee\limits_{k=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}\right)\vee\left(\bigvee\limits_{k=1}^{\infty}\overline{C^{*n}\mathfrak{A}}\right)=\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$。这证明了充分性。

推论3. 若 V 是 A 的保范膨胀，则 V 是 A 的极小保范膨胀的充要条件是 V 是 A 的恰当膨胀；如果 U 是 A 的酉膨胀，则 U 是 A 的极小酉膨胀的充要条件是 U 是 A 的拟恰当膨胀。

证明. 从极小保范膨胀及极小酉膨胀的定义(见[1])及定理 4 即得。

定理5. 如果 $V=AP_{\mathfrak{A}}+C$ 是 A 的保范膨胀，$n>m\geqslant 1$，则

$$C^n\mathfrak{A}\perp C^m\mathfrak{A}; \tag{4}$$

如果 V 还是酉膨胀，则还有

$$C^{*n}\mathfrak{A}\perp C^{*m}\mathfrak{A} \tag{5}$$

和

$$C^{*m}\mathfrak{A}\perp C^{m'}\mathfrak{A}\qquad(m,m'\geqslant 1). \tag{6}$$

证明. 若 V 是保范算子，则 $V^*V=I$。所以对于 $h,h'\in\mathfrak{A}$，由(2)式，

$$\begin{aligned}(C^nh,C^mh')&=(V^{n-1}(V-A)h,V^{m-1}(V-A)h')\\&=(V^nh,V^mh')-(V^{n-1}Ah,V^mh')-(V^nh,V^{m-1}Ah')+(V^{n-1}Ah,V^{m-1}Ah')\\&=(V^{n-m}h,h')-(V^{n-m-1}Ah,h')-(V^{n-m+1}h,Ah')+(V^{n-m}Ah,Ah')\\&=(A^{n-m}h,h')-(A^{n-m-1}Ah,h')-(A^{n-m+1}h,Ah')+(A^{n-m}Ah,Ah')\\&=0\end{aligned}$$

这证明了(4)式，如果 V 还是酉算子，则 V^* 也是保范的，所以(5)式成立，以下证(6)式。对于 $h,h'\in\mathfrak{A}$，由(2)及(2')式，

$$\begin{aligned}(C^{*m}h,C^{m'}h')&=((V^*)^{m-1}C^*h,V^{m'-1}Ch')\\&=(C^*h,V^{m+m'-2}Ch')\\&=(C^*h,C^{m+m'-1}h')\end{aligned}$$

由于 $C^{m+m'-1}h'\in\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$，$C^*h=(V^*-A^*P_{\mathfrak{A}})h=V^*h-A^*h$，所以

$$\begin{aligned}(C^{*m}h,C^{m'}h')&=(V^*h,C^{m+m'-1}h')=(h,VC^{m+m'-1}h')\\&=(h,C^{m+n}h')=0.\end{aligned}$$

这证明了(6)式。

推论4. 如果 $V=AP_{\mathfrak{A}}+C$ 是 A 的恰当保范膨胀，则

$$\mathfrak{B}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}. \tag{7}$$

如果$U=AP_{\mathfrak{A}}+C$是A的拟恰当酉膨胀，则

$$(8)\qquad \mathfrak{B}=\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\overline{C^{*n}\mathfrak{A}}\right)\oplus\mathfrak{A}\oplus\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\overline{C^{n}\mathfrak{A}}\right).$$

注意，如果令$\mathfrak{L}=\overline{C\mathfrak{A}}$，$\mathfrak{L}^*=\overline{C^*\mathfrak{A}}$，则由（3）式，当$n\geqslant2$时，

$$\overline{C^n\mathfrak{A}}=\overline{U^{n-1}C\mathfrak{A}}=U^{n-1}\overline{C\mathfrak{A}}=U^{n-1}\mathfrak{L},$$

$$\overline{C^{*n}\mathfrak{A}}=\overline{U^{*n-1}C^*\mathfrak{A}}=U^{*n-1}\overline{C^*\mathfrak{A}}=U^{*(n-1)}\mathfrak{L}^*.$$

所以（8）式即成为：

$$\mathfrak{B}=\cdots\oplus U^{*2}\mathfrak{L}^*\oplus U^*\mathfrak{L}^*\oplus\mathfrak{A}^*\oplus\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{L}\oplus U\mathfrak{L}\oplus U^2\mathfrak{L}\oplus\cdots,$$

这正是[1]第二章§1的(1.4)式.

[1]中曾证明任何压缩算子都有极小保范膨胀和极小酉膨胀。所谓压缩算子，就是范数不超过1的算子。显然要算子A有保范膨胀，A必须是压缩算子。下面我们给出压缩算子的极小酉膨胀和极小保范膨胀的存在定理的另一种叙述形式。

我们先介绍压缩算子的亏指数的概念[1]：设T是空间$\mathfrak{A}$上的压缩算子，则

$$D_T=(I_{\mathfrak{A}}-T^*T)^{\frac{1}{2}},\quad D_{T^*}=(I_{\mathfrak{A}}-TT^*)^{\frac{1}{2}}$$

是二自伴算子，称为T的亏算子 (defect operator)
而

$$\delta_T=\dim\overline{D_T\mathfrak{A}},\qquad \delta_{T^*}=\dim\overline{D_{T^*}\mathfrak{A}}$$

便称为T的亏指数。关于亏算子有以下两条重要性质：

$$(9)\qquad TD_T=D_{T^*}T,\quad D_TT^*=T^*D_{T^*},$$

$$(10)\qquad \|Th\|^2+\|D_Th\|^2=\|h\|^2\quad(h\in\mathfrak{A}),$$

$$(11)\qquad \|T^*h\|^2+\|D_{T^*}h\|^2=\|h\|^2\quad(h\in\mathfrak{A}).$$

以上性质的证明可参见[1]第一章§3.

定理6. 设T是$\mathfrak{B}$的闭子空间$\mathfrak{A}$上的压缩算子，如果$0<\delta_T<\aleph_0$，则T在$\mathfrak{B}$上有恰当保范膨胀的充要条件是$\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$的维数$\dim\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\aleph_0$；如果$\delta_T\geqslant\aleph_0$，则$T$在$\mathfrak{B}$上有恰当保范膨胀的充要条件是$\dim\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\delta_T$。同样，如果$0<\max\{\delta_T,\delta_{T^*}\}<\aleph_0$，则$T$在$\mathfrak{B}$上有拟恰当酉膨胀的充要条件是$\dim\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\aleph_0$，而如果$\max\{\delta_T,\delta_{T^*}\}\geqslant\aleph_0$，则$T$在$\mathfrak{B}$上有拟当酉膨胀的充要条件是$\dim\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\max\{\delta_T,\delta_{T^*}\}$.

证明。不妨以恰当保范膨胀的情形的证明为例。酉膨胀的情形的证明是类似的.

先证充分性。在条件满足时，显然可以将$\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$的任意一组完全正规直交系$\{b_\alpha\}$分成可数多个互不相交的子集：$\{b^{(n)}_\beta\}$ $(n=1,2,\cdots)$使各组的基数都是δ_T。当然我们可以认为它们的下标β都是取遍同一下标集合Λ的。对于每一$h\in\mathfrak{A}$，D_Th都可用唯一的方式表成

$$D_Th=\Sigma c_\beta a_\beta,\quad \sum_\beta|c_\beta|^2<\infty.$$

此处$\{a_\beta\}$是在$\overline{D_A\mathfrak{A}}$中取定的一完全正规直交系，而且$\beta$取遍下标集$\Lambda$。定义

$$Ch=\sum_\beta c_\beta b_\beta^{(1)},$$

$$Cb_\beta^{(n)}=b_\beta^{(n+1)}\quad(\beta\in\Lambda,n\geqslant1).$$

于是C可扩张成$\mathfrak{B}$上的线性连续算子。显然

$$C^n\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}\ (n\geqslant1).$$

因此

$$V=TP_{\mathfrak{A}}+C$$

是T在$\mathfrak{B}$上的膨胀。

对于任意$k\in\mathfrak{B}$.

$$k=P_{\mathfrak{A}}k+\sum_\alpha d_\alpha b_\alpha,\quad\sum_\alpha|d_\alpha|^2<\infty.$$

若 $D_TD_{\mathfrak{A}}k=\sum_\beta\hat{c}_\beta a_\beta$，则$\sum_\beta|\hat{c}_\beta|^2=\|D_TP_{\mathfrak{A}}k\|^2<\infty$，

$$Vk=TP_{\mathfrak{A}}k+CP_{\mathfrak{A}}k+\sum_\alpha d_\alpha Cb_\alpha.$$

$$=TP_{\mathfrak{A}}k+\sum_\beta\hat{c}_\beta b_\beta^{(1)}+\sum_\alpha d_\alpha Cb_\alpha.$$

由于 $Cb_\alpha\in\bigcup_{n=2}^{\infty}\{b_\beta^{(n)}\}$，所以上式右端各项是相互直交的。从而

$$\|Vk\|^2=\|TP_{\mathfrak{A}}k\|^2+\sum_\beta|\hat{c}_\beta|^2+\sum_\alpha|d_\alpha|^2.$$

$$=\|TP_{\mathfrak{A}}k\|^2+\|D_TP_{\mathfrak{A}}k\|^2+\sum_\alpha|d_\alpha|^2.$$

于是由(10)式即得

$$\|Vk\|^2=\|P_{\mathfrak{A}}k\|^2+\sum_\alpha|d_\alpha|^2=\|k\|^2.$$

这证明了V的保范性。由于$\overline{C\mathfrak{A}}$就是由$\{b_\beta^{(1)}\}$所张开的闭子空间。因此$C^n\mathfrak{A}=C^{n-1}\overline{C\mathfrak{A}}$就是由$\{b_\beta^{(n)}\}$所张开的闭子空间$(n=2,3,\cdots)$。从而

$$\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}\ .$$

这证明V是T的恰当膨胀。

必要性。若T在$\mathfrak{B}$上有恰当保范膨胀V，

$$V=TP_{\mathfrak{A}}+C,$$

则由定理 5 后的推论 4 及(3)式

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\oplus\overline{C\mathfrak{A}}\oplus\overline{C^2\mathfrak{A}}\oplus\cdots.$$

$$=\mathfrak{A}\oplus\overline{C\mathfrak{A}}\oplus V\overline{C\mathfrak{A}}\oplus V^2\overline{C\mathfrak{A}}\oplus\cdots$$

而从 V 的保范性及(10)式，当 $h\in\mathfrak{A}$时，

$$\|h\|^2=\|Vh\|^2=\|TP_{\mathfrak{A}}h\|^2+\|Ch\|^2=\|Th\|^2+\|Ch\|^2,$$

$$\|h\|^2=\|Th\|^2+\|D_Th\|^2,$$

所以 $\|Ch\|=\|D_Th\|$ $(h\in\mathfrak{A})$，因此

$$\dim\overline{C\mathfrak{A}}=\dim\overline{D_T\mathfrak{A}}=\delta_T$$

由于 V 是保范算子，于是

$$\dim V^n\overline{C\mathfrak{A}}=\dim\overline{C\mathfrak{A}}=\delta_T.$$

从而条件是必要的.

推论5. 如果 $B=TP_{\mathfrak{A}}+C$ 是 $\mathfrak{A}$ 上的压缩算子 T 的恰当膨胀，则 T 为保范算子的充要条件是 C 在 $\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}$ 上的限制是以 $\overline{C\mathfrak{A}}$ 为生成子空间的单边移位算子. 并且 $\|Ch\|=\|D_Th\|$ $(h\in\mathfrak{A})$.

证明. 必要性已见于定理 6 的必要性部分的证明. 至于充分性只要注意

$$\begin{aligned}\|Bh\|^2&=\|(BP_{\mathfrak{A}}+(I-P_{\mathfrak{A}}))h\|^2=\|BP_{\mathfrak{A}}h\|^2+\|(I-P_{\mathfrak{A}})h\|^2\\&=\|TP_{\mathfrak{A}}h+CP_{\mathfrak{A}}h\|^2+\|(I-P_{\mathfrak{A}})h\|^2\\&=\|TP_{\mathfrak{A}}h\|^2+\|CP_{\mathfrak{A}}h\|^2+\|(I-P_{\mathfrak{A}})h\|^2\\&=\|TP_{\mathfrak{A}}h\|^2+\|D_TP_{\mathfrak{A}}h\|^2+\|(I-P_{\mathfrak{A}})h\|^2\\&=\|P_{\mathfrak{A}}h\|^2+\|(I-P_{\mathfrak{A}})h\|^2=\|h\|^2\end{aligned}$$

即可，此处用到亏算子 D_T 的性质(10).

推论6. 若 $U=TP_{\mathfrak{A}}+C$ 是 T 的拟恰当酉膨胀，则 U 在 $\mathfrak{A}\oplus M_+$ 和 U^* 在 $\mathfrak{A}\oplus M_+^*$ 上的限制分别为 T 和 T^* 的恰当保范膨胀. 此处

$$M_+=\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\overline{C^n\mathfrak{A}},\quad M_+^*=\bigvee_{n=1}^{\infty}\overline{C^{*n}\mathfrak{A}}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\overline{C^{*n}\mathfrak{A}}.$$

推论7. 若 T 是保范算子（酉算子），则 T 不存在任何真正的恰当（拟恰当）保范(酉)膨胀.

证明. 若 T 保范，则由(10)，$D_T=0$. 因此当 $V=TP_{\mathfrak{A}}+C$ 为 T 的在 $\mathfrak{B}$ 上的恰当保范膨胀时，$C\mathfrak{A}=\{0\}$. 从而 $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$，$V=T$. 若 T 为酉算子，则 T^* 也是保范的，由已证事实及推论 6 即知如果 $U=TP_{\mathfrak{A}}+C$ 为 T 在 $\mathfrak{B}$ 上的拟恰当酉膨胀时，$M_+=M_+^*=\{0\}$，从而 $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$，$U=T$.

定理7. $\mathfrak{A}$ 上的有界线性算子 T 有恰当酉膨胀的充要条件是 T^* 为保范算子.

证明. 如果 T 有恰当酉膨胀 $U=TP_{\mathfrak{A}}+C$，则由定理 3，$T^*=U^*|_{\mathfrak{A}}$，因此 T^* 是保范的.

反之，如果 T^* 是保范算子，则 T 是压缩算子，根据定理 6，我们可以作 T 在一空间 $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}$ 上的拟恰当酉膨胀，$U=TP_{\mathfrak{A}}+C$，这时 U^* 在 $\mathfrak{A}\oplus M_+^*$ 上的限制是 T^* 的恰当保范膨胀，而由推论 7 便知 $M_+^*=\{0\}$. 所以

$$\mathfrak{B}\ominus\mathfrak{A}=\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\overline{C^{n}\mathfrak{A}}\right)\oplus\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}\overline{C^{*n}\mathfrak{A}}\right)=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\overline{C^{n}\mathfrak{A}}.$$

这表明U实际上是T的恰当膨胀。证完。

最后，我们以下述与保范算子有关的有趣事实作为本文的结束。

定理8. 如果A是$\mathfrak{A}$上的有界线性算子，A^*是保范的，则必有$\mathfrak{A}$的闭子空间$\mathfrak{N}$，使A是从$\mathfrak{N}$到$\mathfrak{A}$上的酉算子。

证明. 由于A^*是保范算子，所以$A=(A^*)^*$是范数为1的算子，所以是压缩算子。令D_A为A的亏算子，即$D_A=(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}$。则$D_A$的零化空间

$$\mathfrak{N}=\{h;D_Ah=0,h\in\mathfrak{A}\}$$

是$\mathfrak{A}$的闭子空间。由(10)式，当$h\in\mathfrak{N}$时，

$$\|Ah\|^2=\|h\|^2,$$

可见视A为从$\mathfrak{N}$到$\mathfrak{A}$内的算子$\hat{A}$时，$\hat{A}$是保范的。因而我们只要证明$\hat{A}\mathfrak{N}=\mathfrak{A}$即可。

由于A^*是保范算子，所以A的值域必在$\mathfrak{A}$中稠密，我们来证明$\hat{A}\mathfrak{N}=A\mathfrak{N}$在$\mathfrak{A}$内也是稠密的。设$h_0\in\mathfrak{N}$，$h_0\perp A\mathfrak{N}$。则

$$(Ah',h_0)=(h'A^*h_0)=0\quad h'\in\mathfrak{N}.$$

现在用$P_{\mathfrak{N}}$表从$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{N}$的正交投影算子，则于任意$h\in\mathfrak{A}$，

$$h=P_{\mathfrak{N}}h+(I-P_{\mathfrak{N}})h=h_1+h_2,$$

$h_1\in\mathfrak{N}$，$h_2\in\mathfrak{A}^{\perp}$注意$D_T$是自伴算子，

$$\mathfrak{N}^{\perp}=\overline{D_T\mathfrak{A}}.$$

因此应有一串$a_n\in\mathfrak{A}$，使$D_Aa_n\to h_2\quad(n\to\infty)$。现在$A^*$是保范算子，所以$AA^*=(A^*)^*(A^*)=I$。因而

$$D_{A^*}=(I-AA^*)^{\frac{1}{2}}=0.$$

于是从(9)式得

$$(D_Aa_n,A^*h_0)=(AD_Aa_n,h_0)=(D_{A^*}Aa_n,h_0)=0.$$

可见

$$(h_2,A^*h_0)=\lim_{n\to\infty}(D_Aa_n,A^*h_0)=0.$$

而(h_1,A^*h_0)是等于0的，所以

$$(h,A^*h_0)=0\quad(h\in\mathfrak{A}).$$

取$h=A^*h_0$即得$\|A^*h_0\|^2=0$，注意A^*保范，于是$h_0=0$。这证明了$\hat{A}\mathfrak{N}=A\mathfrak{N}$在$\mathfrak{A}$内的稠密性。现在已知$\mathfrak{N}$是闭的，$\hat{A}$是保范的，所以$\hat{A}\mathfrak{N}=\mathfrak{A}$.证完。

参 考 文 献

[1] Sz.-Nagy, Foiaş, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland. Amsterdam, 1970.
[2] F. Riesz, Sz.-Nagy, *Leçons D'Analyse Fonctionnelle*, 1953.

Concerning the Dilations of Bounded Operators in Hilbert Space

Wu Zhiquan (吴智泉)

Abstract

The concept of dilation of bounded operator in Hilbert space introduced by Sz.-Nagy is useful for the operator researches. The main purpose of this note is to give a necessary and sufficient condition for an operator to be a dilation of a bounded operator A and then to distinguish the dilations of an operator into two kinds, exact and unexact dilations, by means of this condition. When we are only concerned with unitary dilations, the concept of exact dilation being nothing but that of minimal unitary dilation. Most of the other results stated in this note may be well known, but have been stated and proved in a new form.