关于相对拓扑

程极泰

（上海交通大学）

在一个集合X上以一种拓朴J形成一种拓朴空间（X，J）以后，对于X中的子集$Y\subset X$，可以相对拓扑（*relative topology*）

$$S=\{u\cap Y|\,u\in J\}$$

构成子空间（Y,S），同样的，可以对$y\in Y$，构成y在Y中的邻域系

$$\{v\cap Y|\,v\text{ 是 }y\text{ 在 }X\text{ 中的一个邻域}\}$$

用这两种概念论证子集上的性质时，容易出现笔误和不妥之处。

例如，在*M, Eisenberg*的"拓扑学"135页[1]，指出根据子空间定义，以及

定理1　设（Y,S）是一拓扑空间（X,J）的一个子空间，且设$A\subset Y$，则当且仅当对X的某闭子集E有

$A=E\cap Y$时，A才是在Y中闭的，

若$A\subset Y$且若A是在整个空间X中开或闭时，则$A=A\cap Y$是在子空间Y中各是开的或闭的。反过来说一般是不成立的。例如$A=[0,1[$是在$Y=[0,1]$中又是开又是闭的，但在$X=R$中，A既不是开也不是闭的。

这个举例显然是与书中紧接着的命题相矛盾的。因为

命题2　设（Y,S）是一拓扑空间（X,J）的一个子空间，且令$A\subset Y$，则

（1）　若A是在Y中开，Y是在X中开，则A是在X中开，

（2）　若A是在Y中闭，Y是在X中闭，则A是在X中闭。

所以，$A=[0,1[$是在$Y=[0,1]$中开是正确的，因为

$$A=(]0,1[)\cap Y$$

但是$A=[0,1[$不是在Y中闭的，否则按命题结论，A将是在R中闭的。

再比如关于"闭包"（*Closure*）的定义，我们可以有三种相继派生的定义方法[2]；(1)从边界概念出发，(2)从闭集概念出发，(3)从极限点概念出发。

* 1981年3月16日收到.

（1） **定义1** 设A是一拓扑空间X的一个子集，则A在X中的的边界是那些使x在X中的每一邻域交A且交$X\setminus A$的所有x点的集合。记为$bdyA$。

这里，特别值得注意的是“x在X中的邻域，”它说明若v是x在X中的一个邻域，应有X中一个开集u使

$$x\in u\subset v$$

而不是指在A中有一个开集$u_1=u\cap A$使

$$x\in u_1\subset v,$$

所以，更好地说，x在X中的邻域是指的“x在X中的开邻域”。

由定义1可以引得，A的内部与A的闭包两个定义：

定义 2 设A是一拓扑空间X的子集，则A的内部是A的子集$A\quad bdyA$，记为$intA$。

定义 3 设A是一拓朴空间X的子集，称X的子集

$$intA\cup bdyA$$

是A的闭包，记为$\bar{A}$。

从而可以证明：$\bar{A}$是X含A的最小闭子集。

这就引出第二种闭包定义[3]

（2） **定义 4** 设A是一拓朴空间X的一个子集。则A的闭包是X的子集集合

$$\bar{A}=\cap\{E\subset X\,|A\subset E,\ E\text{是}X\text{中闭集}\}$$

由此定义可以有

定理 3 设A是一拓扑空间X的一个子集，则

$$x\in\bar{A}\quad iff\quad x\in u\in J\text{就有}u\cap A\neq\phi$$

再从极限点与边界点定义

定义 5 设A是一拓扑空间X的一个子集，则$x\in X$是A的一个极限点iff $x\in u\in J$时就有

$$(u-\{x\})\cap A\neq\phi$$

定义 6 设A是一拓抖空间X的一个子集，则$x\in X$是A的一个边界点iff $x\in u\in J$时就有

$$u\cap A\neq\phi,\ u\cap(X\setminus A)\neq\phi$$

若用A'表示A的所有极限点的集合，$bayA$的表示A的所有边界点集合，则可证明

定理 4 若A是一拓抖空间X的一个子集，则

$$\bar{A}=A\cup A'=A\cup bdyA,$$

由此又可以给出闭包的第三种定义[4]。

（3） **定义 7** 一拓扑空间X的子集A，A的闭包是集合

$$\bar{A}=A\cup(x\in X,\ x\text{是}A\text{的一个极限点}),$$

最后，从该定义，可以给出

定理 5 集合A是闭的 $iff A=\bar{A}$.

我们知道(2)，(3)的定义闭包，都只用拓扑J中的开集来界定，不似(1)定义闭包从邻域概念引出。由于邻域较开集有更多的任意性，所以用邻域构造拓扑要具备五点性质，而用开集构造拓扑，则只从三点性质引出。加上相对拓扑概念与整体拓扑之间的一种转换关系，显然是完全从整个拓扑空间的开集来定义各概念是比较不会有误解的。

参 考 文 献

[1] Murray Eisenberg, Topology, (1974).

[2] 程极泰，拓扑学讲义，(1981).

[3] Benjamin T. Sims, Fundamentals of Topology, (1976).

[4] Singer I.M., Thorpe, J.A., Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, (1967).

On Relative Topology

By *Cheng Chitai* (陈极泰)

Abstract

Using relative topology to define new concept, if we are not to take care, it may be wrong. For example, at the p. 135 in the M. Eisenberg "Topolgy", there is a contradictory argument.

We discuss with another example that the "closure" concept may be defined from three different viewpoints, they reflect that total space topology is the better background than the relative topology.