# 左模的张量积及其线性映射*

刘迎胜

（南京大学）

## 引　　言

设 $K=\{0, 1_K, a, b, c, \cdots\}$ 为有单位元 $1_K$ 的可换环，$R=\{0, 1_R, r_\sigma|\sigma\in\Sigma\}$、$S=\{0, 1_S, S_\tau|\tau\in\Gamma\}$ 分别为有单位元 $1_R$、$1_S$ 的 $K$ 环，当然 $1_K1_R=1_R=1_R1_K$，$1_K1_S=1_S=1_S1_K$，下面在不至于混淆的情况下，$1_K$、$1_R$、$1_S$ 均用 1 表示. $M=\{x_\lambda|\lambda\in\wedge\}$、$M'=\{u_i|i\in I\}$ 为左 $R$ 酉模，$N=\{y_\mu|\mu\in\Omega\}$、$N'=\{U_j|j\in J\}$ 为左 $S$ 酉模. 我们用 $H_R(M, M')$ 表示 $R$ 模 $M$ 到 $R$ 模 $M'$ 的所有 $R$ 同态所形成的可换群. 文〔1〕将 $R$ 模 $M$ 与 $S$ 模 $N$ 的张量积定义为一个左 $R\otimes S$ 模，本文就在此基础上讨论 $M\otimes N$ 作为 $R\otimes S$ 模的一些性质及其线性映射. 如果不特别声明，本文中所有的环都有单位元，所有的模都指左酉模.

全文分两部分. 第一部分主要讨论 $H_R(M, M')\otimes H_S(N, N')$ 与 $H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$ 的关系，这部分分二段. 在 §1.1 中首先证明了 $H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')$ 同态于 $H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$ 的一个稠密子群，其次证得当 $K$ 是域时，这同态是单的，最后得到关于 $H_R(M, M')\otimes H_S(N, N')\cong H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$ 的充要条件的定理 4，定理 4 在 $R=S=K$ 以及 $M=M'$、$N=N'$ 的特殊情况即得〔3〕中第五章 §3 的定理 1，在 $R=S=K$ 以及 $M$、$M'$、$N$、$N'$ 都是有限维的特殊情况得到〔4〕中 §1.27 的结果，此外还得到另外几个推论. 在 §1.2 中考虑了 $M=M'$、$N=N'$ 的情况，从而将 Azumaya—Nakayama 的关于域上不可约模的张量积的定理推广到整环上. 第二部分从几个不同的角度讨论了左模的张量积及其线性映射. 这部分分成三段. 在 §2.1 中以非退化的双线性型建立了一般环模的对偶模及其张量积的概念，并得到了 $M^*\otimes N^*\cong(M\otimes N)^*$（$M^*\equiv Hom_R(M, R)$）的另一个充分条件. 在 §2.2 中得到环模张量积的一判定定理. 在 §2.3 中讨论环模对于自同态环的可迁性，提出了可迁模的概念，然后讨论可迁模的一些性质.

文〔1〕中定义 $\phi$：$M\times N\to P$ 是 $R\otimes S$ 映射（$P$ 是 $R\otimes S$ 模），如果

i) $\phi(x, y)\in P$ 　　$\forall x\in M$，$\forall y\in N$，

ii) $\phi\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \sum_{j=1}^{m} s_j y_j\right)=\sum_{i,j} r_i\otimes s_j\phi(x_i\otimes y_j)$，

$r_i\in R$，$s_j\in S$，$x_i\in M$，$y_j\in N$，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$.

* 1981年3月23日收到，推荐人：周伯壎（南京大学）.

文〔1〕中还进一步定义了 $R\otimes S$ 模 $P$ 是 $M$ 与 $N$ 的张量积，如果存在 $\phi$：$M\times N\longrightarrow P$ 是 $R\otimes S$ 映射，且

i) $P$ 是由 $\phi$ 的象所生成的，即对任意 $\omega\in P$，都存在 $x_i\in M$，$y_i\in N$，$i=1, \cdots, n$，使得 $\omega=\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i, y_i)$，

ii)设 $Q$ 是任意 $R\otimes S$ 模，对任意 $R\otimes S$ 映射 $\psi$：$M\times N\to Q$，必有 $R\otimes S$ 同态 $\sigma$：$P\to Q$，使得 $\sigma\phi=\psi$，换言之有交换图

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \varphi \\ P \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

成立，则记 $P=M\otimes N$，$\phi(x, y)=x\otimes y$，$x\in M$，$y\in N$。

文〔2〕中证明了 $R\otimes S$ 模 $M\otimes N$ 重合于 $K$ 模 $M$ 与 $K$ 模 $N$ 关于 $K$ 的一般张量积 $M\underset{K}{\otimes}N$，此积有左算子区 $R\otimes S$，其算子运算为 $(r\otimes s)(x\underset{K}{\otimes}y)=rx\underset{K}{\otimes}sy$，$r\in R$，$s\in S$，$x\in M, y\in N$。

此外还须说明，$H_R(M, M')$ 不仅是 Abel 加法群，而且可以看作 $K$ 模，只要定义

$$(af)x=a(fx)=f(ax),\quad a\in K,\ f\in H_R(M, M'),\ x\in M \text{即可。}$$

## §1.1 $H_R(M, M')\otimes H_S(N, N')$ 与 $H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$ 的关系

设 $f\in H_R(M, M')$，$g\in H_S(N, N')$，$x\in M$，$y\in N$，并设 $\tau$：$M\times N\longrightarrow M'\otimes N'$，使得 $\tau(x, y)=f(x)\otimes g(y)$。由于

$$\tau\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i,\ \sum_{j=1}^{m} s_j y_j\Big)=f\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\Big)\otimes g\Big(\sum_{j=1}^{m} s_j y_j\Big)=\Big[\sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i)\Big]\otimes\Big[\sum_{j=1}^{m} s_j g(y_j)\Big]$$

$$=\sum_{i,j} r_i\otimes s_j\ f(x_i)\otimes g(y_j)=\sum_{i,j} r_i\otimes s_j\ \tau(x_i, y_j),$$

$r_i\in R$，$s_j\in S$，$x_i\in M$，$y_j\in N$，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$，

所以由文〔1〕$R\otimes S$ 映射的定义知 $\tau$ 是 $R\otimes S$ 映射。于是根据文〔1〕$R\otimes S$ 模 $M\otimes N$ 张量积的定义，存在 $R\otimes S$ 同态 $\sigma$：$M\otimes N\longrightarrow M'\otimes N'$，使得 $\sigma(x\otimes y)=f(x)\otimes g(y)$，即交换图

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, dashed, "\tau"] \arrow[d, "\otimes"'] & M'\otimes N' \\ M\otimes N \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

成立，这里 $\sigma\in H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$。我们将 $\sigma$ 记成 $f\overline{\otimes}g$，其中"$\overline{\otimes}$"只是一个符号，未必是张量积，表示由 $f$，$g$ 决定的 $H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$ 中的元素，使得 $f\overline{\otimes}g(x\otimes y)=f(x)\otimes g(y)$。

显然 $H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$ 中所有这些元素 $f\overline{\otimes}g$ 所成的集合 $P=\Big\{\sum_i f_i\overline{\otimes}g_i\in H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')\,|\,f_i\in H_R(M,M'),\ g_i\in H_S(N,N'),\Big\}$ 是 $H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$ 的一个 $K$ 子模。

如通常一样，我们说 $P$ 在 $H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$ 中关于 $M\otimes N$ 的有限拓扑稠密的意思是，对 $M\otimes N$ 中任意有限个元素 $z_1, \cdots, z_n$，以及 $H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$ 中任意元素 $F$，$P$ 中存在一个元素 $\overline{F}$，使得 $F(z_i)=\overline{F}(z_i)$，$i=1,\cdots,n$。

**命题1.** 若$M$、$N$分别是$R$、$S$上的自由模，则$P$在$H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')$中稠密。

**证** 设$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{y_\mu\}_{\mu\in\Omega}$分别是$M$，$N$在$R$，$S$上的基底，则由文[1]知$M\otimes N$是$R\otimes S$上的自由模，基底是$\{x_\lambda\otimes y_\mu\}_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \mu\in\Omega}}$。

对于$M\otimes N$的任意有限个元素，显然存在$\Lambda$的有限子集$\Lambda_1$，$\Omega$的有限子集$\Omega_1$，使得这有限个元素都由$\{x_\lambda\otimes y_\mu\}_{\substack{\lambda\in\Lambda_1\\ \mu\in\Omega_1}}$生成。这样，稠密性只要对$\{x_\lambda\otimes y_\mu\}_{\substack{\lambda\in\Lambda_1\\ \mu\in\Omega_1}}$来验证就行了。

任取$F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')$，设$F(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum\limits_{i=1}^{K}u_i^{(\lambda\mu)}\otimes v_i^{(\lambda\mu)}$，$\lambda\in\Lambda_1$，$\mu\in\Omega_1$，$u_i^{(\lambda\mu)}\in M'$，$v_i^{(\lambda\mu)}\in N'$，$i=1,\cdots,k$。因为$\Lambda_1$，$\Omega_1$是有限子集，所以对所有$\lambda\in\Lambda_1$，$\mu\in\Omega_1$可找到统一的$k$。

取$f_i^{(\lambda\mu)}\in H_R(M,M')$，$g_i^{(\lambda\mu)}\in H_S(N,N')$，使得$f_i^{(\lambda\mu)}(x_p)=\delta_{\lambda p}u_i^{(\lambda\mu)}$，$g_i^{(\lambda\mu)}(y_q)=\delta_{\mu q}v_i^{(\lambda\mu)}$，$\lambda$，$p\in\Lambda_1$，$\mu$，$q\in\Omega_1$，$i=1,\cdots,k$。

这样，$\sum\limits_{\substack{\lambda\in\Lambda 1\\ \mu\in\Omega 1\\ i=1,\cdots,k}}f_i^{(\lambda\mu)}\overline{\otimes}g_i^{(\lambda\mu)}(x_p\otimes y_q)=\sum\limits_{i,\lambda,\mu}f_i^{(\lambda\mu)}(x_p)\otimes g_i^{(\lambda\mu)}(y_q)=\sum\limits_{i=1}^{k}u_i^{(pq)}\otimes v_i^{(pq)}=F(x_p\otimes y_q)$，

$\forall p\in\Lambda_1$，$q\in\Omega_1$，而$\sum\limits_{\substack{\lambda\in\Lambda_1\\ \mu\in\Omega_1\\ i=1,\cdots,k}}f_i^{(\lambda\mu)}\overline{\otimes}g_i^{(\mu\lambda)}\in P$，所以$P$在$H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')$中稠密。命题1得证。

刚才说到$f\overline{\otimes}g\in P$中的“$\overline{\otimes}$”未必是张量积，那么我们来看看$P=\left\{\sum\limits_i f_i\overline{\otimes}g_i\,|\,f_i\in H_R(M,M'),\ g_i\in H_S(N,\ N')\right\}$与$H_R(M,\ M')\otimes H_S(N,\ N')$的关系。

显然从$H_R(M,\ M')\times H_S(N,\ N')$到$P\subseteq H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')$中的映射$\overline{\otimes}$：$(f,g)\longrightarrow f\overline{\otimes}g$是$K$上双线性映射，所以由$K$模张量积的定义，存在$K$同态$\Phi$：$H_R(M,\ M')\otimes H_S(N,\ N')\longrightarrow P$，使得$\Phi(\sum\limits_i f_i\otimes g_i)=\sum\limits_i f_i\overline{\otimes}g_i$，也就是有交换图

$$\begin{tikzcd}
H_R(M,\ M'\times H_S(N,\ N') \arrow[r, "\overline{\otimes}"] \arrow[d, "\otimes"'] & P\subseteq H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N') \\
H_R(M,\ M')\otimes H_S(N,\ N') \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

这样由命题1可知$H_R(M,\ M')\otimes H_S(N,\ N')$同态于$H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')$的稠密子群。现在证明

**命题2.** 如果$K$是域，则$\Phi$是单同态，即$P\cong H_R(M,\ M')\otimes H_S(N,\ N')$。

**证** 设$\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\otimes g_i\in ker\Phi$，$f_i\in H_R(M,\ M')$，$g_i\in H_S(N,\ N')$，$i=1,\cdots,n$。因为$K$是域，$H_S(N,\ N')$是$K$模，故可设$g_1,\cdots,\ g_n$在$K$上线性无关。则$0=\Phi\left(\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\otimes g_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\overline{\otimes}g_i$。因此，对于任意$x\in M$，$y\in N$，都有$0=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}f_i\overline{\otimes}g_i\right)(x\otimes y)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)\otimes g_i(y)$.

可设 $f_i(x)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j$，其中$m$是与$i$无关的自然数，$a_{ij}\in K$，$u_j$是$M'$在$K$上的基元，$i=1,\cdots n,j=1,\cdots,m$。故 $0=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}u_j\right)\otimes g_i(y)=\sum_{j=1}^{m}u_j\otimes\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}g_i(y)\right)$。因为$M'$、$N'$是$K$上线性空间，由文〔2〕，$R\otimes S$模$M'\otimes N'$可看成关于域$K$的张量积，所以由$u_1,\cdots,u_m$在$K$上线性无关，得$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}g_i(y)=0,\forall y\in N,j=1,\cdots,m$。因此$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}g_i=0$，$j=1,\cdots m$。由$g_1,\cdots g_n$在$K$上线性无关，得$a_{ij}=0,i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m$于是$f_i(x)=0$，$i=1,\cdots,n$，$\forall x\in M$，由此得$f_i=0$，$i=1,\cdots,n$。因此$\sum_{i=1}^{n}f_i\otimes g_i=0$。这说明$\Phi$是单同态，$P\cong H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')$，证毕。

因此当$K$是域，$M$、$N$分别是$R$、$S$上自由模时，$H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')$可看成$H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$的一个稠密子群。但$H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')$未必与$H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$同构，从以下命题可知在某些条件下一定不同构。

**命题 3.** 设$K$是域，$R$、$S$和$R\otimes S$是$K$上可除代数，则$H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')\cong H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$的充要条件是下述条件至少有一个成立：

i) $M$、$N$分别是$R$、$S$上的有限维线性空间；

ii) $N\underset{K}{\otimes}N'$是$K$上有限维线性空间；

iii) $M\underset{K}{\otimes}M'$是$K$上有限维线性空间。

**证** 在下面全部证明过程中，设$R$在$K$上基底为$\{r_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$；$S$在$K$上基底为$\{s_\tau\}_{\tau\in\Gamma}$；$M$在$R$上基底为$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$；$N$在$S$上基底为$\{y_\mu\}_{\mu\in\Omega}$；$M'$在$R$上基底为$\{u_i\}_{i\in I}$；$N'$在$S$上基底为$\{v_j\}_{j\in J}$；但是如果足码由两个以上元素组成的都不一定是基元。

因为$K$是域，由命题2，$P\cong H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')$，以下可将$\sum_i f_i\otimes g_i$与$\sum_i f_i\overline{\otimes}g_i$视为同一.

**充分性** 只要证$P=H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$，由于$P\subseteq H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$，所以只须证$P\supseteq H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$。

1. 设$M$、$N$分别是$R$、$S$上的有限维线性空间，即$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{y_\mu\}_{\mu\in\Omega}$是有限集。因此由文〔1〕，$M\otimes N$在$R\otimes S$上的基底$\{x_\lambda\otimes y_\mu\}_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \mu\in\Omega}}$也是有限集。由命题1，任取$F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$，存在$\overline{F}\in P$，使得$F(x_\lambda\otimes y_\mu)=\overline{F}(x_\lambda\otimes y_\mu)$，$\forall\lambda\in\Lambda$，$\forall\mu\in\Omega$。这样对任意$z\in M\otimes N$，有$F(z)=\overline{F}(z)$，故$F=\overline{F}\in P$这说明$H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')\subseteq P$，因此$H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')=P\cong H_R(M,M')\otimes H_S(N,N')$。

2. 设$M\otimes M'$是$K$上有限维线性空间，即$M$，$M'$是$R$上有限维的，$R$在$K$上有有限基底，也就是$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{u_i\}_{i\in I}$，$\{r_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$都是有限集。

任取$F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$，设$F(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\omega_{ij}^{\lambda\mu}u_i\otimes v_j$，$\omega_{ij}^{\lambda\mu}\in R\otimes S$，$\lambda\in\Lambda$，$\mu\in\Omega$，又设$\omega_{ij}^{\lambda\mu}=\sum_{\sigma\in\Sigma}r_\sigma\otimes S_{ij\sigma}^{\lambda\mu}$，$S_{ij\sigma}^{\lambda\mu}\in S$，$i\in I$，$j\in J$，$\sigma\in\Sigma$。则$F(x_\lambda\otimes y_\mu)=$

$\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\left(\sum_{\sigma\in\Sigma} r_\sigma\otimes s_{i\,j\,\sigma}^{\lambda\,\mu}\right)u_i\otimes v_j=\sum_{\substack{i\in I\\ \sigma\in\Sigma}} r_\sigma u_i\otimes\sum_{j\in J} s_{i\,j\,\sigma}^{\lambda\,\mu}v_j$，记$\sum_{j\in J} s_{i\,j\,\sigma}^{\lambda\,\mu}v_j=v_{i\,\sigma}^{\lambda\,\mu}\in N'$，这样$F(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum_{\substack{i\in I\\ \sigma\in\Sigma}} r_\sigma u^i\otimes v_{i\,\mu}^{\lambda\,\sigma}$.

取$f_{i\sigma k}\in H_R(M,\ M')$，$g_{i\sigma k}\in H_S(N,\ N')$，使得$f_{i\sigma k}(x_\lambda)=\delta_{k\lambda}r_\sigma u_i$，$g_{i\sigma k}(y_\mu)=v_{i\,\sigma}^{k\,\mu}$，$i\in I$，$\sigma\in\Sigma$，$k\in\Lambda$。则$\left(\sum_{\substack{k\in\Lambda\\ i\in I\\ \sigma\in\Sigma}} f_{i\sigma k}\overline{\otimes}g_{i\sigma k}\right)(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum_{\substack{i\in I\\ \sigma\in\Sigma}} r_\sigma u_i\otimes v_{i\,\sigma}^{\lambda\,\mu}$，$\lambda\in\Lambda,\mu\in\Omega$。因此$F=\sum_{\substack{k\in\Lambda\\ i\in I\\ \sigma\in\Sigma}} f_{i\sigma k}\overline{\otimes}g_{i\sigma k}\in P$。故$H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')=P\cong H_R(M,\ M')\otimes H_S(N,\ N')$。

3．如果$N\underset{K}{\otimes}N'$在$K$上是有限维的，同样可得结论。

**必要性**　由条件，$P=H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')\cong H_R(M,\ M')\otimes H_S(N,\ N')$。分以下几步证明：

(1)$R$，$S$上的线性空间$M$，$N$中至少有一个是有限维的。

(2)若$M$是$R$上无限维的，则$N'$是$S$上有限维的。

(3)若$M$是$R$上无限维的，则$S$在$K$上是有限维的。

(1)：假设$M$、$N$分别是$R$、$S$上的无限维线性空间，即$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{y_\mu\}_{\mu\in\Omega}$是无限集。设$\Lambda_1$，$\Omega_1$分别是$\Lambda$，$\Omega$的可数无限子集。取$F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$，使得$F(x_\lambda\otimes y_\mu)=\delta_{\lambda\mu}u_1\otimes v_1$，$\lambda\in\Lambda_1$，$\mu\in\Omega_1$。由条件$H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')\cong H_R(M,\ M')\otimes H_S(N,\ N')$，可知存在$\sum_{k=1}^{n} f_k\overline{\otimes}g_k\in P$，使得$F=\sum_{k=1}^{n} f_k\overline{\otimes}g_k$，$f_k\in H_R(M,M')$，$g_k\in H_S(N,N')$，$k=1,\cdots,n$。

因此，$\sum_{k=1}^{n} f_k\overline{\otimes}g_k(x_\lambda\otimes y_\mu)=\delta_{\lambda\mu}u_1\otimes v_1$。设$f_k(x_\lambda)=\sum_{i\in I} r_{k\lambda i}u_i$，$g_k(y_\mu)=\sum_{i\in J} s_{k\mu i}v_i$，$r_{k\lambda i}\in R$，

$s_{k\mu j}\in S$，$k=1,\cdots,n$，$i\in I$，$j\in J$，于是$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} r_{k\lambda i}\otimes s_{k\mu j}u_i\otimes v_j=\delta_{\lambda\mu}u_1\otimes v_1$。因为$\{u_i\otimes v_j\mid i\in I,\ j\in J\}$是$M'\otimes N'$在$R\otimes S$上的基底，所以$\sum_{k=1}^{n} r_{k\lambda 1}\otimes s_{k\mu 1}=\delta_{\lambda\mu}$。为简便计，记$r_{k\lambda 1}$为$r_{k\lambda}$，$s_{k\mu 1}$为$s_{k\mu}$。先固定$1\leqslant\lambda\leqslant n+1$，取$\mu=1,2,\cdots,n+1$，得

$$\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n} r_{k\lambda}\otimes s_{k1}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n} r_{k\lambda}\otimes s_{kn+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{matrix}}\right\}\lambda,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} r_{k\lambda}\otimes 1\begin{pmatrix}1\otimes s_{k1}\\ \vdots\\ 1\otimes s_{kn+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{matrix}}\right\}\lambda.$$

等号右边的 0，1实际上是 $R\otimes S$ 中的零元和单位元。

$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ 是可除环 $R\otimes S$ 上 $n+1$ 维线性空间的一个基底，却由左边 $n$ 个元素 $\begin{pmatrix}1\otimes s_{k1}\\\vdots\\1\otimes s_{kn+1}\end{pmatrix}$ $k=1,\cdots,n$，生成，产生矛盾。因此 $M$、$N$ 至少有一个是有限维的。

(2)：设 $M$ 是 $R$ 上无限维的，$N'$ 是 $S$ 上无限维的，即 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{v_j\}_{j\in J}$ 是无限集。设 $\Lambda_1$，$J_1$ 分别是 $\Lambda$，$J$ 的可数无限子集。

取 $F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N,M'\otimes N')$，使得 $F(x_\lambda\otimes y_1)=u_1\otimes v_\lambda,\lambda\in\Lambda_1$。由条件存在 $\sum_{k=1}^n f_k\overline{\otimes}g_k\in P$，使得 $\sum_{k=1}^n f_k\overline{\otimes}g_k(x_\lambda\otimes y_1)=u_1\otimes v_\lambda$。设 $f_k(x_\lambda)=\sum_{i\in I}r_{k\lambda i}u_i$，$g_k(y_1)=\sum_{j=1}^K s_{kj}v_j$，对所有的 $g_k,k=1,\cdots,n$ 可取统一的正整数 $k$，$r_{k\lambda i}\in R$，$s_{kj}\in S$，$k=1,\cdots,n$，$i\in I$，$j=1,\cdots,k$。于是 $\sum_{k=1}^n f_k\overline{\otimes}g_k(x_\lambda\otimes y_1)=\sum_{k=1}^n\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^K r_{k\lambda i}\otimes s_{kj}\,u_i\otimes v_j=u_1\otimes v_\lambda$。因为 $\Lambda_1$ 是可数无限的，所以可取 $\lambda\in\Lambda_1$，使得 $\lambda>k$，那么 $\sum_{k=1}^n\sum_{i\in I}\sum_{j=1}^K r_{k\lambda i}\otimes s_{kj}\,u_i\otimes v_j$ 中没有 $u_1\otimes v_\lambda$ 这一项，发生矛盾。因此若 $M$ 是 $R$ 上无限维的，则 $N'$ 在 $S$ 上必是有限维的。

(3)设 $M$ 是 $R$ 上无限维的，$S$ 在 $K$ 上也是无限维的，即 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{s_\tau\}_{\tau\in\Gamma}$ 是无限集。设 $\Lambda_1$，$\tau_1$ 是 $\Lambda$，$\tau$ 的可数无限子集。

取 $F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')$，使得 $F(x_\lambda\otimes y_1)=u_1\otimes s_\lambda v_1$ $\lambda\in_1$。由条件存在 $\sum_{k=1}^n f_k\overline{\otimes}g_k=F\in P$，使得 $\sum_{k=1}^n f_k\overline{\otimes}g_k(x_\lambda\otimes y_1)=u_1\otimes s_\lambda v_1$。设 $f_k(x_\lambda)=\sum_{i\in I}r_{k\lambda i}u_i$，$g_k(y_1)=\sum_{j\in J}s_{kj}v_j$，$k=1,\cdots,n$，$r_{k\lambda i}\in R$，$s_{kj}\in S$，$\lambda\in\Lambda_1$，$i\in I$，$j\in J$。于是

$\sum_{k=1}^n f_k\overline{\otimes}g_k(x_\lambda\otimes y_1)=\sum_{k=1}^n\sum_{\substack{i\in I\\j\in J}}r_{k\lambda i}\otimes s_{kj}u_i\otimes v_j=1\otimes s_\lambda u_1\otimes v_1$，因此，$\sum_{k=1}^n r_{k\lambda 1}\otimes s_{k1}=1\otimes s_\lambda$。

可设 $s_{k1}=\sum_{h=1}^H a_{kh}s_h$，对所有的 $k=1,\cdots,n$，可取统一的正整数 $H$，$a_{kh}\in K,k=1,\cdots,n,h=1,\cdots,H$。这样，$\sum_{k=1}^n\sum_{h=1}^H a_{kh}r_{k\lambda 1}\otimes s_h=1\otimes s_\lambda$。因为 $\Lambda_1$ 是可数无限子集，所以可取 $\lambda>H$，因此发生矛盾。

所以，如果 $M$ 是 $R$ 上无限维的，那么 $S$ 在 $K$ 上必是有限维的。

由(1)，(2)，(3)知，若 $M$ 在 $R$ 上是无限维的，则 $N$，$N'$ 在 $S$ 上必是有限维的，并且 $S$ 在 $K$ 上也是有限维的，即 $N\otimes_K N'$ 在 $K$ 上是有限维的。

同样可证：如果 $N$ 在 $S$ 上是无限维的，则 $M\otimes_K M'$ 在 $K$ 上是有限维的。命题3到此证毕。

将命题1，2，3归纳起来，可写成下列定理。

**定理4.** 设$K$是域，$R$、$S$、$R\otimes S$都是$K$上可除代数，$M$、$M'$是$R$上线性空间，$N$、$N'$是$S$上线性空间，则

1. $H_R(M, M')\otimes H_S(N, N')\cong P$

2. $P\cong H_R(M, M')\otimes H_S(N, N')$在$H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$中稠密。

3. $H_R(M, M')\otimes H_S(N, N')\cong H_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$的充要条件是下述条件至少有一个成立：

i) $M$、$N$分别是$R$、$S$上有限维的；

ii) $N\underset{K}{\otimes}N'$在$K$上是有限维的；

iii) $M\underset{K}{\otimes}M'$在$K$上是有限维的。

当$R=S=K$并且$M,N,M',N'$都是$K$上有限维线性空间时，即得文〔4〕1.27的结果。

下面用$\mathscr{L}_R(M)$表示$R$上线性空间$M$的线性变换完全环。

**推论 5.** 设$K$是域，$R$、$S$、$R\otimes S$都是$K$上可除代数，$M$是$R$上线性空间，$N$是$S$上线性空间。则

1. $\mathscr{L}_R(M)\otimes\mathscr{L}_S(N)\cong P\equiv\left\{\sum_i f_i\overline{\otimes}g_i\in\mathscr{L}_{R\otimes S}(M\otimes N)\mid f_i\in\mathscr{L}_R(M),\ g_i\in\mathscr{L}_S(N),\right.$ $\left.\left(\sum_i f_i\overline{\otimes}g_i\right)(x\otimes y)=\sum_i f_i(x)\otimes g_i(x)\ \forall x\in M,\ y\in N\right\}$；

2. $\mathscr{L}_R(M)\otimes\mathscr{L}_S(N)\cong P$在$\mathscr{L}_{R\otimes S}(M\otimes N)$中稠密，

3. $\mathscr{L}_R(M)\otimes\mathscr{L}_S(N)\cong\mathscr{L}_{\otimes RS}(M\otimes N)$的充要条件是下述条件至少有一个成立：

i) $M$、$N$分别是$R$、$S$上有限维的；

ii) $N$是$S$上有限维的，$S$是$K$上有限维的；

iii) $M$是$R$上有限维的，$R$是$K$上有限维的。

**证**　在定理4中取$M'=M$，$N'=N$即得。

此推论在$R=S=K$的特殊情况即得〔3〕中第五章§3定理1.

下面用$M^*$表示$H_R(M,R)$，$N^*$表示$H_S(N,S)$，$(M\otimes N)^*$表示$H_{R\otimes S}(M\otimes N,R\otimes S)$.

**推论6.** 设$K$是域，$R$、$S$、$R\otimes S$都是$K$上可除代数，$M$、$N$分别是$R$、$S$上的线性空间。则

1. $M^*\otimes N^*\cong P\equiv\{\sum f_i\overline{\otimes}g_i\in(M\otimes N)^*\mid\sum f_i\overline{\otimes}g_i(x\otimes y)=\sum f_i(x)\otimes g_i(y),\ f_i\in M^*,$ $g_i\in N^*,\ \forall x\in M,\ y\in N\}$，

2. $M^*\otimes N^*\cong P$在$(M\otimes N)^*$中稠密，

3. $M^*\otimes N^*\cong(M\otimes N)^*$的充要条件是下述条件至少有一个成立：

i) $M$、$N$分别是$R$、$S$上有限维的，

ii) $N$在$S$上是有限维的，$S$在$K$上有限维的；

iii) $M$在$R$上是有限维的，$R$在$K$上是有限维的。

**证**　定理4中取$M'=R$，$N'=S$即得。

下面用$R_m$表示$R$上$m$维全阵代数。

**推论7.** 设$K$是域，$R$、$S$、$R\otimes S$都是$K$上可除代数，则$R_m\otimes S_n\cong(R\otimes S)_{mn}$.

**证** 定理4中取$M=M'$是$R$上$m$维线性空间，$N=N'$是$S$上$n$维线性空间，即得.

**推论8.** 设$K$是域，$M$是$K$上线性空间，$S$是$K$上可除代数．则$(\mathscr{L}_K(M))_S\cong\mathscr{L}_S(M_S)$的充要条件是：$M$、$S$至少有一个是$K$上有限维的.

这里$M_S\equiv M\otimes S$可看作$M$通过扩张算子区$K$到$S$得到的$S$上的线性空间.$(\mathscr{L}_K(M))_S\equiv\mathscr{L}_K(M)\otimes S$可看作$K$上线性空间$\mathscr{L}_K(M)$通过扩张算子区$K$到$S$得到的$S$上的线性空间.

**证** 在推论5中取$R=K,N=S$,得$\mathscr{L}_K(M)\otimes\mathscr{L}_S(S)\cong\mathscr{L}_{K\otimes S}(M\otimes S)$的充要条件是$M$、$S$至少有一个是$K$上有限维的，即$\mathscr{L}_K(M)\otimes S\cong\mathscr{L}_S(M\otimes S)$的充要条件是$M$、$S$至少有一个是$K$上有限维的.

在$S$是$K$的扩域的情况下即得〔3〕中第五章§3定理2.

**推论9.** 设$K$是域，$M$是$K$上线性空间，$S$是$K$上可除代数，则$(M^*)_S\cong(M_S)^*$的充要条件是$M$、$S$至少有一个是$K$上有限维的.

**证** 在推论6中取$R=K$, $N=S$，得$M^*\otimes S^*\cong(M\otimes S)^*$的充要条件是$M$、$S$至少有一个是$K$上有限维的，而$S^*\equiv H_S(S,\ S)\cong S$，因此结论成立.

## §1.2 可约模的张量积

我们用$H_R(M)$表示$R$模$M$的所有自同态所成的环．容易验证前面定义的从$H_R(M)\otimes H_S(N)$到$H_{R\otimes S}(M\otimes N)$中$K$模同态$\Phi$: $\sum f_i\otimes g_i\to\sum f_i\overline{\otimes}g_i$也是$K$上代数同态.

**引理10.** 设$K$是可换环，$A$、$B$是$K$上代数，$M$是不可约$A$模，$N$是不可约$B$模，中心化子分别是$R$、$S$．则对任意有限个点$z_1,\cdots,z_n\in M\otimes N$，对任意$F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N)$，都存在$\sum_{j=1}^{m}a_j\otimes b_j\in A\otimes B$，使$F(z_i)=\sum_{j=1}^{m}a_j\otimes b_j(z_i)\ i=1,\cdots,n$．反之，对任意$\sum_{j=1}^{m'}a'_j\otimes b'_j\in A\otimes B$，存在$F'\in H_{R\otimes S}(M\otimes N)$，使$\sum_{j=1}^{m'}a'_j\otimes b'_j(z_i)=F'(z_i),i=1,\cdots,n$. $a_j,a'_j\in A$, $b_j$, $b'_j\in B$.

**证** 由$R$、$S$是$K$上可除代数，知$M$、$N$分别是$R$、$S$上的自由模，$M\otimes N$也是$R\otimes S$上的自由模．设$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为$M$在$R$上的一组基底，$\{y_\mu\}_{\mu\in\Omega}$为$N$在$S$上的一组基底，则$\{x_\lambda\otimes y_\mu\}_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \mu\in\Omega}}$是$M\otimes N$在$R\otimes S$上的一组基底．对$M\otimes N$中任意有限个点$z_1,\cdots,z_n$，存在$\Lambda$、$\Omega$的有限子集$\Lambda_1$、$\Omega_1$，使得$z_1,\cdots,z_n$由$\{x_\lambda\otimes y_\mu\}_{\substack{\lambda\in\Lambda_1\\ \mu\in\Omega_1}}$生成．因此只要对有限基元$\{x_\lambda\otimes y_\mu\}_{\substack{\lambda\in\Lambda_1\\ \mu\in\Omega_1}}$验证结果即可.

由命题1，$P$在$H_{R\otimes S}(M\otimes N)$中稠密，因此对任意$F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N)$，存在$\sum_{i=1}^{m}f_i\overline{\otimes}g_i\in P$，使得$F(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum_{i=1}^{m}f_i\overline{\otimes}g_i(x_\lambda\otimes y_\mu)$，$\lambda\in\Lambda_1$，$\mu\in\Omega_1$．因为$M$是不可约$A$模，因此是忠实不可约$\overline{A}\equiv A/(0:M)$模(这里$(0:M)=\{a\in A\,|\,aM=0\}$)，由不可约模稠密性定理知，

$\overline{A}$在$H_R(M)$中稠密，同样$\overline{B}\equiv B/(0:N)$在$H_S(N)$中稠密，因此对$f_i\in H_R(M)$,存在$\overline{a}_i\in\overline{A}$，使得$\overline{a}_i x_\lambda=f_i(x_\lambda)$，$i=1,\cdots,m$，$\lambda\in\Lambda_1$,当然存在$a_i\in A$，使$a_i(mod(0:M))=\overline{a}_i$，$i=1,\cdots,m$。对$g_i\in H_S(N)$，同样存在$\overline{b}_i\in\overline{B}$，使得$\overline{b}_i y_\mu=g_i(y_\mu)$ $i=1,\cdots,m$，$\mu\in\Omega_1$，存在$b_i\in B$，使$b_i(mod(0:N))=\overline{b_i}$，$i=1,\cdots,m$。因此

$$F(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum_{i=1}^{n} f_i\overline{\otimes}g_i(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_\lambda)\otimes g_i(y_\mu)=\sum_{i=1}^{m}\overline{a_i}x_\lambda\otimes\overline{b_i}\,y_\mu=\sum_{i=1}^{m}a_i x_\lambda\otimes b_i\,y_\mu=$$
$$\sum_{i=1}^{m}a_i\otimes b_i(x_\lambda\otimes y_\mu),\quad\forall\lambda\in\Lambda_1,\ \mu\in\Omega_1.$$

另一方面，设$\sum\limits_{i=1}^{m'}a'_i\otimes b'_i\in A\otimes B$，$\sum\limits_{i=1}^{m'}a'_i\otimes b'_i(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum\limits_{i=1}^{m'}a'_i x_\lambda\otimes b'_i y_\mu=\sum\limits_{i=1}^{m'}\overline{a}'_i x_\lambda\otimes\overline{b}'_i y_\mu$，取$f'_i\in H_R(M)$，$g'_i\in H_S(N)$，$\ni f'_i(x_\lambda)=\overline{a}_i x_\lambda$，$g_i(y_\mu)=\overline{b}'_i y_\mu$，$i=1,\cdots,m'$，$\lambda\in\Lambda_1$，$\mu\in\Omega_1$，则

$$\sum_{i=1}^{m'}\overline{a}'_i x_\lambda\otimes\overline{b}'_i\,y_\mu=\sum_{i=1}^{m'}f'_i\otimes g'_i(x_\lambda\otimes y_\mu),$$

故取$F=\sum\limits_{i=1}^{n}f'_i\overline{\otimes}g'_i\in H_{R\otimes S}(M\otimes N)$即可。引理得证。

现在可以将 Azumaya-Nakayama 的关于不可约模的定理推广到基域是整环的情况。

**定理11.** 设$K$是可换环，$A$、$B$是$K$上代数，$M$、$N$分别是不可约$A$模、$B$模，中心化子分别是$R$、$S$，则

1. $M\otimes N$的$A\otimes B$子模的格与$R\otimes S$的右理想的格是格同构。
2. $A\otimes B$模$M\otimes N$的中心化子是$R\otimes S$。

**证1.** 因为$M\otimes N$是$R\otimes S$上的自由模，所以由[3]中第五章 §7 定理 1 的推论，$R\otimes S$的右理想的格与$M\otimes N$的$H_{R\otimes S}(M\otimes N)$—子模的格是格同构。现在证明$M\otimes N$的$A\otimes B$—子模就是$H_{R\otimes S}(M\otimes N)$—子模，反之亦然。

设$Z$是$M\otimes N$的$A\otimes B$—子模。对任意$z\in Z\subseteq M\otimes N$，任意$F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N)$，由引理10，存在$\sum\limits_{i=1}^{m}a_i\otimes b_i\in A\otimes B$，使得$F(z)=\left(\sum\limits_{i=1}^{m}a_i\otimes b_i\right)(z)\in Z$,因此$Z$也是$H_{R\otimes S}(M\otimes N)$—子模。

设$Z'$是$M\otimes N$的$H_{R\otimes S}(M\otimes N)$—子模。对任意$z'\in Z'\subseteq M\otimes N$，任意$\sum\limits_{i=1}^{m'}a'_i\otimes b'_i\in A\otimes B$，由引理 10，存在$F'\in H_{R\otimes S}(M\otimes N)$，使得$\left(\sum\limits_{i=1}^{m'}a'_i\otimes b'_i\right)(z')=F'(z')\in Z'$，因此$Z'$也是$A\otimes B$—子模。

所以$R\otimes S$右理想的格与$M\otimes N$的$A\otimes B$—子模的格是格同构。

2. 根据[3]中第五章 §7 定理 2 的推论可得，$R\otimes S$—模$M\otimes N$的中心化子的中心化子是$R\otimes S$,即$M\otimes N$作为$H_{R\otimes S}(M\otimes N)$—模的中心化子是$R\otimes S$.现在证明$A\otimes B$—模$M\otimes N$的中心化子$C=R\otimes S$。显然有$C\supseteq R\otimes S$，只要证明$C\subseteq R\otimes S$。

设$c\in C$，对任意$z\in M\otimes N$，任意$F\in H_{R\otimes S}(M\otimes N)$，存在$\sum_{i=1}^{m}a_i\otimes b\in A\otimes B$，使得$\sum_{i=1}^{m}a_i\otimes b_i(z)=F(z),\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\otimes b_i\right)(cz)=F(cz)$，这样，$F(cz)=\sum_{i=1}^{m}a_i\otimes b_i(cz)=c\left[\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\otimes b_i\right)(z)\right]=CF(z)$，这说明$c$属于$H_{R\otimes S}(M\otimes N)$—模$M\otimes N$的中心化子$R\otimes S$，即$C\subseteq R\otimes S$。

证毕。

**推论12.** 设$K$是可换环，$A$、$B$是$K$上代数，$M$、$N$分别是不可约$A$模、$B$模，中心化子分别是$R$、$S$，则

$M\otimes N$为不可约$A\otimes B$—模$\Leftarrow\Rightarrow R\otimes S$可除。

## §2.1 对偶模及其张量积

一般把$R$模的对偶模唯一地定义为$M^*\equiv Hom_R(M, R)$，而对可除环上的线性空间用非退化的双线性型来定义它的对偶空间。这里我们试对一般环模用非退化双线性型来定义它的对偶模。下面来讨论具有对偶模的环模的特征，对偶模与$M^*$的关系，对偶模的张量积，$M^*$与$N^*$的张量积。

**定义1.** 设$R$是有单位元的环，$M$是左$R$模，$M'$是右$R$模，$M\times M'$到$R$中的一个映射$\varphi$称为$M$和$M'$的双线性型，如果对任意$x$，$x_1$，$x_2\in M$，$x'$，$x_1',x_2'\in M'$，$r\in R$，有

(i)$\phi(x_1+x_2,x')=\phi(x_1,x')+\phi(x_2,x')$

(ii)$\phi(x,x_1'+x_2')=\phi(x,x_1')+\phi(x,x_2')$

(iii)$\phi(rx,x')=r\phi(x,x')$

(iv)$\phi(x,x'r)=\phi(x,x')r$。

双线性型称为非退化的，如果对任意$x\in M$，$\phi(x, x')=0$成立可推出$x'=0$；并如果对任意$x'\in M',\phi(x,x')=0$成立可推出$x=0$。有时记$\phi(x,x')$为$\langle x,x'\rangle$。

如果$M\times M'$上存在非退化的双线性型$\phi$，则称$(M,M')$是$R$上一对对偶模。

$M^*\equiv Hom_R(M,R)$可看成右$R$模，只要定义$(fr)(x)=f(x)r$，$f\in M^*$，$r\in R$，$x\in M$。因此$M^{**}\equiv Hom_R(M^*,R)$是左$R$模.对$x\in M,f\in M^*$,令$x^{**}: M^*\to R$使得$x^{**}(f)=f(x)\in R$，容易验证$x^{**}\in Hom_R(M^*,R)$。令$\sigma$：$M\to M^{**}$，使得$\sigma(x)=x^{**}$，于是$\sigma$是左$R$模同态，称为$M\to M^{**}$的自然映射，如果$\sigma$是单同态，称$M$是无挠模(Torsionless Module)，若$\sigma$是同构，称$M$是自反模(Reflexive Module)。

设$(M,M')$是关于非退化双线性型$\phi$的$R$上的一对对偶模。对每个固定的$x'\in M'$,记$f_{x'}(x)=\phi(x,x')\quad\forall x\in M$，显然$f_{x'}\in M^*\equiv Hom_R(M,R)$。而且易证$x'\to f_{x'}$是$M'$到$M^*$的右$R$模同态。若$f_{x'}=0$,则对任意$x\in M,0=f_{x'}(x)=\phi(x,x')$,由$\phi$的非退化性知$x'=0$。因此存在$M'$到$M^*$的单同态：$x'\to f_{x'}$，称为$M'$到$M^*$中的自然同构。因此在自然同构的意义下，$M'$可看成$M^*$的一个子模。

**命题13.** 设$M$是左$R$模，则存在右$R$模$M'$，使$(M,M')$是$R$上一对对偶模的充要条件是$M$为无挠模。

**证　必要性**　由无挠模的定义,只要证明$M\to M^{**}$的自然映射是单的,即对$\forall 0\neq x\in M$, $x^{**}\neq 0$。设$(M,M')$是$R$上关于非退化双线性型$\phi$的一对对偶模，对任意$0\neq x\in M$，由$\phi$的非退化性知，存在$x'\in M'$，使得$\varphi(x,x')\neq 0$，也就是存在$f_{x'}\in M^*$，使得$f_{x'}(x)=\varphi(x,x')\neq 0$，因此对$x^{**}\in M^{**}$，$x^{**}(f_{x'})=f_{x'}(x)\neq 0$，也即$x^{**}\neq 0$。这证明了$M\to M^{**}$关于$x\to x^{**}$的自然映射是单的，即$M$是无挠模。

**充分性**　设$M$是无挠左$R$模，则$M^*$是右$R$模。取$M'=M^*$，使得$\phi(x,f)=f(x)$，其中$x\in M$，$f\in M^*=M'$。容易验证$\phi$是$M\times M'\to R$的双线性型。于是只要证明$\phi$是非退化的。若$\phi(x,f)=f(x)=0$对任意$x\in M$成立，当然$f=0$。若$\phi(x,f)=f(x)=0$对任意$f\in M'=M^*$成立，如果$x\neq 0$，则由$M$是无挠模得$x^{**}\neq 0$，即存在$f\in M^*$，使$x^{**}(f)=f(x)\neq 0$，与上发生矛盾，因此$\phi$是非退化双线性型。故$(M,M')$是关于$\phi$的$R$上的一对对偶模。证毕。

**定义2.** 若$M$是无挠左$R$模，$M'$是$M^*$的子模，且对任意$0\neq x\in M$，都有$f\in M'$，使$f(x)\neq 0$，则称$M'$是$M^*$的全子模(Total Submodule)。

**命题14.** 若$M$是无挠左$R$模，$M'$是右$R$模，则$(M,M')$是$R$上一对对偶模的充要条件是$M'$自然同构于$M^*$的一个全子模。

**证　必要性**　设$(M,M')$是$R$上关于非退化双线性型$\phi$的对偶模，由上面知$M'$在自然同构：$x'\to f_{x'}\equiv\varphi(-,x')\in M^*$下与$M^*$的子模同构。由$\phi$的非退化性,对任意$0\neq x\in M$,存在$x'\in M'$，使得$f_{x'}(x)\equiv\varphi(x,x')\neq 0$。由$M^*$的全子模的定义，$M'$的自然同构象$\{f_{x'}\in M^*\mid\forall x'\in M'\}$是$M^*$的全子模。也就是说$M'$自然同构于$M^*$的一个全子模。

**证　充分性**　设$M'$是$M^*$的全子模。令$\phi(x,f)=f(x)$，这里$x\in M$，$f\in M'$。容易验证$\phi$是$M\times M'\to R$的双线性型。若$\phi(x,f)=f(x)=0$对任意$x\in M$成立，当然$f=0$，若$\phi(x,f)=f(x)=0$对任意$f\in M'$成立，则由全子模的定义$x=0$，因此$\phi$是$M\times M'\to R$的非退化双线性型。这说明$(M,M')$是$R$上关于$\phi$的一对对偶模。命题14得证，

**命题15.** 设$M$是左$R$模，则以下条件等价：

(1) $M$是无挠模；

(2) $(M,M^*)$是$R$上一对对偶模；

(3) $M$自然同构于$M^{**}$的一个全子模；

(4) 对$0\neq x\in M$，存在$f\in M^*$，使$f(x)\neq 0$；

(5) $M^*$具有全子模。

**证**　证明的顺序为(1)$\Longleftrightarrow$(4)$\Longleftrightarrow$(5)，(4)$\Longleftrightarrow$(2)$\Longleftrightarrow$(3)。

(1)$\Longleftrightarrow$(4)　$M$是无挠模$\Longleftrightarrow$自然映射$\sigma$：$M\to M^{**}$是单的$\Longleftrightarrow$当$0\neq x\in M$时，$\sigma(x)=x^{**}\neq 0\Longleftrightarrow$当$0\neq x\in M$时，存在$f\in M^*$，使$0\neq x^{**}(f)=f(x)\Longleftrightarrow$(4)。

(4)$\Longleftrightarrow$(5)　由$M^*$的全子模的定义，(4)$\Longleftrightarrow M^*$是$M^*$的全子模$\Longleftrightarrow M^*$具有全子模。

(4)$\Longleftrightarrow$(2)　(4)$\Longleftrightarrow M^*$是$M^*$全子模$\underset{\text{命题14}}{\Longleftrightarrow}(M,M^*)$是$R$上一对对偶模。

(2)$\Longleftrightarrow$(3)　因为对偶模的概念对两个模来说是对称的,所以命题14也可说成,$(M,M')$

是$R$上的一对对偶模的充要条件是$M$自然同构于$(M')^*$的全子模。因此$(M,M^*)$是$R$上一对对偶模$\Leftarrow\Rightarrow M$自然同构于$M^{**}$的一个全子模。证毕。

**命题16**. 设$R$是可除环，则下列条件等价：

(1) $M$是自反$R$模；

(2) $M$是有限生成的$R$模；

(3) $M$的每个子模是自反模；

(4) $M^{**}$只有本身是全子模；

(5) $M^*$只有本身是全子模。因此在同构的意义下$M$的对偶模是唯一的$M^*$。

**证** 证明的顺序是(1)⇒(2)⇒(3)⇒(1)，(2)⇒(4)⇒(1)，(2)⇐⇒(5)。

(1)⇒(2) 由$M$是自反模知，$M\to M^{**}$的自然映射$\sigma$：$x\to x^{**}$是同构。设$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$M$在$R$上的基底，则$\{x_\lambda^{**}\}_{\lambda\in\Lambda}$是$M^{**}$在$R$上的基底，因此$\dim M=\dim M^*$。而由[3]中第四章§4定理1，若$M$是无限维的，$\dim M<\dim M^*$，因此得$M$是有限维的。

(2)⇒(3) 因为$R$是可除环，所以由$M$是有限维的，得$M$的每个子模也是有限维的。而有限维线性空间是自反模。所以$M$的每个子模是自反模。

(3)⇒(1) 当然。

(2)⇒(4) 因为$R$可除，根据[3]中第四章§5定理1，得$M^{**}$的全子模就是$M^{**}$关于$M^*$的有限拓扑的稠密子模。而$M$是有限维的，于是$M^*$也是有限维的。因此$M^{**}$关于$M^*$有限拓扑的稠密子模就是$M^{**}$本身，也就是$M^{**}$的全子模只有$M^{**}$本身。

(4)⇒(1) 因为$M$在$M^{**}$中的自然映射象$\{x^{**}|\forall x\in M\}$是$M^{**}$的全子模，事实上，对$0\neq f\in M^*$，总存在$x\in M$，使$f(x)\neq 0$，这样$x^{**}(f)=f(x)\neq 0$。而$M^{**}$只有本身是全子模，所以自然映射$\sigma$：$M\to M^{**}$是满的。另一方面，因为$R$可除，$M$是$R$上的线性空间，对$0\neq x\in M$，当然有$f\in M^*$，使$f(x)\neq 0$，所以$x^{**}(f)=f(x)\neq 0$，即$x^{**}\neq 0$，也就是说$M\to M^{**}$的自然映射也是单的。

这样$\sigma$：$M\to M^{**}$是同构，因此$M$是自反模。

(2)⇒(5) 由于$M^*$的全子模就是$M^*$关于$M$的有限拓扑的稠密子模。而$M$是有限维的，所以$M^*$的稠密子模只有$M^*$本身。即$M^*$的全子模只有$M^*$本身。

(5)⇒(2) 设$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为$M$的一组基底，取$f_\lambda\in M^*$，使$f_\lambda(x_\mu)=\delta_{\lambda\mu}$，$\lambda$、$\mu\in\Lambda$，则$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$生成$M^*$的一个子模$M'$，易证$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$在$R$上线性无关，这样$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$M'$的一组基底，因此$\dim M=\dim M'$，但容易证明$(M, M')$是一对对偶模，所以$M'$是$M^*$的全子模，而$M^*$只有本身是全子模。这说明$M^*=M'$，因此$\dim M^*=\dim M'=\dim M$。若$M$是无限维的，则有$\dim M^*>\dim M$，发生矛盾。所以$M$是有限维的。命题16证明完毕。

因此对于一般无挠模来说，$M$的对偶模不一定是唯一的，只要同构于$M^*$的全子模就能作为$M$的对偶模。但对有限维线性空间$M$来说，在同构的意义下，$M$的对偶模唯一地等于$M$的共轭空间$M^*$。

**命题17** 设$K$是交换环，$R$、$S$是$K$上可除代数，若$(M, M')$是$R$上关于非退化双线性型$\langle\ ,\ \rangle_R$的一对对偶模，$(N, N')$是$S$上关于非退化双线性型$\langle\ ,\ \rangle_S$的一对对偶模，则$(M\otimes N, M'\otimes N')$是$R\otimes S$上关于双线性型

$\langle\sum_i \omega_i x_i\otimes y_i,\ \sum_j x'_j\otimes y'_j\omega'_j\rangle_{R\otimes S}=\sum_{i,j}\omega_i\langle x_i,\ x'_j\rangle_R\otimes\langle y_i,\ y'_j\rangle_S\omega'_j$的一对对偶模。其中$\omega_i$，$\omega'_j\in R\otimes S$，$x_i\in M$，$y_i\in N$，$x'_j\in M'$，$y'_j\in N'$，$\forall_i$，$\forall_j$。

**证**　只要证明双线性型$\langle\ ,\ \rangle_{R\otimes S}$是非退化的。对任意$\sum_{i=1}^n\omega_i x_i\otimes y_i\in M\otimes N$，可设$\{y_i\}_{i=1,\cdots,n}$是$N$在$S$上的基元，$0\neq x_i\in M$，$\omega_i\in R\otimes S$，$i=,\cdots,n$。假设$\langle\sum_{i=1}^n\omega_i x_i\otimes y_i,\ x'\otimes y'\rangle=0$对$\forall x'\otimes y'$，$\in M'\otimes N'$都成立。由命题14，$M'$，$N'$分别自然同构于$M^*$，$N^*$的全子模。由[3]中第四章§5定理1，$M^*$、$N^*$的全子模就是关于$M$、$N$的有限拓扑的稠密子模。因此可取$y'_j\in N'$，使$\langle y_i,y'_j\rangle=\delta_{ij}=\{\begin{smallmatrix}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{smallmatrix}$，可取$x'_j\in M'$，使$\langle x_i,\ x'_j\rangle=1$，$i$，$j=1,\cdots,n$。固定$1\leqslant j\leqslant n$，则$0=\langle\sum_{i=1}^n\omega_i x_i\otimes y_i,\ x'_j\otimes y'_j\rangle=\sum_{i=1}^n\omega_i\langle x_i,\ x'_j\rangle\otimes\langle y_i,\ y'_j\rangle=\omega_j$。也就是对所有的$1\leqslant j\leqslant n$都有$\omega_j=0$，因此$\sum_{i=1}^n\omega_i x_i\otimes y_i=0$。

由$\langle\ ,\ \rangle_R$，$\langle\ ,\ \rangle_S$的对称性，同样可证$\langle\ ,\ \rangle_{R\otimes S}$另一方面的非退化性。

由命题14立得

**推论18**　设$K$是交换环，$R$、$S$是$K$上可除代数，$M$是左$R$模，$N$是左$S$模。如果$M'$是$M^*$的全子模，$N'$是$N^*$的全子模，则$M'\otimes N'$是$(M\otimes N)^*$的全子模。

**推论19**　设$K$是域，$R$、$S$、$R\otimes S$都是$K$上可除代数，若$M'$、$N'$分别在$M^*$、$N^*$中稠密，则$M'\otimes N'$在$(M\otimes N)^*$中稠密。

**证**　根据[3]中第四章§5定理1，对于线性空间，它的共轭空间的稠密子空间与全子空间是一回事。所以由命题18即得。

**定理20**　设$K$是域，$M$、$N$分别是$R$、$S$上的投射模。$N$在$S$上有限生生成，$S$在$K$上有限生成，则$(M\otimes N)^*\simeq M^*\otimes N^*$

**证**　由命题2，可将$\Sigma f_i\otimes g_i\in M^*\otimes N^*$与$\Sigma f_i\overline{\otimes}g_i\in(M\otimes N)^*$视为同一，即可将$M^*\otimes N^*$看作$(M\otimes N)^*$的子模。设$\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为$M$在$R$上的生成系，$\{\beta_\mu\}_{\mu=1,\cdots,n}$为$N$在$S$上的生成系。取符号$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{y_\mu\}_{\mu=1,\cdots,n}$，$P_M$是以$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为基底的自由$R$模，$P_N$是以$\{y_\mu\}_{\mu=1,\cdots,n}$为基底的自由$S$模，则存在$R$模$M_1$，$S$模$N_1$，使$P_M=M\oplus M_1$，$P_N=N\oplus N_1$，由命题2，$P_M^*\otimes P_N^*$可看成$(P_M\otimes P_N)^*$的子模。

先来证明$(P_M\otimes P_N)^*=P_M^*\otimes_N^*$。设$S$在$K$上的基底为$s_1,\cdots,s_m$。任取$F\in(P_M\otimes P_N)^*$，设$F(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum_{i=1}^m\gamma_i^{\lambda\mu}\otimes s_i,\lambda\in\Lambda$，$\mu=1,\cdots,n$，$\gamma_i^{\lambda\mu}\in R$，取$f_{ji}\in P_M^*,g_{ji}\in P_N^*$，使$f_{ji}(x_\lambda)=\gamma_i^{\lambda j}$，$g_{ji}(y_\mu)=\delta_{j\mu}s_i$，$j=1,\cdots,n$，$i=1,\cdots,m$，$\lambda\in\Lambda$，$\mu=1,\cdots,n$。这样，$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(f_{ji}\otimes g_{ji})(x_\lambda\otimes y_\mu)=\sum_{i=1}^n\gamma_{\lambda i}^{\mu}\otimes s_i=F(x_\lambda\otimes y_\mu)$，$\lambda\in\Lambda$，$\mu=1,\cdots,m$。因此$F=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f_{ji}\otimes g_{ji}\in P_M^*\otimes P^*$，这说明$P_M^*\otimes P_N^*\supseteq(P_M\otimes P_N)^*$，故$P_M^*\otimes P_N^*=(P_M\otimes P_N)^*$，因为$(P_M\otimes P_N)^*=[(M\oplus M_1)\otimes(N\oplus N_1)]^*=[\bigoplus_{\substack{i\\j}=0,1}M_i\otimes N_j]^*=\bigoplus_{\substack{i\\j}=0,1}(M_i\otimes N_j)^*$，这里$M_0\equiv M$，$N_0\equiv N$。

而$P_M^*\otimes P_N^*=(M\oplus M_1)^*\otimes(N\oplus N_1)^*=(M^*\oplus M_1^*)\otimes(N^*\oplus N_1^*)=\bigoplus_{\substack{i\\j}=0,1}M_i^*\otimes N_j^*$。

因此，$\bigoplus_{\substack{i\\j}=0,1}(M_i\otimes N_j)^*=\bigoplus_{\substack{i\\j}=0,1}M_i^*\otimes N_j^*$。因为$K$是域，由命题2，$M_i^*\otimes N_j^*\subseteq(M_i\otimes N_j)^*$，$\substack{i\\j}=0,1$。

因此 $M_i^*\otimes N_j^*=(M_i\otimes N_j)^*$ $i=0,1$。取 $i=0$，$j=0$，即得 $M^*\otimes N^*=(M\otimes N)^*$。命题20得证。

## §2.2 张量积的一个充要条件

设 $K$ 是可换环，$(p,\varphi)$ 称 $K$ 模 $M$ 与 $K$ 模 $N$ 的乘积群是指 $P$ 是 $K$ 模，$\varphi$：$M\times N\to P$ 是双线性映射，$P$ 由 $\varphi$ 的象生成。

有时候根据能量积的定义很难判断 $K$ 模 $M$ 与 $N$ 的乘积群（$P,\varphi$）是否是 $M$ 与 $N$ 的张量积。我们知道当 $K$ 是域时，可以利用无关条件来判断。

无关条件：(1) 如果 $\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i,y_i)=0$，$x_i\in M$，$y_1,\cdots,y_n$ 是 $N$ 中 $K$ 上线性无关元，则 $x_i=0$，$i=1,\cdots,n$。

(2) 如果 $\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i,y_i)=0$，$x_1,\cdots,x_n$ 是 $M$ 中 $K$ 上线性无关元，$y_i\in N$，则 $y_i=0$，$i=1,\cdots,n$。

当 $K$ 是域时，若 $M$、$N$ 的积群 $(p,\varphi)$ 满足无关条件 (1)(或(2))，则 $(p,\varphi)$ 是 $M$ 与 $N$ 的张量积。

现在我们试来考虑较一般的情况，在这之前先证明一个引理。

设 $K$ 是整环，$M$ 是 $K$ 模，$N=\{x\in M\mid\exists 0\neq a\in K\ \ni ax=0\}$ 是 $M$ 的 $K$ 子模，如果 $N=\{0\}$，则 $M$ 叫非挠模 (torsion free module)。当 $K$ 是整环时，无挠 $K$ 模必定是非挠 $K$ 模。事实上，若有 $0\neq x\in M$，存在 $0\neq a\in K$，$\ni ax=0$。由于 $M$ 是无挠模，所以对这个 $x\neq0$，存在 $f\in M^*$，使 $f(x)\neq0$，而 $0=f(0)=f(ax)=af(x)$，但 $a\neq0$，$f(x)\neq0$ 与 $K$ 是整环矛盾。因此 $M$ 是非挠 $K$ 模。

**引理21** 非挠 $K$ 模 $M$ 与投射 $K$ 模 $N$ 的张量积 $M\otimes N$ 是非挠 $K$ 模。

**证** 设投射 $K$ 模 $N$ 是自由 $K$ 模 $F$ 的直和加项：$F=N\oplus N'$。可设 $F\cong\oplus K$。则 $M\otimes F\cong M\otimes(\oplus K)\cong\oplus M\otimes K\cong\oplus M$。因为 $M$ 是非挠 $K$ 模，所以 $\oplus M\cong M\otimes F$ 也是非挠 $K$ 模，而 $M\otimes F\cong M\otimes N\oplus M\otimes N'$，由于 $M\otimes N$ 同构于 $M\otimes F$ 的子模，故 $M\otimes N$ 也是非挠 $K$ 模。

**命题22** 设 $K$ 是整环，$M$ 是无挠 $K$ 模，$N$ 是投射 $K$ 模，则 $M$、$N$ 的乘积群 $(p_1,\otimes_1)$ 是 $M$ 与 $N$ 的张量积的充要条件是，若 $\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes_1 y_i=0$，$x_i\in A$，$y_1,\cdots,y_n$ 是 $N$ 中 $K$ 上线性无关元，则 $x_i=0$，$i=1,\cdots,n$。

**证 充分性** 设 $(p_1,\otimes_1)$ 是 $M$ 与 $N$ 的满足这个无关条件的积群，又设 $(p,\otimes)$ 是 $M$ 与 $N$ 的张量积，只要证明 $(p_1,\otimes_1)\cong(p,\otimes)$。由张量积的定义，存在 $K$ 同态 $f$：$p\to p_1$，使得 $f(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\otimes\beta_i)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\otimes_1\beta_i$，$\alpha_i\in M$，$\beta_i\in N$，$i=1,\cdots,m$，即交换图

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\otimes_1"] \arrow[d, "\otimes"'] & p_1 \\ p \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

成立。$f$ 显然是满同态，只要证明 $f$ 是单的。假设 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\otimes_1\beta_i=0$，来证 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\otimes\beta_i=0$。

设$\beta_1,\cdots,\beta_k$是$\{\beta_1\cdots,\beta_m\}$在$K$上极大线性无关组，则存在 $0\neq a_0\in k$，使$a_0\beta_1,\cdots,\beta_m$都由 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 生成，于是存在 $a_{ij}\in K$，使 $a_0\beta_i=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\beta_j$ $i=1,\cdots,m$。因此 $0=a_0\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\otimes_1\beta_i$ $=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\otimes_1\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\beta_j=\sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i)\otimes_1\beta_j$，由条件，$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i=0$，因此，$a_0\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\otimes\beta_i=$ $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\otimes\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\beta_j=\sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i)\otimes\beta_j=0$。因为$M$是无挠模，$K$是整环，因此 $M$ 是非挠 $K$ 模，而$N$是投射$K$模，由引理21，$M\otimes N$是非挠$K$模，因此$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\otimes\beta_i=0$，故 $f$ 是$p\to p_1$ 的单同态。

**证 必要性** 我们来构造一个满足这个无关条件的$M$与$N$的乘积群$(p',\otimes')$。由于$M$是无挠$K$模，根据命题13，存在$K$模 $M'$，使$(M', M)$是$K$上关于非退化纯量积$\langle,\rangle$ 的一对对偶模。令$\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes' y_i$: $x'\to\sum_{i=1}^{n}\langle x',x_i\rangle y_i$ 为 $M'$ 到$N$的线性映射，$x_i\in M$，$y_i\in N$，$i=1,\cdots,n$，$x'\in M'$。显然

$p'=\{\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes' y_i \mid \forall x_i\in M,\ y_i\in N\}$ 为$M$与$N$的一个乘积群。如果$\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes' y_i=0$，$x_i\in M$，$y_1\cdots,y_n$是$N$中$K$上的线性无关元，则对任意 $x'\in M'$，有

$\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes' y_i\ (x')=\sum_{i=1}^{n}\langle x',x_i\rangle y_i=0$。由于$y_1,\cdots,y_n$ 在$K$上线性无关，所以$\langle x',x_i\rangle=0$，对$\forall i$，$\forall x'\in M$。由$\langle,\rangle$的非退化性得 $x_i=0$，$\forall i$。所以 $(p', \otimes')$ 是满足这个无关条件的$M$与$N$的乘积群，根据已经证明的“充分性”，$(p', \otimes')$ 是$M$与$N$的张量积，由张量积的唯一性，$(p_1, \otimes_1)\cong(p', \otimes')$ 也满足这个无关条件。证毕。

**命题23** 设$K$是整环，$M$、$N$是投射$K$模，$(p, \otimes)$ 是$M$与$N$的乘积群，则下列三句话等价：

(1) $(p, \otimes)$是$M$与$N$的张量积。

(2) 如果$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\otimes\beta_i=0$，$\alpha_i\in M$，$\beta_1,\cdots,\beta_n$是$N$中$K$上的线性无关元，则可得$\alpha_i=0$，$i=1,\cdots,n$。

(3) 如果$\sum_{j=1}^{m}\gamma_j\otimes\delta_j=0$，$\gamma_1,\cdots,\gamma_m$是$M$中$K$上的线性无关元，$\delta_j\in N$，则可得$\delta_j=0$，$j=1,\cdots,m$。

**证** 只要证明投射模是无挠模。

设投射模$M$是$K$上自由模$F$的直和加项，$\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$F$的一组基底。

令 $f_\mu(x_\lambda)=\delta_{\lambda\mu}$，$\lambda$、$\mu\in\Lambda$，则 $f_\mu\in F^*$，$\mu\in\Lambda$。对任意 $0\neq x\in F$，设$x=\sum_{i=1}^{k}a_ix_i, 0\neq a_i\in K$，$i=1,\cdots,k$。则 $f_{\lambda_1}(x)=f_{\lambda_1}(\sum_{i=1}^{k}a_ix_{\lambda_i})=a_1\neq0$。这样，$x^{**}(f_{\lambda_1})=f_{\lambda_1}(x)\neq0$，因此 $x^{**}\neq0$，故$F$是无挠模，而$M$是$F$的子模，所以$M$也是无挠模。再由命题22即得所需要的结论。

## §2.3 环模对于自同态环的可迁性

我们知道对可除环$R$上的线性空间$M$来说，对任意$0\neq x\in M$，任意$y\in M$，都存在$f\in Hom_R(M,M)$，使$fx=y$，因此$M$对于自同态环具有可迁性，换句话说$M$是不可约$Hom_R(M,M)$模。下面我们对一般环模来讨论这种可迁性。为叙述方便，给出以下符号和定义

符号：设$R$是环，$M$是$R$模，记$R_M^*\equiv Hom_R(M,M)$，则$M$也是$R_M^*$模。$R_M^{**}\equiv(R_M^*)_M^*\equiv Hom_{R_M^*}(M,M)$。

**定义3** 如果忠实$R$模$M$是不可约$R_M^*$模，则$M$称为可迁模。

**命题24** 对于环$R$，以下条件等价

(a) $R$可除；

(b) 任意$R$酉模是可迁模；

(c) $R$本身作为$R$模是可迁模；

(d) 存在一个$R$上的自由模是可迁模。

**证** (a)⇒(b)⇒(c)⇒(d)显然 (d)⇒(a) 设$R$上自由模$M$是可迁模。设$0\neq r\in R$，只要证明$r$存在右逆元。若$x\in M$是$M$在$R$上的基元之一，则$rx\neq 0$。由于$M$是不可约$R_M^*$模，故存在$f\in R_M^*$，使$f(rx)=x$，即$rf(x)=x$。

设$f(x)=\sum_{i=1}^{n}r_ix_i$，这里$x_1,\cdots,x_n$是基元，$r_i\in R$。于是$r(r_1x_1+\cdots+r_nx_n)=x$。由$M$中元在基底上表示的唯一性知，存在$j$，使$x_j=x$，且$rr_j=1$。这就是说$R$中每个非零元有右逆，因此$R$可除。

**命题25** $M$是可迁模，则$R_M^*$是本原环。

**证** 由可迁模的定义，$M$是不可约$R_M^*$模，$R_M^*\equiv Hom_R(M,M)$是自同态环，当然$M$是忠实不可约$R_M^*$模，因此$R_M^*$是本原环。

**命题26** 环$R$上存在可迁模的充要条件是$R$能嵌入可除环。

**证** **必要性**设$R$上存在可迁模$M$，则忠实$R$模$M$是不可约$R_M^*$模，因此$M$作为$R_M^*$模的中心化子是可除环△。另一方面$R$显然包含在$R_M^*$模$M$的中心化子△中，因此$R$能嵌入可除环△。

**充分性** 设△是可除环，且$R\subseteq\triangle$。根据命题25，任一△模$M$是可迁模。也就是说，$M$是忠实△模，不可约$\triangle_M^*$模。因此$M$也是忠实$R$模。另一方面，由于$R\subseteq\triangle$，所以$Hom_R(M,M)\supseteq Hom_\triangle(M,M)$，即$R_M^*\supseteq\triangle_M^*$，因此$M$也是不可约$R_M^*$模。故$M$是$R$上可迁模。

**推论27** 若$R$是可除环△的子环，则任一△模作为是可模是可迁模。

**证** 由以上命题"充分性"的证明即得。

**推论28** 若$R$模$M$是可迁模，$R_1$是$R$的子环，则$M$作为$R_1$模也是可迁模。

**证** 由上命题"充分性"的证明即得。

**命题29** 设$M$是忠实$R$模，则$R_M^{***}=R_M^*$。

**证**　因为$R$包含在$M$作为$R_M^*$模的中心化子$R_M^{**}$里，即$R\subseteq R_M^{**}$，因此$R_M^*\supseteq R_M^{***}$。设$f\in R_M^*$，$\delta\in R_M^{**}$，$x\in M$，由于$R_M^{**}$是$R_M^*$模$M$的中心化子，因此$\delta(fx)=f(\delta x)$，这说明$f\in Hom_{R_M^{**}}(M,M)\equiv R_M^{***}$，即$R_M^*\subseteq R_M^{***}$。

**定义4**　设环$R$能嵌入可除环，则所有包含环$R$的可除环的交$\triangle$是可除环。称$\triangle$为$R$的可除包络。

**命题30**　设$R$能嵌入可除环$K$，则任意$K$模$M$作为$R$模的中心化子的中心化子是$R$的可除包络$\triangle$。

**证**　由推论27，任意$K$模$M$作为$R$模是可迁模，即$M$是不可约$R_M^*$模，因此$R_M^*$模$M$的中心化子$R_M^{**}$是可除环，并且$R_M^{**}\supseteq R$，因此$R_M^{**}\supseteq\triangle$。由$R\subseteq\triangle$，得$R_M^*\supseteq\triangle_M^*$，又推得$R_M^{**}\subseteq\triangle_M^{**}$。只要证明$\triangle_M^{**}=\triangle$就行了。因为$\triangle$是可除环，$M$是$\triangle$上自由模，由[3]中第五章§7定理2的推论，$\triangle$上自由模的中心化子的中心化子是$\triangle$，即$\triangle_M^{**}=\triangle$，因此$R_M^{**}=\triangle$

**推论31**　设$R$是可除环$\triangle$的子环，若$R$上存在一个自由模$M$也是$\triangle$模，则$R$可除。

**证**　由推论27　$\triangle$模作为$R$模是可迁模，由命题24。$R$上自由模$M$可迁，因此$R$可除。

**推论32**　设$R$能嵌入可除环，$\triangle$是$R$的可除包络，则对任一$\triangle$模$M$，当$M$作为$\triangle$模和$R$模时其中心化子相等，即$\triangle_M^*=R_M^*$。

**证**　由题30，$M$作为$R$模时其中心化子的中心化子是$\triangle$，即$R_M^{**}=\triangle$。因此$R_M^{***}=\triangle_M^*$。由命题29，$R_M^{***}=R_M^*$，故有$R_M^*=\triangle_M^*$。

## 参　考　文　献


[1] 周伯壎，左环模的张量积及其范畴，南京大学学报，(1979)，1—20，(自然科学版)。

[2] 周伯壎，左模的张量积及其同调维数，数学研究与评论，1981年创刊号，17—24。

[3] Jacobson, Structure of Rings, 1956.

[4] Greub, Multilinear Algebra, 2nd edition 1978.

# On the Tensor Product of Left Modules and Their Linear Mapping

*By Liu Yingsheng* (刘迎胜)


## Abstract

Let K be a commutative ring, R and S be K-rings, M and M′ be R-modules, N and N′ be S-modules. In §1.1, we considered the relation between $\mathrm{Hom}_R(M,M')\otimes\mathrm{Hom}_S(N,N')$ and $\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(M\otimes N, M'\otimes N')$. In §1.2, we consider the special case that $M=M'$ and $N=N'$, then we extend the theorem of Azumaya-Nakayama on the tensor product of irreducible modules over a field to that over an integral domain. In §2.1, we establish the concept of dual modules and their tensor product by non-degenerate bilinear forms, and then we obtain another sufficient condition for $M^*\otimes N^*\cong(M\otimes N)^*$. In §2.2, we abtain a nasc for a module being tensor product. In §2.3, we consider the transitivity of ring modules with respect to their automorphism rings, define the concept o transitive modules and prove some properties.