关于线性赋范空间的三个几何参数*

阴洪生

（浙江大学）

利用几何参数来讨论Banach空间的性质是Banach空间的几何结构理论的一个方面。本文的目的是研究Banach空间的矩形常数μ[4]、偏倚度Δ[7]和均匀度J[9]与空间性质之间的一些关系。

本文只讨论实线性赋范空间，并且总假设空间的维数不小于2．先给出一些记号和定义。

设X是一个线性赋范空间，X的单位球是$U(X)\equiv\{x\in X: \|x\|\leqslant 1\}$，$X$的单位球面是$S(X)\equiv\{x\in X: \|x\|=1\}$。

定义1. 设X和Y是同构的线性赋范空间，则X和Y的Banach-Mazur距离[5;§6]是

$$d(X,Y)\equiv inf\{\log\|T\|\|T^{-1}\|;\ T\text{是}X\text{到}Y\text{上的同构}\}.$$

函数$d(X,Y)$具有下列性质：设X、Y和Z是同构的空间，则

Ⅰ. $d(X,X)=0$;

Ⅱ. $d(X,Y)=d(Y,X)\geqslant 0$;

Ⅲ. $d(X,Y)+d(Y,Z)\geqslant d(X,Z)$.

和X同构的线性赋范空间的全体所组成的同构类记为$\mathbf{X}$。特别，如果$dimX=n$，将$\mathbf{X}$记为$\mathbf{X}^{(n)}$。

线性赋范空间X和Y称为是等距同构的(记为$X\cong Y$)，如果存在X到Y上的同构T满足$\|T\|=\|T^{-1}\|=1$。

为避免记号复杂化，将所有和X等距同构的空间都看成是X，即将同构类$\mathbf{X}$中对于等距同构关系$\cong$的等价类用其中任意一个代表元素来表示。并将$\mathbf{X}$按关系$\cong$所分解成的商集仍记为$\mathbf{X}$。这样，上面$d(X,Y)$的性质Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ表明$d(\cdot,\cdot)$是$\mathbf{X}$上的拟距离(即$d(X,Y)=0$不必蕴涵$X\cong Y$)，$\mathbf{X}$由于拟距离$d(\cdot,\cdot)$而成为拟距离空间。特别，$d(X,Y)$是$\mathbf{X}^{(n)}$上的距离（即$d(X,Y)=0$蕴涵$X\cong Y$)，而$\mathbf{X}^{(n)}$是一个紧距离空间（[5;§6]）。下面将多次用到这一事实。

设$x,y\in X$，称x正交于y（记为$x\perp y$)，如果$\|x\|\leqslant\|x+\lambda y\|\ \forall\lambda\in R$。

定义2. 设X是线性赋范空间，定义

*1980年12月25日收到。

矩形常数[4] $\mu(X)\equiv\sup\limits_{x\perp y}\dfrac{\|x\|+\|y\|}{\|x+y\|}$；

偏倚度[7] $\Delta(X)\equiv\sup\limits_{\substack{x,y\in S(X)\\0<t<1}}\left\{\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|-\|tx+(1-t)y\|\right\}$；

均匀度[9] $J(X)\equiv\sup\limits_{x\in S(X)}\sup\limits_{y\in S(X)}\{\min[\|x+y\|,\ \|x-y\|]\}$.

由[7]可知：(i) $0\leqslant\Delta(X)\leqslant 3-2\sqrt{2}$；(ii) $\dim X=2$ 时 $\Delta(X)=3-2\sqrt{2}$ 当且仅当 $X\simeq l_\infty^2$；(iii) $\Delta(\cdot)$ 是**X**上的连续函数。(这里 l_∞^2 即2维线性空间$\mathbf{R}^2$赋以范数$\|(a,b)\|=\max\{|a|,|b|\}$。)

由[9]可知：(i) $\sqrt{2}\leqslant J(X)\leqslant 2$；(ii) $dim X=2$时，$J(X)=2$当且仅当$X\simeq l_\infty^2$；(iii) $J(X)$也是**X**上的连续函数。

由[4]可知：(i) $\sqrt{2}\leqslant\mu(X)\leqslant 3$；(ii) $\dim X=2$ 时，$\mu(X)=3$ 当且仅当 $X\simeq l_\infty^2$。

下面先证明$\mu(X)$具有类似于$\Delta(X)$和$J(X)$的性质(iii)。为此，我们引用 Bishop-Phelps 定理的一种推广形式如下。

引理1. 设 $x\in S(X)$，$f\in S(X^*)$，$|f(x)-1|\leqslant\dfrac{\varepsilon^2}{2}$，$0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$，则存在 $y\in S(X)$ 和 $g\in S(X^*)$，使得 $g(y)=1$，$\|f-g\|\leqslant\varepsilon$ 和 $\|x-y\|<\varepsilon+\varepsilon^2$。

证明见[1]。

引理2. 设X和Y是同构的线性赋范空间，$T: X\to Y$是同构，$\|T\|=1$，$\|T^{-1}\|\leqslant 1+\varepsilon^2$，$0<\varepsilon<\dfrac{1}{3}$。如果 $x_1,x_2\in S(X)$，$x_1\perp x_2$，则有 $y_1,y_2\in S(Y)$，$y_1\perp y_1$，使得 $\|Tx_1-y_1\|\leqslant 5\varepsilon$，$\|Tx_2-y_2\|\leqslant 5\varepsilon$。

证明. 由于 $x_1\perp x_2$，故由正交性的定义易知 x_1 到 $span\{x_2\}$的距离等于 $\|x_1\|=1$。由 Hahn-Banach定理，有 $f\in S(X^*)$使 $f(x_1)=1$，$f(x_2)=0$，fT^{-1} 定义了Y上的一个连续线性泛函。由于

$$1-\varepsilon^2<\frac{1}{1+\varepsilon^2}\leqslant\frac{1}{\|T^{-1}\|}\leqslant\|Tx_i\|\leqslant 1,\quad i=1,2, \tag{1}$$

和

$$1=f(x_1)=(fT^{-1})(Tx_1)\leqslant\|fT^{-1}\|\|Tx_1\|\leqslant\|T^{-1}\|\leqslant 1+\varepsilon^2,$$

可得

$$1-\varepsilon^2<\frac{1}{1+\varepsilon^2}\leqslant\frac{1}{\|fT^{-1}\|\|Tx_1\|}=\left(\frac{fT^{-1}}{\|fT^{-1}\|}\right)\left(\frac{Tx_1}{\|Tx_1\|}\right)\leqslant 1.$$

因此

$$\left|\left(\frac{fT^{-1}}{\|fT^{-1}\|}\right)\left(\frac{Tx_1}{\|Tx_1\|}\right)-1\right|<\varepsilon^2,$$

应用引理1知有 $y_1\in S(Y)$和 $g\in S(Y^*)$使$g(y_1)=1$，以及

$$\left\|\frac{fT^{-1}}{\|fT^{-1}\|}-g\right\|\leqslant\sqrt{2}\,\varepsilon,\qquad\left\|\frac{Tx_1}{\|Tx_1\|}-y_1\right\|<\sqrt{2}\,\varepsilon+2\varepsilon^2. \tag{2}$$

根据范数的定义，$\left|\left(\frac{fT^{-1}}{\|fT^{-1}\|}-g\right)(Tx_2)\right|\leqslant\sqrt{2}\varepsilon$。但是 $(fT^{-1})(Tx_2)=f(x_2)=0$，故 $|g(Tx_2)|\leqslant\sqrt{2}\varepsilon$。设 $g(Tx_2)=c$，则 $g(Tx_2-cy_1)=0$。下面验证 $Tx_2-cy_1\neq0$。当 $c=0$ 时，因 T 是 1—1 的，故 $Tx_2-cy_1=Tx_2\neq0$。当 $c\neq0$ 时，假如 $Tx_2-cy_1=0$，则 $fT^{-1}(Tx_2-cy_1)=0$，于是 $fT^{-1}y_1=0$。由(1)和(2)有

$$1\leqslant\frac{1}{\|Tx_1\|}=fT^{-1}\left(\frac{Tx_1}{\|Tx_1\|}\right)=fT^{-1}\left(\frac{Tx_1}{\|Tx_1\|}-y_1\right)\leqslant\|T^{-1}\|\left\|\frac{Tx_1}{\|Tx_1\|}-y_1\right\|$$

$$\leqslant(1+\varepsilon^2)(\sqrt{2}\varepsilon+2\varepsilon^2)\leqslant\frac{80}{81},$$

矛盾。所以可以令 $y_2=\frac{Tx_2-cy_1}{\|Tx_2-cy_1\|}$。这样，$g(y_2)=0$。由 $\|y_1\|=g(y_1+\lambda y_2)\leqslant\|y_1+\lambda y_2\|$ $\forall\lambda\in\mathbf{R}$ 知 $y_1\perp y_2$。最后，由(1)和(2)得

$$\|Tx_1-y_1\|\leqslant\left\|Tx_1-\frac{Tx_1}{\|Tx_1\|}\right\|+\left\|\frac{Tx_1}{\|Tx_1\|}-y_1\right\|\leqslant|1-\|Tx_1\||+\sqrt{2}\varepsilon+2\varepsilon^2\leqslant5\varepsilon.$$

由于

$$1-\varepsilon^2-\sqrt{2}\varepsilon\leqslant\|Tx_2\|-|c|\leqslant\|Tx_2-cy_1\|\leqslant\|Tx_2\|+|c|\leqslant1+\sqrt{2}\varepsilon,$$

得

$$\|Tx_2-y_2\|\leqslant\|Tx_1-(Tx_2-cy_1)\|+\left\|(Tx_2-cy_1)-\frac{Tx_2-cy_1}{\|Tx_2-cy_1\|}\right\|$$

$$\leqslant\sqrt{2}\varepsilon+|1-\|Tx_2-cy_1\||\leqslant\sqrt{2}\varepsilon+\varepsilon^2+\sqrt{2}\varepsilon\leqslant5\varepsilon.$$ 证毕。

为了叙述上的方便，下面再证明 $\mu(X)$ 的一个等价定义。

引理3.
$$\mu(X)=\sup_{\substack{x,y\in S(X)\\x\perp y\\0\leqslant t\leqslant10}}\frac{1+t}{\|x+ty\|}.$$

证明. 记 $\sup\left\{\frac{1+t}{\|x+ty\|}:\ x,y\in S(X),x\perp y,0\leqslant t\leqslant10\right\}=\lambda$。因 $x\perp ty$，故 $\lambda\leqslant\mu(X)$。反之，任取 $\varepsilon,0<\varepsilon<0.1$。由 $\mu(X)$ 的定义，有 $x,y\in X,x\perp y$，使 $\mu(X)-\varepsilon\leqslant\frac{\|x\|+\|y\|}{\|x+y\|}$

由 $\mu(X)\geqslant\sqrt{2}$ 知 $x\neq0,y\neq0$。令 $x'=\frac{x}{\|x\|}$，$y'=\frac{y}{\|y\|}$，则仍有 $x'\perp y'$。令 $t=\frac{\|y\|}{\|x\|}$，易验证 $\frac{\|x\|+\|y\|}{\|x+y\|}=\frac{\|x'\|+\|ty'\|}{\|x'+ty'\|}$。如果 $t>10$，则由三角不等式有

$$\sqrt{2}-\varepsilon\leqslant\mu(X)-\varepsilon\leqslant\frac{1+t}{\|x'+ty'\|}\leqslant\frac{1+t}{\|ty'\|-\|x'\|}=\frac{1+t}{t-1}<1.3,$$ 与 $0<\varepsilon<0.1$

矛盾。所以 $t\leqslant10$。由 λ 的定义和 ε 可任意小即得 $\mu(X)\leqslant\lambda$。 证毕。

定理1. $\mu(\cdot)$对于拟距离$d(\cdot,\cdot)$是$\mathbf{X}$上的连续函数.

证明. 对任意ε,$0<\varepsilon<1$,令 $c=\log\left[1+\left(\frac{\varepsilon}{165}\right)^2\right]$. 下面证明对任意两个同构的空间$X$和$Y$,只要$d(X,Y)\leqslant\frac{c}{2}$就有$|\mu(X)-\mu(Y)|\leqslant\varepsilon$.因为$d(X,Y)\leqslant\frac{c}{2}$,由定义1,有同构$T$:$X\to Y$使$\log\|T\|\|T^{-1}\|\leqslant c$,故$\|T\|\|T^{-1}\|\leqslant 1+\left(\frac{\varepsilon}{165}\right)^2$. 显然可假设$\|T\|=1$,$\|T^{-1}\|\leqslant 1+\left(\frac{\varepsilon}{165}\right)^2$.令$\eta=\frac{\varepsilon}{165}$.对任意$x_1,x_2\in S(X)$,$x_1\perp x_2$,由引理2,有$y_1,y_2\in S(Y)$,$y_1\perp y_2$,使$\|Tx_1-y_1\|\leqslant 5\eta$,$\|Tx_2-y_2\|\leqslant 5\eta$. 设$0\leqslant t\leqslant 10$,由于

$$\|x_1+tx_2\|\geqslant\|Tx_1+tTx_2\|\geqslant\|y_1+ty_2\|-\|Tx_1-y_1\|-t\|Tx_2-y_2\|\geqslant\|y_1+ty_2\|-55\eta,$$

故由引理3得(注意$\|x_1+tx_2\|\geqslant\|x_1\|=1$)

$$\mu(X)=\sup_{\substack{x_1,x_2\in S\,X\\ x_1\perp x_2\\ 0\leq t\leq 10}}\frac{1+t}{\|x_1+tx_2\|}=\sup_{\substack{x_1,x_2\in S\,X\\ x_1\perp x_2\\ 0\leq t\leq 10}}\frac{1+t}{\|y_1+ty_2\|}\cdot\frac{\|y_1+ty_2\|}{\|x_1+tx_2\|}$$

$$\leqslant\frac{1+t}{\|y_1+ty_2\|}(1+55\eta)\leqslant\mu(Y)(1+55\eta).$$

显然,如果令$S=\frac{T^{-1}}{\|T^{-1}\|}$,则$S:Y\to X$是同构,$\|S\|=1$,$\|S^{-1}\|=\|T\|\|T^{-1}\|\leqslant 1+\left(\frac{\varepsilon}{165}\right)^2$.重复上面的论证可得$\mu(Y)\leqslant\mu(X)(1+55\eta)$. 由于$\mu(X)\leqslant 3$,故

$$|\mu(X)-\mu(Y)|\leqslant 165\eta\leqslant\varepsilon. \quad 证毕.$$

综合上面$\mu(\cdot)$、$\Delta(\cdot)$和$J(\cdot)$的性质(i)、(ii)、(iii),我们引进下面定义.

定义3. 称$\varphi(\cdot)$是线性赋范空间的抽象参数,如果对任意空间X,φ:$X\to\varphi(X)\in\mathbf{R}$适合$X\cong Y$时$\varphi(X)=\varphi(Y)$.

φ称为(对于Banach-Mazur距离$d(\cdot,\cdot)$)是连续的,如果对每一个同构类$\mathbf{X}$,φ都是$\mathbf{X}$上的连续函数.

φ称为单调上升的,如果M是X的子空间时$\varphi(X)\geqslant\varphi(M)$.

φ称为是单调上升和n维的,如果$\varphi(X)=\sup\{\varphi(M):M$是$X$的$n$维子空间$\}$.

φ称为是矩形的,如果$\dim X=2$时$\varphi(X)\leqslant\varphi(l_\infty^2)$,并且$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$当且仅当$X\cong l_\infty^2$.

容易看出,$\mu(\cdot)$、$\Delta(\cdot)$和$J(\cdot)$都是连续的单调上升和2维的矩形参数. 下面来讨论具这些性质的参数与空间的性质的一些关系. 相仿地可定义单调下降的参数并得到对应的结果. 为节省篇幅,从略.

定理2. 设φ是连续的单调上升和二维的矩形参数,则$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$当且仅当$X$有二维子空间列$\{X_k\}_{k=1}^\infty$使$\lim\limits_{k\to\infty}d(X_k,l_\infty^2)=0$.

证明．必要性． 设$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$．由于$\varphi$是单调上升和二维的，$\varphi(X)=\sup\{\varphi(M):M$是$X$的2维子空间$\}$．由上确界的定义，$X$有2维子空间列$\{X_k\}_{k=1}^\infty$使$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(X_k)=\varphi(X)$．由于$\mathfrak{X}^{(2)}$是紧距离空间，无穷序列$\{X_k\}_{k=1}^\infty$有收敛的子列$\{X_{k_i}\}_{i=1}^\infty$．设$X_{k_i}\xrightarrow{d}X_0\in\mathfrak{X}^{(2)}$由$\varphi$的连续性，

$$\varphi(X_0)=\lim_{i\to\infty}\varphi(X_{k_i})=\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2).$$

由于φ是矩形的和$\dim X_0=2$，故$X_0\cong l_\infty^2$．而$\{X_{k_i}\}_{i=1}^\infty$即所求的X的2维子空间列．

充分性． 设X的2维子空间列$\{X_k\}_{k=1}^\infty$使得$\lim\limits_{k\to\infty}d(X_k,l_\infty^2)=0$．由$\varphi$的连续性，$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(X_k)=\varphi(l_\infty^2)$．由于$\varphi$是单调上升和2维的，$\varphi(X)=\sup\{\varphi(M:M$是$X$的2维子空间$\}\geqslant\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(X_k)=\varphi(l_\infty^2)$；但$\varphi$还是矩形的，$\varphi(X)=\sup\{\varphi(M)\}\leqslant\varphi(l_\infty^2)$．因此$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$．　证毕．

定理3． 设$\dim X<\infty$，$M^{(n)}(X)$是X的所有n维子空间的集合，则$M^{(n)}(X)$是$\mathfrak{X}^{(n)}$中的紧集．

证明． 由于$\mathfrak{X}^{(n)}$是紧距离空间，因此只要证明：$\{X_k\}_{k=1}^\infty\subset M^{(n)}(X),\lim\limits_{k\to 1}d(X_k,Y)=0$蕴涵$Y\in M^{(n)}(X)$，即$Y$与$X$的某$n$维子空间等距同构．不妨设$d(X_k,Y)=\varepsilon_k$是单调下降到0的（不然就考察$\{X_k\}$的某个子列）．令$e^{2\varepsilon_k}=1+\eta_k$．由$d(X_k,Y)$的定义，存在$Y$到$X_k$上的同构算子$T_k$适合

$$T_k:\ Y\to X_k\subset X,\ \|T_k\|=1,\ \|T_K^{-1}\|\leqslant 1+\eta_k.$$

因为$\dim Y<\infty$，Y是可分的．设$\{y_j\}_{j=1}^\infty$是Y的稠子集．对于每个j，$\{T_k y_j\}_{k=1}^\infty$是X中的有界序列．由于$\dim X<\infty$，X是局部紧的，故$\{T_k y_j\}_{k=1}^\infty$中总可选出一个收敛的子序列．应用通常的对角线过程，即知$\{T_k\}_{k=1}^\infty$中可以选出一个子序列$\{T_{k_i}\}_{i=1}^\infty$，使得$\{T_{k_i}y_j\}_{i=1}^\infty$对一切$j$都收敛．由Banach-Steinhaus定理，存在线性有界算子$T:Y\to X$，使得$Ty=\lim\limits_{i\to\infty}T_{k_i}y\quad\forall y\in Y$，并且$\|T\|\leqslant\lim\limits_{i\to\infty}\|T_{k_i}\|=1$．因此$\|Ty\|\leqslant\|y\|$．又因为$\|T_{k_i}y\|\geqslant\|T_{k_i}^{-1}\|^{-1}\|y\|\geqslant(1+\eta_{k_i})^{-1}\|y\|$，令$i\to\infty$，得$\|Ty\|\geqslant\|y\|$．所以$\|Ty\|=\|y\|$对于一切$y\in Y$成立．这表明$T$是$Y$到$X$的某子空间上的等距同构．　证毕．

定理3在$\dim X=\infty$时不成立．这可由下面的定理5看出．

推论． 设φ是连续的单调上升和2维的矩形参数，$\dim X<\infty$，则$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$当且仅当$X$有2维子空间等距同构于$l_\infty^2$．

定理4． 设X是一致凸空间，$\{X_k\}_{k=1}^\infty$是X的互相同构的子空间列，$\lim\limits_{k\to\infty}d(X_k,Y)=0$，则$Y$也是一致凸空间．

证明． 众所周知，一空间X的凸性模[2]是$\delta_X(\varepsilon)\equiv\inf\left\{1-\left\|\dfrac{x_1+x_2}{2}\right\|:\|x_1\|=\|x_2\|=1\right.$ $\left.\|x_1-x_2\|=\varepsilon\right\}\quad(0<\varepsilon\leqslant 2)$

$$=\inf\left\{1-\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\|:\ \|x_1\|\leqslant 1,\|x_2\|\leqslant 1,\|x_1-x_2\|\geqslant\varepsilon\right\}.$$

X是一致凸的当且仅当$\delta_X(\varepsilon)>0$对一切$\varepsilon>0$成立．现设$0<\varepsilon\leqslant 2$已固定．因X是一致凸

的，$\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)>0$. 取$k$充分大，使$d(X_k,Y)<\frac{1}{2}\log\left[1+\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$. 由$d(X_k,Y)$的定义，有$Y$到$X_k$上的同构$T$使$\|T\|=1$，$\|T^{-1}\|<1+\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. 对任意$y_1$，$y_2\in S(Y)$，$\|y_1-y_2\|=\varepsilon$，令$x_i=Ty_i$，则$\|x_i\|\leqslant 1$，$i=1,2$，$\|x_1-x_2\|\geqslant\|T^{-1}\|^{-1}\|y_1-y_2\|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 因此$1-\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\|\geqslant\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. 由于$\|y_1+y_2\|\leqslant\|T^{-1}\|\|x_1+x_2\|$，并注意到$\|T\|=1$时必有$\|T^{-1}\|\geqslant 1$以及$\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\|\leqslant 1$，得

$$1-\left\|\frac{y_1+y_2}{2}\right\|\geqslant 1-\|T^{-1}\|\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\|=1-\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\|-(\|T^{-1}\|-1)\left\|\frac{x_1+x_2}{2}\right\|$$
$$\geqslant\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-(\|T^{-1}\|-1).$$

由于$y_1,y_2\in S(Y)$，$\|y_1-y_2\|=\varepsilon$是任意的，故由凸性模定义得$\delta_Y(\varepsilon)\geqslant\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-(\|T^{-1}\|-1)>0$. 既然$0<\varepsilon<2$是任意的，$Y$是一致凸的。 证毕。

推论. 设φ是连续的单调上升和2维的矩形参数，X是一致凸空间，则$\varphi(X)<\varphi(l_\infty^2)$.

证明. 由定理2和定理4以及l_∞^2不一致凸而得。 证毕。

下面需要所谓的超自反[2]空间的概念. 首先给出它的定义：

假设Y和X是赋范空间. 如果对每一$0<\varepsilon<1$和Y的每个有限维子空间M，存在M到X中的同构T，使得$(1-\varepsilon)\|m\|\leqslant\|Tm\|\leqslant(1+\varepsilon)\|m\|$对一切$m\in M$成立，则称$Y$在$X$中可以有限地表示.如果在一个Banach空间$X$中可以有限地表示的每个Banach空间$Y$都是自反的，则$X$称为是超自反的. 显然，超自反空间是自反的. 超自反空间最典型的特征是：X是超自反的当且仅当X与某个一致凸空间同构[2].

非超自反空间的特征是这样表述的[6; 14]：一空间X称为具有性质(J_n)，如果对任一$\rho(0<\rho<1)$存在$\{x_i\}_{i=1}^n\subset U(X)$使得$\left\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i x_i\right\|>n\rho$对一切如下的$\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$成立：$\varepsilon_i=\pm 1$，并且每一个$-1$(如果有的话)在每一个$+1$(如果有的话)之前. 空间$X$称为具有性质$(J)$，如果$X$具有性质$(J_n)$，$n=1,2,\cdots$，－Banach空间$X$是非超自反的当且仅当$X$具有性质$(J)$.

定理5. 设φ是连续的单调上升和2维的矩形参数，则$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$当且仅当$X$具有性质$(J_2)$.

证明. 必要性. 设$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$. 由定理2，$X$有2维子空间列$\{X_k\}_{k=1}^\infty$使$\lim_{k\to\infty}d(X_k,l_\infty^2)=0$.对任何$\rho$，$0<\rho<1$，取$\eta>0$使$1-\eta>\rho$.再取$k$充分大，使$d(X_k,l_\infty^2)<\frac{1}{2}\log(1+\eta)$. 于是有$l_\infty^2$到$X_k$上的同构$T$使$\|T\|=1$，$\|T^{-1}\|<1+\eta$. 设$T(1,1)=x_1$，$T(-1,1)=x_2$，这里$(1,1)$，$(-1,1)\in l_\infty^2$. 显然$\|x_i\|\leqslant 1$，$i=1,2$，并且

$\|x_1 \pm x_1\| \geqslant \|T^{-1}\|^{-1}\|(1,1)\pm(-1,1)\| \geqslant (1+\eta)^{-1}\cdot 2 > 2(1-\eta) > 2\rho$，所以$X$具有性质$(J_2)$。

充分性。设X具性质(J_2)。取序列$\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$，使$\frac{1}{2}<\rho_k<1$，$\rho_k \to 1$. 由$(J_2)$的定义，对一$\rho_k$有$x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \in U(X)$使$\|x_1^{(k)}+x_2^{(k)}\| > 2\rho_k$和$\|-x_1^{(k)}+x_2^{(k)}\| > 2\rho_k$。显然$x_i^{(k)} \neq 0, i=1,$ 、令$X_k = \mathrm{span}\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\}$，$X_k$是$X$的2维子空间。令$D$是以$\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, -x_1^{(k)}, -x_2^{(k)}\}$为顶点的平行四边形。显然$D \subset U(X_k)$。下面证明$(2\rho_k-1)U(X_k) \subset D$。如果不然，易知有$x$位于$D$的边界上使$\|x\| < 2\rho_k - 1$。不妨设$x$位于$x_1^{(k)}$到$x_2^{(k)}$的线段上，也即有$\alpha$，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$使$x = \alpha x_1^{(k)} + (1-\alpha)x_2^{(k)}$。因为

$$2\rho_k < \|x_1^{(k)}+x_2^{(k)}\| \leqslant \|x_1^{(k)}\| + \|x_2^{(k)}\| \leqslant \|x_i^{(k)}\| + 1,\quad i=1,2$$

所以$\|x_i^{(k)}\| > 2\rho_k - 1$。又因$\left\|\frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_2^{(k)}\right\| > \rho_k > 2\rho_k - 1$，因此$\alpha \neq 0, \frac{1}{2}, 1$。如果

$0<\alpha<\frac{1}{2}$，则由三角不等式有

$$\rho_k < \left\|\frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_2^{(k)}\right\| = \left\|\frac{1-2\alpha}{2-2\alpha}x_1^{(k)} + \frac{1}{2-2\alpha}(\alpha x_1^{(k)} + (1-\alpha)x_2^{(k)})\right\| < \frac{1-2\alpha}{2-2\alpha} + \frac{2\rho_k-1}{2-2\alpha} = \frac{\rho_k-\alpha}{1-\alpha}.$$

由于$\rho_k<1$，这是不可能的。如果$\frac{1}{2}<\alpha<1$，同理有

$$\rho_k < \left\|\frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{1}{2}x_2^{(k)}\right\| = \left\|\frac{1}{2\alpha}(\alpha x_1^{(k)} + (1-\alpha)x_2^{(k)}) + \frac{2\alpha-1}{2\alpha}x_2^{(k)}\right\|$$

$$< \frac{2\rho_k-1}{2\alpha} + \frac{2\alpha-1}{2\alpha} = \frac{\alpha+\rho_k-1}{\alpha}.$$

由于$\alpha<1$，这也是不可能的。这样，我们得到

$$(2\rho_k-1)U(X_k) \subset D \subset U(X_k). \tag{3}$$

令Y是以D为单位球的线性赋范空间，则$Y \cong l_\infty^2$。Y也可看成是X_k上赋以等价的新范数的。定义$I_k: Y \to X_k$是恒等映照。于是对任何$y \in Y$，注意到范数是对于单位球的Minkovski泛函，从(3)即得

$$(2_k\rho - 1)\|y\| \leqslant \|I_k y\| \leqslant \|y\|,\quad \forall y \in Y.$$

因此$\|I_k\| \leqslant 1$，$\|I_k^{-1}\| \leqslant (2\rho_k-1)^{-1}$。所以$d(X_k, Y) \leqslant \log(2\rho_k-1)^{-1} \to 0\ (k\to\infty)$。再用定理2即知$\varphi(X) = \varphi(l_\infty^2)$。　证毕。

我们注意到(J_2)是空间本身的性质，与参数φ的具体形式无关，因此可以借助于已经了解的具体参数，来简化上面关于充分性的证明。在目前的问题上使用$J(X)$最为方便。简述如下。

X具有(J_2)蕴涵存在$x_1^{(k)},x_2^{(k)}\in U(X)$使$\|x_1^{(k)}\pm x_2^{(k)}\|>2\rho_k$。应用[8;引理1]即知$\left\|\frac{x_1^{(k)}}{\|x_1^{(k)}\|}\pm\frac{x_2^{(k)}}{\|x_2^{(k)}\|}\right\|\geqslant\|x_1^{(k)}\pm x_2^{(k)}\|>2\rho_k$。由$J(X)$的定义知$J(X)>2\rho_k$。由$\rho_k\to 1$和$J(\cdot)\leqslant 2$即得$J(X)=2$。由定理2知$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$，只要$\varphi$具有定理中所述的性质。

推论。设φ是连续的单调上升和2维的矩形参数，空间X是非超自反的，等价地，X不同构于一致凸空间，则$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$。

证明。由[6;§14]，非超自反空间具性质(J)，从而具性质(J_2)。 证毕。

由此推论可知定理3在$\dim X=\infty$时不成立。例如取X是任意的严格凸的非自反空间。既然X不是超自反的，$\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$。如果$M^{(2)}(X)$是紧的，连续函数$\varphi$在$M^{(2)}(X)$上达到sup，从而$X$有2维子空间与$l_\infty^2$等距同构。这与$X$的严格凸性矛盾。

最后，回顾定理5的推论和定理2知，非超自反空间X有2维子空间列收敛于l_∞^2。现在问什么条件能保证X有2维子空间等距同构于l_∞^2？如仅仅将条件加强为X是非自反的，仍然是不够的。上面的例子就说明了这一点。下面证明很广泛的一类空间，即所谓的"平坦空间"[3] (flat Banach spaces)(包括$l_\infty, L^1[a,b], C[a,b]$及它们的各次共轭空间)，都具有与$l_\infty^2$等距同构的子空间。

一个线性赋范空间X称为是平坦的[3]，如果存在一个函数$g:[0,2]\to X$使得$\|g(s)\|=1$ $\forall s\in[0,2]$，$g(0)=-g(2)$以及$\|g(s)-g(t)\|\leqslant|s-t|$ $\forall s,t\in[0,2]$。

平坦空间如用它的单位球的围长(girth)来定义将显得比较直观。但涉及更多的概念和术语，可参看[3]，[6]。

平坦空间的基本性质是它是非自反的。

定理6。如果X是平坦空间，则X含有与l_∞^2等距同构的2维子空间。

证明。为避免冗长，我们直接采用[3]中的记号和术语而不再加以解释。

在[3]的(2)式$\Delta g(s,h)=\dfrac{g(s-h)-g(s)}{h}$，$0<h\leqslant s\leqslant 2$中，先令$s=1,h=\frac{1}{2}$，得到一个向量$\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)\in X$；再令$s=\frac{3}{2},h=\frac{1}{2}$，得向量$\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\in X$。由[3]的(14)式知$\|\Delta g(s,h)\|=1,0<h\leqslant s\leqslant 2$。故$\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)$和$\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$是单位向量，下面证明$\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)$和$\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$张成的$X$的2维子空间$M$与$l_1^2$等距同构，从而与$l_\infty^2$等距同构。

在[3]的(4)式$f_g^*(s)\in X^*,\|f_g^*(s)\|=1,\langle f_g^*(s),g(s)\rangle=1$中分别令$s=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$，我们得到$X$上的三个范数为1的连续线性泛函$f_g^*\left(\frac{1}{2}\right),f_g^*(1),f_g^*\left(\frac{3}{2}\right)$，它们对向量$\Delta g(s,h)$的作用由[3]的(16)式

$$\langle f_g^*(t),\Delta g(s,h)\rangle=\begin{cases}1, & t\leqslant s-h,\\ -1, & s\leqslant t\end{cases}$$

确定。这里$\langle f,x\rangle$，$f\in X^*$，$x\in X$即通常的$f(x)$的另一种记法。现设ξ_1,ξ_2是任意实数，根据上面引用的[3]的(16)式有

$$\left\|\xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|\geqslant\left[f_t^*\left(\frac{1}{2}\right),\ \xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=\xi_1+\xi_2,$$

$$\left\|\xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|\geqslant\left[f_t^*(1),\ \xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=-\xi_1+\xi_2,$$

$$\left\|\xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|\geqslant\left[-f_t^*(1),\ \xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=\xi_1-\xi_2,$$

$$\left\|\xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|\geqslant\left[f_t^*\left(\frac{3}{2}\right),\xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right]=-\xi_1-\xi_2.$$

从上面四个不等式得$\left\|\xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|\geqslant|\xi_1|+|\xi_2|$。又因为$\left\|\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)\right\|=\left\|\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|=1$，故显然有

$\left\|\xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|\leqslant|\xi_1|+|\xi_2|$。所以对一切实数$\xi_1,\xi_2$有$\left\|\xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\|=|\xi_1|+|\xi_2|$成立。因此$\xi_1\Delta g\left(1,\frac{1}{2}\right)+\xi_2\Delta g\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\mapsto(\xi_1,\xi_2)\in l_1^2$，就是$M$与$l_1^2$等距同构。　证毕。

南京大学数学系高继同志几乎与作者同时也独立地证明了本文的定理6。他还给作者寄来[9]的摘要，特此致谢。

参　考　文　献

[1] Bollob'as, B'ela, An extension to the theorem of Bishop and Phelps, Bull. London Math. Soc., 2(1970), 181—182, MR 42*2282.

[2] Day, M. M., Normed linear spaces. Springer-Verlag, 1973.

[3] Harrell, R. E. anp Karlovitz. L. A., The geometry of flat Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 192(1974), 209—218.

[4] Joly. J. L., Caract'erisation d'espaces hilbertiens au mayen de la constante rectangle, J. Approximation Theory, 2(1969), 301—311, MR 42*5019.

[5] Schäffer, J. J., Inner diameter, perimeter and girth of spheres, Math. Ann., 173(1967), 59—79.

[6] ——, Geometry of spheres in normed spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, no. 20. 1976, MR 57*7120.

[7] Sibirjakov, G. V., Normed spaces with maximal bias, Trudy Tomsk. Gos. Univ., 253 Voprosy Mat. Vyp., 5(1974), 23—38, MR 55*3755.

[8] 阴洪生、赵俊峰、王崇祜，线性赋范空间的单位球面的λ-分离子集，南京大学学报，1980年数学专刊。

[9] 高继，Banach 空间的单位球的均匀度(Ⅰ)(Ⅱ)(已投南京大学学报)。

About Three Geometric Parameters of Normed Linear Spaces

By Yin Hongsheng

Abstract

In this paper we introduce the following definitions. Definition 3. For normed liner spaces X (dim $X \geqslant 2$), a mapping

$$\varphi: X \longmapsto \varphi(X) \in \mathbf{R}$$

is said to be an abstract parameter if $\varphi(X)=\varphi(Y)$ whenever X and Y are isometrically isomorphic normed linear spaces.

An abstract parameter φ is said to be continuous (with respect to Banach-Mazur distance d) if $d(X_n, X) \longrightarrow 0$ impies $\varphi(X_n) \longrightarrow \varphi(X)$.

φ is said to be increasing and n-dimensional if

$$\varphi(X)=\operatorname{Sup}\{\varphi(M): M \text{ is an n-dimensional subspace of } X\}.$$

φ is said to be rectangular if when dim $X=2$ we have (i) $\varphi(X) \leqslant \varphi(l_\infty^2)$ and (ii) $\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$ if and only if X is isometrically isomorphic to l_∞^2.

Examples of continuous, increasing and 2-dimensional, rectangular parameters are $\mu(X)$([4]), $\Delta(X)$([7]), andJ(x)([9])

Main resultss

Suppose φ is an abstract continuous, increasing and 2-dimensional, rectangular parameter. We get.

Corollary of Theorem 3. If X is a finite dimensional normdd linear space. then $\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$ if and only if X has a 2-dimensional subspace isometrically isomorphic to l_∞^2.

Theorem 5. For any normed linear space X. $\varphi(X)=\varphi(l_\infty^2)$ if and only if X has property(J_2), equivalently, $\varphi(X)<\varphi(l_\infty^2)$ if and only if X is uniformly non-square.