关于 S. N. Mukhopadhyay 的一个定理的推广*

盛淑云

（杭州大学）

§1 引 言

设 $F(x)$ 定义在点 x_0 的邻域，x_0 是实轴上的点，且 $F(x_0)=\alpha_0$，假如存在依赖于 x_0 但不依赖于 h 的实数 α_2，α_4，…，α_{2m} 使

$$\frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)}{2}=\sum_{i=0}^{m-1}\alpha_{2i}\frac{h^{2i}}{(2i)!}+o(h^{2m})$$

则称 α_{2m} 是函数 $F(x)$ 在点 x 的 $2m$ 阶 *de la Valle-Poussin* 对称导数，并记作 $D^{2m}F(x_0)$；类似地定义 $D^{2m+1}F(x_0)$。

设 $D^{2m-2}F(x_0)$ 存在，我们写

$$\omega_{2m}(F;\ x_0,\ h)=\frac{(2m)!}{h^{2m}}\left\{\frac{1}{2}[F(x_0+h)+F(x_0-h)]-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{h^{2i}}{(2i)!}D^{2i}F(x_0)\right\},$$

若

$$\lim_{h\to 0}h\,\omega_{2m}(F;\ x_0,\ h)=0$$

则称 $F(x)$ 在点 x_0 为 $2m$ 阶光滑；类似地定义 $F(x)$ 在点 x_0 处 $2m+1$ 阶光滑。

记［1；卷Ⅱp63］

$$\frac{1}{2}\delta_m(x_0,\ h)=\frac{h}{r+1}\omega_{m+1}(F;\ x_0,\ h),$$

设

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

1981年1月2日收到。

*为纪念导师陈建功教授逝世十周年而作。

是一个三角级数，写着

$$f(r;x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)r^n \qquad (0<r<1). \tag{1.1}$$

$$f(\alpha;\ r,\ x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha)_n A_n(x)r^n \quad (\alpha>-1,\ 0<r<1),$$

$$(\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}. \tag{1.2}$$

$$\sigma(r,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)\frac{r^n}{n} \qquad (0<r<1), \tag{1.3}$$

$$\tau(r,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)\frac{r^n}{n}\lg n \qquad (0<r<1). \tag{1.4}$$

$$(1-r)^{\alpha+1}f(\alpha;\ r,\ x)=A(\alpha;\ r,\ x) \tag{1.5}$$

$$\left(\lg\frac{1}{1-r}\right)^{-1}\sigma(r,\ x)=L(r,\ x) \tag{1.6}$$

$$\left(\lg\frac{1}{1-r}\right)^{-2}\tau(r,\ x)=l_2(r,\ x). \tag{1.7}$$

我们知道

定理A ［1；卷Ⅱ p63］ 设$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)$，且$\delta_m(x_0)$存在，有限，则对任意的$\alpha>m+1$有

$$\delta_m(x_0)=\pi(c,\ \alpha)\lim_{n\to\infty}A_n^{(m+1)}(x_0).$$

其中$\delta_m(x_0)=\lim_{h\to 0}\delta_m(x_0,\ h)$.

定理B[2] 对给定的正整数m，存在着正数k，有如下性质，如果

$$C+(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^{2m}}$$

是可积函数$F(x)$的富里埃级数，且

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}&=\lim_{h\to 0}\sup h\,\omega_{2m}(F;\ x_0,\ h)\\ \underline{\lambda}&=\lim_{h\to 0}\inf h\,\omega_{2m}(F;\ x_0,\ h)\end{aligned} \tag{1.8}$$

为有限，那末有

$$-k\lambda\leqslant\lim_{r\to 1}\inf(1-r)f(r,\ x_0)\leqslant\lim_{r\to 1}\sup(1-r)f(r,\ x_0)\leqslant k\lambda \tag{1.9}$$

其中

$$\lambda=\max[\,|\bar{\lambda}|,\ |\underline{\lambda}|\,], \qquad 0<r<1. \tag{1.10}$$

本文得到如下结果：

定理1 对给定的正整数m，存在着正数k，具有如下性质：若

$$C+(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^{2m}}$$

是可积函数$F(x)$的富里埃级数，则当$\alpha>-1$时有

$$-k\lambda\leqslant\lim_{r\to1}\inf A(\alpha;\ r,\ x)\leqslant\lim_{r\to1}\sup A(\alpha;\ r,\ x)\leqslant k\lambda.$$

其中λ，$A(\alpha;\ r,\ x)$由（1.10），（1.5）定义。

当$\alpha=0$时，便得定理B。故定理1包含定理B。

系1 若

$$C+(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^{2m}}$$

是$F(x)$的富里埃级数，且在点$x=x_0$处为$2m$阶光滑，则

$$\lim(1-r)^{\alpha+1}f(\alpha;\ r,\ x_0)=0$$

定理2 对给定的正整数m，存在着正数k，具有如下性质，若

$$C+(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^{2m}}$$

为可积函数$F(x)$的富里埃级数，则

$$-k\lambda\leqslant\lim_{r\to1}\inf L(r,\ x)\leqslant\lim_{r\to1}\sup L(r,\ x)\leqslant k\lambda$$

其中λ，$L(r,\ x)$由（1.10），（1.6）所定义。

系2 若

$$C+(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^{2m}}$$

是可积函数$F(x)$的富里埃级数，且在点$x=x_0$处为$2m$阶光滑，则$\lim\limits_{r\to1}L(r,\ x_0)=0$.

定理3 在定理2的条件下成立

$$-k\lambda\leqslant\lim_{r\to1}\inf l_2(r,x_0)\leqslant\lim_{r\to1}\sup l_2(r,\ x_0)\leqslant k\lambda$$

$l_2(r,\ x)$由（1.7）所定义。

系3 在系2的条件下成立

$$\lim_{r\to1}l_2(r,x_0)=0$$

§2 几个引理

引理1[3] 设$0<r<1$，对一切正整数m与固定的$q>0$有

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left(\frac{1}{\Delta^q}\right)=\sum_{i=1}^{2m}\frac{A_{2m,i}(r,t)}{\Delta^{q+i}},\tag{2.1}$$

这里

$$A_{2m,i}(r,t)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{\infty}a_{2m,i,j}(r)t^{2j} & (1\leqslant i\leqslant m)\\ \sum_{j=i-m}^{\infty}a_{2m,i,j}(r)t^{2j} & (m<i\leqslant 2m),\end{cases} \tag{2.2}$$

$a_{2m,i,j}(r)$ 是 r 的 $2m$ 阶多项式，固定 r，对一切 t，幂级数（2.2）收敛，此外对一切自然数 p，当 $1\leqslant i\leqslant 2m$ 时 $\frac{\partial^p}{\partial t^p}A_{2m,i}(r,t)$ 是 (r,t) 的连续函数，且当 $m\leqslant i\leqslant 2m$ 时，函数

$$\frac{A_{2m,i}(r,t)}{t^{2i-2m}}$$

除直线 $t=0$ 外处处有界.

对于 $\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t^{2m+1}}\left(\frac{1}{\Delta^q}\right)$ 有类似于引理1的结果，参见［3］.

引理2 设 $\alpha>-1$，对一切自然数 $2m-j$（$m=1,2,\cdots$；$j=1,2,\cdots$）以及 $r\in(\sigma,1)$（$0<\sigma<1$），存在常数 $C>0$（依赖于 m,j,σ），有

$$(1-r)^{\alpha+1}\int_0^{\pi}\left|t^{2m-j-1}\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)\right|dt\leqslant C \tag{2.3}$$

证明： 由引理1，我们见到

$$\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)=\sum_{i=1}^{2m-j}\frac{A_{2m-j,i}(r,t)}{\Delta^{i+\frac{\alpha+1}{2}}},$$

取 $r\in(\sigma,1)$，则 $\Delta=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}>(1-r)^2+4\sigma\sin^2\frac{t}{2}$， (2.4)

由此我们有

$$\begin{aligned}&(1-r)^{1+\alpha}\left[\int_0^{1-r}+\int_{1-r}^{\pi}\right]\left|t^{2m-j-1}\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)\right|dt\\
&\leqslant(1-r)^{1+\alpha}\left[\sum_{i=1}^{2m-j}\int_0^{1-r}t^{2m-j}\frac{|A_{2m-j,r}(r,t)|}{(1-r)^{2i+1+\alpha}}dt\right]\\
&+(1-r)^{1+\alpha}\left[\sum_{i=1}^{2m-j}\int_{1-r}^{\pi}t^{2m-j-1}\frac{|A_{2m-j,i}(r,t)|}{\left(4\sigma\sin^2\frac{t}{2}\right)^{i+\frac{1+\alpha}{2}}}dt\right]\\
&\leqslant(1-r)^{\alpha+1}\left[\sum_{i=1}^{m-j}\int_0^{1-r}\frac{t^{2m-j-1}|A_{2m-j,i}(r,t)|}{(1-r)^{2i+1+\alpha}}dt\right.\\
&\left.+\sum_{i=m-j+1}^{2m-j}\int_0^{1-r}\frac{t^{2i-1}|A_{2m-j,i}(r,t)dt}{(1-r)^{2i+1+\alpha}\cdot t^{2i-2m+j}}\right]\\
&+(1-r)^{1+\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m-j}+\sum_{i=m-j+1}^{2m-j}\int_{1-r}^{\pi}t^{2m-j-1}\frac{|A_{2m-j,i}(r,t)|dt}{\left(4\sigma\sin^2\frac{t}{2}\right)^{i+\frac{1+\alpha}{2}}}\right]\end{aligned} \tag{2.5}$$

经过计算利用引理1不难证明（2.5）右边各项都是$O(1)$。（仅与m，j，σ有关）

引理3　设$0<r<1$，对一切自然数m，存在常数$C>0$（依赖于m，r），有

$$\frac{1}{\lg\frac{1}{1-r}}\int_0^\pi\left|t^{2m-1}\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)\right|dt\leqslant C$$

证明，我们见到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)&=2r\frac{\partial^{2m-1}}{\partial t^{2m-1}}\left(\frac{\sin t}{\Delta}\right)\\&=2r\sum_{j=0}^{2m-1}C_{2m-1}^{j}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{(j)}(\sin t)^{(2m-j-1)}\\&=O\left\{\sum_{j=0}^{2m-1}C_{2m-1}^{j}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{(j)}+\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{(2m-1)}(\sin t)^{(0)}\right\}\\&=O\left\{\sum_{j=0}^{2m-1}C_{2m-1}^{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{A_{j,i}(r,t)}{\Delta^{i+1}}\right.\\&\left.\quad+\sum_{j=1}^{2m-1}\cdot\frac{A_{2m-1,j}(r,t)}{\Delta^{j+1}}\sin t\right\}\end{aligned}\tag{2.6}$$

（2.6）中O仅与m，r有关。

由于

$$\frac{1}{\Delta^m}=\begin{cases}O\left(\frac{1}{(1-r)^{2m}}\right) & t\in(0,\ 1-r)\\ O\left(\frac{1}{t^{2m}}\right) & t\in(1-r,\ \pi)\end{cases}\tag{2.7}$$

容易计算：（利用引理1以及（2.6），（2.7））

$$\begin{aligned}&\left(\lg\frac{1}{1-r}\right)^{-1}\int_0^\pi t^{2m-1}\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)dt\\&=\left(\lg\frac{1}{1-r}\right)^{-1}\left\{\left[\int_0^{1-r}+\int_{1-r}^{\pi}\right]t^{2m-1}\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\right.\\&\left.\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)dt\right\}=O\ (1).\end{aligned}$$

（仅与m，r有关）

§3 定理的证明

定理1的证明

不妨假设 $x_0=0=F(0),\ F(t)=F(-t).$ (3.1)

如[3；18式]那样我们可以写

$$D^2F(0)=D^4F(0)=\cdots=D^{2m-2}F(0)=0. \tag{3.2}$$

对$\varepsilon>0$从(1.8)(1.10)，(3.1)(3.2)我们知道，存在$\delta>0$使

$$\left|\frac{(2m)!F(t)}{t^{2m-1}}\right|<\lambda+\varepsilon\quad(0<t<\delta). \tag{3.3}$$

我们见到

$$f(\alpha;\ r,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\pi}n^{2m}(\alpha)_n\int_{-\pi}^{\pi}F(t)r^n\cos nt dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha)_n r^n\cos nt\right]dt$$

$$=Re\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha)_n(re^{it})^n\right]dt\right\}$$

令

$$\frac{1}{1-re^{it}}=\rho e^{i\theta}$$

则

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\Delta}},\qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{r\sin 2t}{1-r\cos 2t}. \tag{3.4}$$

于是上式等于

$$\frac{2}{\pi}(1-r)^{1+\alpha}\int_0^{\pi}F(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left[\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\cos(\alpha+1)\theta\right]dt$$

$$=\frac{2}{\pi}(1-r)^{\alpha+1}\int_0^{\pi}F(t)\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^{j}\left[\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)\frac{\partial^{j}}{\partial t^{j}}\cos(\alpha+1)\theta\right]dt$$

$$=(1-r)^{1+\alpha}\left[\int_0^{1-r}+\int_{1-r}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right]=P_1+P_2+P_3. \tag{3.5}$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}[\cos(\alpha+1)\theta]=-\sin(\alpha+1)\theta\cdot\frac{(\alpha+1)r(\cos t-r)}{\Delta}.$$

继续进行微分，并利用引理 1，不难得到下列估计式。

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}[\cos(a+1)\theta]=\begin{cases}O\left(\frac{1}{1-r}\right)^i & t\in(0,\ 1-r),\\ O\left[\left(\frac{1-r}{t^2}\right)^i\right]+O\left(\frac{1}{t^i}\right) & t\in(1-r,\delta),\\ O\left(\frac{1}{\Delta^i}\right) & t\in(\delta,\ \pi)\ .\end{cases} \tag{3.6}$$

于是

$$|P_1|\leqslant K_1\left\{(1-r)^{a+1}\int_0^{1-r}|F(t)|\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j\left|\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{a+1}{2}}}\right)\right|\right.$$

$$\cdot\frac{1}{(1-r)^j}dt\leqslant K_1\left\{\frac{(1-r)^{a+1}}{(2m)!}\int_0^{1-r}\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j\left|\frac{F(t)(2m)!}{t^{2m-1}}\right|\right.$$

$$\cdot\frac{t^j}{(1-r)^j}t^{2m-j-1}\left|\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{a+1}{2}}}\right)\right|dt. \tag{3.7}$$

由（3.3）式知上式不超过

$$K_1\frac{(1-r)^{a+1}}{(2m)!}\int_0^{1-r}(\lambda+\varepsilon)\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j\ \frac{t^j}{(1-r)^j}t^{2m-j-1}\left|\frac{\sigma^{2m-j}}{\sigma t^{2m-j}}\cdot\frac{1}{\Delta^{\frac{a+1}{2}}}\right|dt$$

$$\leqslant K_1\frac{(1-r)^{a+1}}{(2m)!}(\lambda+\varepsilon)\int_0^{\pi}\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j t^{2m-j-1}\left|\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\frac{1}{\Delta^{\frac{a+1}{2}}}\right|dt.$$

由引理 2 知道上式不超过

$$K_1\frac{C}{(2m)!}(\lambda+\varepsilon)\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j\leqslant K_2(\lambda+\varepsilon) \tag{3.7'}$$

其次利用（3.6）、（3.3）及引理 1 有

$$|P_2|\leqslant K_3(1-r)^{a+1}\left|\int_{1-r}^{\delta}\sum_{j=0}^{2m}F(t)\ C_{2m}^j\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{a+1}{2}}}\right)\frac{\partial^j}{\partial t^j}\cos(a+1)\theta dt\right|$$

$$\leqslant K_3(1-r)^{a+1}\int_{1-r}^{\delta}|F(t)|\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j\left|\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{a+1}{2}}}\right)\right|\left[\left(\frac{1-r}{t^2}\right)^j+\frac{1}{t^j}\right]dt$$

$$\leqslant K_3(1-r)^{a+1}\int_{1-r}^{\delta}(\lambda+\varepsilon)\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j\left[\left(\frac{1-r}{t^2}\right)^j+\frac{t^j}{1}\right]t^j$$

$$\cdot t^{2m-j-1}\left|\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{a+1}{2}}}\right)\right|dt \tag{3.8}$$

再用引理 2 知 $|P_2|\leqslant K_4(\lambda+\varepsilon)$。

最后估计：

$$|P_3|\leqslant K_5(1-r)^{\alpha+1}\int_\delta^\pi\left|F(t)\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)\frac{\partial^j}{\partial t^j}\cos(\alpha+1)\theta\right|dt$$

$$\leqslant K_5(1-r)^{\alpha+1}\int_\delta^\pi|F(t)|\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j\frac{1}{|\Delta|^j}\left|\frac{\partial^{2m-j}}{\partial t^{2m-j}}\left(\frac{1}{\Delta^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)\right|dt$$

$$\leqslant K_6(1-r)^{\alpha+1}\int_\delta^\pi\sum_{j=0}^{2m}C_{2m}^j\frac{1}{|\Delta|^j}\left|\sum_{i=1}^{2m-j}\frac{A_{2m-j,i}(r,t)}{\Delta^{i+\frac{\alpha+1}{2}}}\right|dt$$

$$\leqslant K_7(1-r)^{\alpha+1}\int_\delta^\pi\sum_{j=0}^{2m}\sum_{i=1}^{2m-j}C_{2m}^j\frac{1}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2j}}\frac{1}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2i+\alpha+1}}dt$$

$$\leqslant K_8(1-r)^{\alpha+1}\to 0\qquad(r\to 1).\tag{3.9}$$

所以对 $\eta>0$，存在 γ 使 $0<\gamma<\frac{1}{2}$ 与 $1-\gamma<r<1$ 时有

$$|P_3|<\eta\tag{3.10}$$

因此由（3.5）以及（3.7）～(3.10）得到

$$|(1-r)^{\alpha+1}f(\alpha;\ r,\ 0)|\leqslant(K_2+K_4)(\lambda+\varepsilon)+\eta\qquad(1-\gamma<r<1)$$

令 $r\to 1-0$ 便得定理结果。

定理 2 的证明

不妨假设 $x_0=0=F(0)$，$F(t)=F(-t)$。

我们见到

$$\sigma(r,\ 0)=\sum_{n=1}^\infty(-1)^m n^{2m}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi F(t)\frac{r^n\cos nt}{n}dt$$

$$=Re\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left[\sum_{n=1}^\infty\frac{(re^{it})^n}{n}\right]dt\right\}.$$

注意到（3.4），上式等于

$$Re\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\lg\left(\frac{1}{1-re^{it}}\right)dt\right\}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)dt.$$

现在

$$L(r,\ x)=\frac{1}{\pi\lg\frac{1}{1-r}}\int_0^\pi F(t)\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi(2m)!\left(\lg\frac{1}{1-r}\right)}\left[\left(\int_0^\delta+\int_\delta^\pi\right)\frac{F(t)(2m)!}{t^{2m-1}}t^{2m-1}\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)dt\right]$$

$$=R_1+R_2$$

由（3.3）式以及引理3得

$$|R_1|\leqslant\frac{2(\lambda+\varepsilon)}{\pi(2m)!\lg\frac{1}{1-r}}\int_0^{\delta}t^{2m-1}\left|\frac{\sigma^{2m}}{\sigma t^{2m}}\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)\right|dt$$

$$\leqslant\frac{2(\lambda+\varepsilon)}{\pi(2m)!\lg\frac{1}{1-r}}\int_0^{\delta}t^{2m-1}\left|\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)\right|dt\leqslant K(\lambda+\varepsilon) \tag{3.12}$$

易见

$$|R_2|\leqslant\frac{2}{\pi\lg\left(\frac{1}{1-r}\right)}\int_{\delta}^{\pi}|F(t)|\frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}}\left(\lg\frac{1}{\Delta}\right)\Big|dt$$

$$=O\left(\frac{1}{\lg\frac{1}{1-r}}\int_{\delta}^{\pi}\frac{1}{\Delta^{2m}}dt\right)=O\left(\frac{1}{\lg\frac{1}{1-r}}\right) \tag{3.13}$$

综合（3.11）（3.12）（3.13）便得定理2的证明.

定理3的证明类似于定理2，从略.

参　考　文　献

[1] Zygmund, A., Trigonometric series, Cambridge, 1968.

[2] Mukhopadhyay. S. N., On the Abel Limit of the term of trigonometric series, J. L. M. S 2 (20), 1979, 319-326.

[3] —, On the Abel Summability of trigonomesic series, J. L. M. S, 2 (17) 1978, 87-96.

On the Generalization of a theorem of S. N. Mukhopadhyay

By Sheng Shuyun (盛淑云)

Abstract

Suppose that $D^{2r-2}F(x_0)$ *exists. As in* [3] *we write*

$$\omega_{2r}(F;x_0,h)=\frac{(2r)!}{h^{2r}}\left[\frac{1}{2}\left\{F(x_0+h)+F(x_0-h)\right\}-\sum_{i=0}^{r-1}\frac{h^{2i}}{(2i)!}\cdot D^{2i}F(x_0)\right],$$

$$\bar{\lambda}=\limsup_{h\to0}h\omega_{2m}(F;\ x_0,\ h),\quad \underline{\lambda}=\liminf_{h\to0}h\omega_{2m}(F;\ x_0,\ h),$$

and

$$A(\alpha;\ r,\ x)=(1-r)^{+1+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha)_n A_n(x)r^n \qquad (\alpha>-1,\ 0<r<1),$$

$$L(r,\ x)=\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)\frac{r^n}{n}\lg n \qquad (0<r<1),$$

$$l_2(r,\ x)=\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)\frac{r^n}{n}\lg n \qquad (0<r<1).$$

In this paper we prove the following theorem.

Theorem. Give the positive integer m there is a positive number k with the following: if

$$C+(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n(x)}{n^{2m}}$$

is the Fourier seriers of an integrable function F and if $\bar{\lambda}$, $\underline{\lambda}$ *are finite, then*

(i) $-K\lambda\leqslant\lim_{r\to1}\inf A(\alpha;\ r,\ x)\leqslant\lim_{r\to1}\sup A(\alpha;r,x)\leqslant K\lambda$

(ii) $-K\lambda\leqslant\lim_{r\to1}\inf L(r,\ x)\leqslant\lim_{r\to1}\sup L(r,\ x)\leqslant K\lambda$

(iii) $-K\lambda\leqslant\lim_{r\to1}\inf l_2(r,x)\leqslant\lim_{r\to1}\sup l_2(r,x)\leqslant K\lambda$

where $\lambda=max[|\bar{\lambda}|,\ |\underline{\lambda}|]$.