经验Bayes估计渐近理论中的若干未决问题*

陈希孺

（中国科技大学数学系）

这里介绍 Singh 在[3]中提出的关于经验 Bayes 估计的渐近理论的几个猜测，及某些有关问题.

设有绝对连续的一维指数分布族

$$dP_\theta(x)=f_\theta(x)dx=C(\theta)^{\theta x}h(x)dx,\quad \theta\in\Theta \tag{1}$$

Θ 为 R^1 上的一有限或无限区间. 假定取平方损失 $L(a,\theta)=(a-\theta)^2$，θ 有先验分布 G. θ 的 Bayes估计记为 $d_G=d_G(x)$，其 Bayes 风险记为 $B(G)$.

设有历史样本 $X_1,\cdots,X_n$，当前样本 X. 按经验 Bayes 理论的基本假定，$X_1,\cdots,X_n$，(X,θ)相互独立，且每个X_i 的分布与X的边缘分布相同. 任一同时依赖于 $X_1,\cdots,X_n$ 和X 的估计 $d_n=d_n(X_1,\cdots,X_n,X)$ 称为 θ 的一经验 Bayes 估计，其 Bayes 风险定义为

$$B(d_n,G)=E\{(d_n(X_1,\cdots,X_n,X)-\theta)^2\} \tag{2}$$

(2)左右边的期望值是在 $X_1,\cdots,X_n$ 和(X,θ) 的分布如上面所规定的条件下去求的.

显然有 $B(d_n,G)\geqslant B(G)$. 设$\mathscr{F}$为一先经分布族. 如果记 $Q(d_n,G)=B(d_n,G)-B(G)$ 而

$$\lim_{n\to\infty}Q(d_n,G)=o,\text{ 对任何}G\in\mathscr{F} \tag{3}$$

则称 d_n 为相对于$\mathscr{F}$的渐近优良的经验 Bayes 估计. 自然，希望找出 d_n，不仅使(3) 成立且有尽可能快的收敛速度. Singh 提出的第一个猜测是：

不论(1)中$C(\theta)$,$h(x)$的具体形状如何，即使把$\mathscr{F}$取为

$$\mathscr{F}^*=\{G\text{：G的负荷集包含在一固定的有界区间 I 内}\} \tag{4}$$

也不可能找到 d_n，使

$$Q(d_n,G)=O\left(\frac{1}{h}\right)\text{ 对一切 }G\in\mathscr{F}^* \tag{5}$$

这里$O\left(\frac{1}{n}\right)$中的常数可与G 有关.

*1981年5月13日收到.

提出这个猜测的背景如下：1975年以来，Lin[1]和Singh[2]，[3]都研究过下述问题：找 d_n，使

$$Q(d_n,G)=O(n^{-t}) \quad 对一切G\in\mathscr{F}$$

$\mathscr{F}$为某一先验分布族，$t>o$. t 能够达到多大，与分布族$\mathscr{F}$的性质和(1)的具体形状有关。在一些相当繁复的假定下，Lin 在[1]中得出了 t 能达到$\frac{1}{3}-\varepsilon$(对任何 $\varepsilon>o$)。而Singh在[2]、[3]中先后将这结果改进为$\frac{2}{5}-\varepsilon$及$1-\varepsilon$(所设条件有些不同)。但即使在很简单的指数族，例如方差已知的正态分布族，以及先验分布G具有任意阶有限矩的情况下，也不能达到 $t=1$。因而 Singh 提出了上述猜测。

本文作者认为：Singh 上述猜测中重要之点在于：先经分布族$\mathscr{F}^*$是一个非参数性的族。只要保持了这一点，则即使对先经分布族的限制比(4)更严，Singh 的猜测仍成立。反过来，如先验分布族$\mathscr{F}$是一个适当的参数族，则即使其负荷集不为有界，$O\left(\frac{1}{n}\right)$的速度未尝不可以达到。例如，取(1)中的 $f_\theta(x)$为 $N(\theta,1)$分布，先验分布族为

$$\mathscr{F}=\{N(0,\sigma^2):\sigma^2>0\}$$

则 θ 的 Bayes 估计(在σ^2已知时)的 Bayes 风险为

$$B(\sigma^2)=\sigma^2/(1+\sigma^2) \tag{6}$$

取经验 Bayes 估计

$$d_n(x_1,\cdots,x_n,x)=\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2-1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}x$$

简单计算证明：当 $n\geqslant5$ 时

$$B(d_n,\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}+\frac{2n+8}{(n-2)(n-4)}\ \frac{1}{1+\sigma^2} \tag{7}$$

由(6)，(7)知$Q(d_n,\sigma^2)=O\left(\frac{1}{n}\right)$，对任何 $\sigma^2>0$。

Singh 同时也提出了较弱的猜测，相当于把(5)右边的 $O\left(\frac{1}{n}\right)$改为$o\left(\frac{1}{n}\right)$。这个猜测已由本文作者[4]证明是正确的。Singh 的较强猜测，即(5)，看来也正确，但证明不容易。处理这问题的一条思路可参看[4]。

Singh 的第二个猜测是：若不对先验分布G的矩作任何要求，则不能建立 $Q(d_n,G)$的任何收敛速度。

Singh 的这个猜测要加以确切化。事实上，即使为了证明 d_n 有渐近优良性，G 的二阶矩有限看来是必不可少的。又"任何收敛速度"一词也需解释。我们考虑将 Singh 的上述猜测表为：

不论(1)中$C(\theta)$和$h(x)$的具体形状如何，也不论$\{C_n\}$是怎样的一串趋于0的常数，若先验分布族为

$$\mathscr{F}_1^* = \{G: \text{存在}\varepsilon>0, \text{使}\int|\theta|^{2+\varepsilon}dG(\theta)<\infty\}$$

则对任何经验Bayes估计d_n，存在$G\in\mathscr{F}_1^*$，使

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{Q(d_n,G)}{C_n}=\infty.$$

经验 Bayes 估计的渐近理论，目前总的说来还处在很不成熟的地步，即使对像一维指数族这样最简单的情况，没有解决的问题也还不少。例如：目前所得的 $Q(d_n, G)=O(n^{-t})$ 型的结论，所设条件都是把先验分布G和(1)的具体形式联系在一起，只在个别情况，如 $N(\theta,1)$，可以只由对G的矩的要求而得出 $O(n^{-t})$ 型的结论。因此可提出问题：即使在由(4)规定的先验分布族$\mathscr{F}^*$之下，能否对任一形如(1)的分布族建立经验 Bayes 估计 d_n (当然与(1)的具体形式有关)，使对某个 $t>o$ 有$Q(d_n,G)=O(n^{-t})$ 对一切$G\in\mathscr{F}^*$成立？ t 当然可以与(1)的具体形式有关。

上面这些问题当然对一维离散指数族也存在，至于一般的一维指数族

$$f_\theta(x)d\mu(x)=C(\theta)e^{\theta x}d\mu(x)$$

目前还没有任何结果。

参　考　文　献

[1] Lin, P. E. Rates of convergence in empirical Bayes estimation problems: Continuous case, Ann. Statist. 1975, 3, 155—164.

[2] Singh R. S. Empirical Bayese estimation with convergence rates in non-continuous Lebesgue-exponential families, Ann. statist. 1976, 4, 431—439.

[3] Singh R. S. Empirical Bayes estimation in Lebesgue-exponential families with rates near the best possible rate, Ann. Statist. 1979,7, 890—901.

[4] 陈希孺 On One Conjecture of Singh (已投数学年刊).