1981年4月 数学研究与评论 创刊

Fourier 级数子列的可和性*

施咸亮

(杭州大学)

设 $N=\{n_k\}$ 是自然数子序列，满足

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}>q>1, \quad (1)$$

以 $D_j(t)$ 表示 Dirichlet 核 $\frac{\sin(j+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$，对于给定的线性求和矩阵 $A=(a_{mk})$，按序列 $\{D_{n_k}(t)\}$ 作核

$$K_m(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{mj}D_{n_j}(t).$$

若 $K_m(t)\in L_{2\pi}$，则对于一切 $f(t)\in L_{2\pi}$ 可以定义卷积算子

$$\sigma_m(f,\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_m(t-x)dt.$$

对于 $n_j=2^j$，这种算子最早被 D. J. Newman 于 1974 年所研究。他在〔1〕中证明，不论 A 是怎样的正则矩阵，在 $f(x)$ 的连续点 x_0 处序列 $\sigma_m(f,\ x_0)$ 未必收敛。但是[2]，若 A 是 $(C,\ 1)$ 求和法，也即

$$K_m(t)=\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}D_{2^j}(t),$$

则当 $f(x)$ 满足

$$\omega(f,\ x_0;\ t)=\sup_{0<|h|\le t}|f(x_0+h)-f(x_0)|$$

$$=o\left(\frac{1}{\sqrt{|\log t|}}\right)\ (t\to+0) \quad (2)$$

时 $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m(f,\ x_0)=f(x_0)$。A. C. Байарстанова〔2〕还指出，(2) 中的"o"不能被"O"代替。

设 $\omega(t)$ 为给定的连续模，以 $H_{x_0}^{\omega}$ 表示适合 $\omega(f,\ x_0;\ t)\leqslant\omega(t)$ 的 $f(x)\in L_{2\pi}$ 全体。本文的目的是对于任意的正则求和法 A 给出使 $H_{x_0}^{\omega}$ 中函数成立

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m(f,\ x_0)=f(x_0) \quad (3)$$

的充要条件，详言之，我们将证明下述的

* 1980 年 11 月 8 日收到。

定理 设 $N=\{n_k\}$ 满足(1)，$A=(a_{mk})$ 是正则求和矩阵，核 $K_m(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{mj}D_{n_j}(x)\in L_{2\pi}$。那么为使对于一切 $f(x)\in H_{x_0}^{\omega}$ 成立极限式(3)的充要条件是

$$\lim_{p\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\sum_{k=p}^{\infty}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\left(\sum_{n_j>q^k}a_{mj}^2\right)^{\frac{1}{2}}=0. \tag{4}$$

为证定理，我们需要下面两个引理

引理1 设 $A=(a_{mk})$ 是正则求和矩阵，$\lambda_k=o(1)\ (k\to\infty)$，那么

$$\sum_k|a_{mk}\lambda_k|=o(1)\quad(m\to\infty).$$

引理1不难根据正则性的三个条件(见[3]，第68页)推出(仅用到其中的两个条件)。

引理2 设 $q>1$。那么存在仅与 q 有关的正数 Λ 和 Θ，使得只要

$$0\leqslant\beta\leqslant\pi/q,\quad\sum_k(c_k^2+d_k^2)<\infty$$

而 $\{\lambda_k\}$ 是满足 $\lambda_1\geqslant\Lambda$ 及 $\lambda_{k+1}/\lambda_k>q\ (k=1,2,\cdots)$ 的正数列，就成立不等式

$$\frac{1}{\Theta}\left\{|c_0|+\left[\sum_{k=1}^{\infty}(c_k^2+d_k^2)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant\int_{\pi/q}^{\pi}\left|c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k\cos\lambda_kx+d_k\sin\lambda_kx)\right|dx$$

$$\leqslant\Theta\left\{|c_0|+\left[\sum_{k=1}^{\infty}(c_k^2+d_k^2)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

定理的证明 先证充分性 设(4)成立。那么对于任意的 $\varepsilon>0$ 有正整数 k_0 适合

$$\varlimsup_{m\to\infty}\sum_{k=k_0}^{\infty}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\left(\sum_{n_j>q^k}a_{mj}^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon. \tag{5}$$

设 $\delta=1/q^{k_0}$。根据 Riemann—Lebesgue 定理[3]和引理1，我们见到

$$\int_{\delta\pi}^{\pi}\varphi_{x_0}(t)k_m(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}a_{mj}\int_{\delta\pi}^{\pi}\frac{\varphi_{x_0}(t)}{t}\sin\left(n_j+\frac{1}{2}\right)t\,dt=o(1)\qquad(m\to\infty),$$

其中 $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$。因此有

$$\begin{aligned}\sigma_m(f,x_0)-f(x_0)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta\pi}\varphi_{x_0}(t)k_m(t)\,dt+o(1)\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta\pi}\varphi_{x_0}(t)\sum_{j=0}^{\infty}a_{mj}\frac{\sin n_jt}{t}\,dt+o(1)\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{k=k_0}^{\infty}\int_{\pi/q^{k+1}}^{\pi/q^k}\varphi_{x_0}(t)\sum_{n_j>\Lambda q^k}a_{mj}\frac{\sin n_jt}{t}\,dt\\&\quad+\frac{1}{\pi}\sum_{k=k_0}^{\infty}\int_{\pi/q^{k+1}}^{\pi/q^k}\varphi_{x_0}(t)\sum_{n_j\leqslant\Lambda q^k}a_{mj}\frac{\sin n_jt}{t}\,dt+o(1)\\&\equiv I_1+I_2+o(1),\end{aligned} \tag{6}$$

其中 Λ 为引理2中的常数。不妨设 $\Lambda\geqslant1$ 我们有

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{\pi}{q^k}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\sum_{n_j\leqslant \Lambda q^k}|a_{mj}|\,n_j$$

$$\leqslant c\sum_{j=0}^{\infty}|a_{mj}|\,n_j\sum_{k\geqslant \log_q(n_j/\Lambda)}\frac{1}{q^k}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)$$

$$\leqslant c\sum_{j=0}^{\infty}|a_{mj}|\,\omega\left(\frac{\pi}{n_j}\right).$$

根据引理 1，从上式导出

$$I_2 = o(1). \tag{7}$$

对于 I_1 有估计

$$|I_1| \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} q^k\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\int_{\pi/q^{k+1}}^{\pi/q^k}\left|\sum_{n_j>\Lambda q^k} a_{mj}\sin n_j t\right| dt$$

$$=\sum_{k=k_0}^{\infty}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\int_{\pi/q}^{\pi}\left|\sum_{n_j>\Lambda q^k} a_{mj}\sin\left(\frac{n_j}{q^k}t\right)\right| dt.$$

根据引理 2，上式蕴含

$$|I_1| \leqslant \Theta\sum_{k=k_0}^{\infty}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\left(\sum_{n_j>\Lambda q^k} a_{mj}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \Theta\sum_{k=k_n}^{\infty}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\left(\sum_{n_j>q^k} a_{mj}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

综合 (5) – (8) 得到

$$\varlimsup_{m\to\infty}|\sigma_m(f,\ x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

再令 $\varepsilon \to 0$ 便知 (3) 式成立。

下面证明必要性。假设 (4) 式不成立。我们来构造函数 $f(x)\in H_{2\pi}^{\omega}$ 使 (3) 不成立。易见，当 (4) 不成立时有正数 θ 使对于一切 p 成立

$$\varlimsup_{m\to\infty}\sum_{k=p}^{\infty}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\left(\sum_{n_j>q^k} a_{mj}^2\right)^{\frac{1}{2}} > \theta. \tag{9}$$

选取三个自然数子列 $\{p_l\}$，$\{m_l\}$，$\{t_l\}$ 和一列正数 $\{\delta_l\}$ 如下：置 $p_1 = 1$。由 (9)，存在 m_1 和 t_1 使

$$\sum_{k=p_1}^{t_1-1}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\left(\sum_{n_j>q^k} a_{m_1 j}^2\right)^{\frac{1}{2}} > \theta.$$

又因 $k_{m_1}(t)$ 是可积的，故有 $\delta_1 > 0$ 使

$$\int_0^{\delta_1\pi}|K_{m_1}(t)|\,dt < 1.$$

现在假设 p_l，m_l，t_l 和 δ_l 已取好。我们选取 p_{l+1}，m_{l+1}，t_{l+1} 和 δ_{l+1} 使之满足下列诸条件：

i)　$q^{-p_{l+1}} < \delta_l$；

ii) $t_{l+1} > p_{l+1} > t_l$;

iii) $\left|\sum_{s=1}^{l}\int_{\pi/q^{t_s}}^{\pi/q^{p_s}}\omega(t)[\operatorname{sign} K_{m_s}(t)]K_{m_{l+1}}(t)\,dt\right| < \frac{1}{l+1}$;

iv) $\sum_{k=p_{l+1}}^{t_{l+1}-1}\omega\left(\frac{\pi}{q^k}\right)\left(\sum_{n_j>q^k}a^2_{m_{l+1}\,j}\right)^{\frac{1}{2}} > \theta$,

v) $\int_0^{\delta_{l+1}\pi}|K_{m_{l+1}}(t)|\,dt < \frac{1}{l+1}$.

这是可以实现的。事实上，i) 和 ii) 两个条件显然可以实现。其它条件可以实现的理由分别是：iii) 系根据 Riemann- Lebesgue 定理，

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{s=1}^{l}\int_{\pi/q^{t_s}}^{\pi/q^{p_s}}\omega(t)[\operatorname{sign}K_{m_s}(t)]K_m(t)\,dt = 0.$$

iv)是根据(9)；v) 系根据 $K_{m_{l+1}}(t)$的可积性。

不妨设 $x_0 = 0$，作周期为 2π 的函数 $f(x)$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases}\omega(x)\operatorname{sign}K_{m_l}(x), & \pi/q^{p_l} > x > \pi/q^{t_l},\\ & l=1,2,\cdots;\\ 0, & \text{在}[0,\pi]\text{上其它地方};\\ f(-x), & x\in[-\pi,0];\\ f(x+2\pi), & -\infty < x < +\infty.\end{cases}$$

显然，$f(x)\in H^0_{\varkappa_c}$ 且 $f(x_0)=0$。我们见到，

$$\begin{aligned}&\sigma_{m_l}(f,x_0)-f(x_0)\\ &\geqslant \frac{2}{\pi}\int_{\pi/q^{t_l}}^{\pi/q^{p_l}}\omega(t)|K_{m_l}(t)|\,dt - \frac{2\omega(\pi)}{\pi}\int_0^{\pi/p_{l+1}}|K_{m_l}(t)|\,dt\\ &-\frac{2}{\pi}\left|\sum_{s=1}^{l-1}\int_{\pi/q^{t_s}}^{\pi/q^{p_s}}\omega(t)[\operatorname{sign}K_{m_s}(t)]\,K_{m_l}(t)\,dt\right|\\ &\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{s=p_l}^{t_l+1}\omega\left(\frac{\pi}{q^{s+1}}\right)\int_{\pi/q}^{\pi}\left|\sum_{n_j>Aq^s}a_{m_l j}\sin\left(\frac{n_j}{q^s}t\right)\right|dt\\ &-\frac{2}{\pi}\sum_{s=p_l}^{t_l-1}\frac{q^s}{\pi}\omega\left(\frac{\pi}{q^s}\right)\int_{\pi/q^{s+1}}^{\pi/q^s}\left|\sum_{n_j\leqslant Aq^s}a_{m_l j}\sin n_j t\right|dt\\ &-\frac{2\omega(\pi)}{\pi}\cdot\frac{1}{l}-\frac{2}{\pi l}.\end{aligned}\tag{10}$$

注意到$|\sin n_j t|\leqslant n_j t$，根据引理1，得到

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}\sum_{s=p_l}^{t_l-1}\frac{q^s}{\pi}\omega\left(\frac{\pi}{q^s}\right)\int_{\pi/q^{s+1}}^{\pi/q^s}\left|\sum_{n_j\leqslant Aq^s}a_{m_l j}\sin n_j t\right|dt\\ &\leqslant C\sum_{j=0}^{\infty}|a_{m_l j}|\omega\left(\frac{\pi}{n_j}\right)=o(1)\qquad(l\to\infty).\end{aligned}\tag{11}$$

又根据引理 2 可得

$$\sum_{s=p_l}^{t_l-1}\omega\left(\frac{\pi}{q^{s+1}}\right)\int_{\pi/q}^{\pi}\left|\sum_{n_j>\Lambda q^s}a_{m_l j}\sin\left(\frac{n_j}{q^s}t\right)\right|dt$$

$$\geqslant\frac{1}{\Theta}\sum_{s=p_l}^{t_l-1}\omega\left(\frac{\pi}{q^{s+1}}\right)\left(\sum_{n_j>\Lambda q^s}a_{m_l j}^2\right)^{1/2}$$

$$\geqslant\frac{1}{\Theta}\sum_{s=p_l}^{t_l-1}\omega\left(\frac{\pi}{q^{s+1}}\right)\left(\sum_{n_j>q^s}a_{m_l j}^2\right)^{1/2}$$

$$-\frac{1}{\Theta}\sum_{s=p_l}^{t_l-1}\omega\left(\frac{\pi}{q^{s+1}}\right)\left(\sum_{q^s<n_j\leqslant\Lambda q^s}a_{m_l j}^2\right)^{1/2}\equiv\tau_1-\tau_2. \tag{12}$$

当 $q^s<n_j\leqslant\Lambda q^s$ 时，$\omega\left(\frac{\pi}{q^{s+1}}\right)\sim\omega\left(\frac{\pi}{n_j}\right)$，故

$$\tau_2\sim\sum_{s=p_l}^{t_l-1}\sum_{q^s<n_j\leqslant\Lambda q^s}|a_{m_l j}|\,\omega\left(\frac{\pi}{n_j}\right).$$

在上述右边的和式中每个 $a_{m_l j}$ 至多重复出现 $[\log_q\Lambda]+1$ 次，于是

$$\tau_2\leqslant C\sum_{j=0}^{\infty}|a_{m_l j}|\,\omega\left(\frac{\pi}{n_j}\right)=o(1)\quad(l\to\infty). \tag{13}$$

由于 $\omega\left(\frac{\pi}{q^{s+1}}\right)\geqslant\omega\left(\frac{\pi}{q^s}\right)/(q+1)$。故根据 iv) 可得

$$\tau_1>\theta/\Theta(q+1). \tag{14}$$

综合(10)—(14)得到

$$\sigma_{m_l}(f,x_0)-f(x_0)>\frac{2\theta}{\pi\Theta(q+1)}-o(1).$$

因此(3)式不能成立，证明完毕。

从定理证明可得：

系 1　在定理假设下对于算子 $\sigma_m(f,x)$ 的 ebesgue 常数有估计式

$$L_m\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|k_m(t)|\,dt\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n_j>q^k}a_{mj}^2\right)^{1/2}.$$

类似于定理充分性部分的证明可得下述

系 2　设 $N=\{n_k\}$ 和 $A=(a_{mk})$ 如定理所述。以 X 表示空间 $C_{2\pi}$ 或 $L_{2\pi}$。以 $\omega(f,t)_X$ 表示 $f(x)$ 在 X 中的连续模，即 $\omega(f,t)_X=\sup\limits_{0<|h|\leqslant t}\|f(x+h)-f(x)\|_X$。假如

$$\lim_{p\to\infty}\overline{\lim_{m\to\infty}}\sum_{k=p}^{\infty}\omega\left(f,\frac{\pi}{q^k}\right)_X\left(\sum_{n_j>q^k}a_{mj}^2\right)^{1/2}=0, \tag{15}$$

那么 $\sigma_m(f,x)$ 在 X 中强收敛于 $f(x)$。

作为例子，我们来考察几个常见的算子，设 $\alpha,\lambda>0$。记

$$\sigma_m^\alpha(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_m^\alpha(t-x)\,dt,$$

$$R_m^\lambda(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(ft)\,F_m^\lambda(t-x)\,dt,$$

其中

$$K_m^{\alpha}(t)=\sum_{j=0}^{m}\frac{(\alpha-1)_{m-j}}{(\alpha)_m}D_{n_j}(t),\qquad (\alpha)_j=\Gamma(j+\alpha+1)/\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha+1),$$

$$F_m^{\lambda}(t)=\frac{1}{(m+1)^{\lambda}}\sum_{j=0}^{m}[(j+1)^{\lambda}-j^{\lambda}]D_{n_j}(t).$$

根据系 2 可得

系 3 设 α，$\lambda>0$，$N=\{n_k\}$ 满足(1)，$f(x)\in X=L_{2\pi}$ 或 $C_{2\pi}$。那么当 $\omega(f,\ t)_X=o\left(\frac{1}{\sqrt{|\log t|}}\right)(t\to+0)$ 时 $\sigma_m^{\alpha}(f,x)$ 和 $R_m^{\lambda}(f,x)$ 在 X 中强收敛于 $f(x)$。

当 $\alpha=\lambda=1$ 时，这是〔1〕、〔4〕中得到的结论。

对于部分和算子

$$\sigma_m(f,x)=S_{n_m}(f,x)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_{n_m}(t-x)dt,$$

条件(15)等价于$\int_0^{\pi}\frac{\omega(f,t)_X}{t}dt<+\infty$。这时系 2 的结论是熟知的。

参 考 文 献

〔1〕Newman, D. J., Summability methods fail for the 2^nth partial sums of Fourier series, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45 (2) (1974) pp.300—302.

〔2〕Байарстанова, А. С., Суммирование подпоследовательностей частных сумм рядов Фурье, Сибирск. Матем. Журнал, 20(6) (1979) pp. 1185—1197.

〔3〕陈建功，三角级数论(上册)，上海科技出版社 (1964).

〔4〕Байарстанова, А. С., Суммирование подпоследовательностей рядов Фурье, Вест. Моск. Ун-та, сер. 1. Матем. Механ., 1(1980) pp. 29—33.

On the Summability of Partial Sums of Fourier Series

By Shi Xianliang (施咸亮)

Abstract

Let $H_{x_0}^{\omega}$ denote the set of functions $f(x)\in L_{2\pi}$ such that $\omega(f,x_0;t)\leqslant\omega(t)$, $\omega(t)$ being a given modulus of continuity. Let $\{n_k\}$ be a set of natural numbers satisfying the condition $n_{k+1}/n_k>q>1$, and let $A=(a_{mk})$ be a regular summation matrix. Assume that

$$K_m(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{mj}D_{n_j}(x)\in L_{2\pi},$$

with $D_n(x)$ denoting the Dirichlet kernel. In this paper it is proved that the necessary and sufficient condition for

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_m(t-x_0)\,\mathrm{dt}=f(x_0)$$

to be valid for all $f(x)\in H_{x_0}^{\omega}$ is given by (4).