1981年4月 数学研究与评论 创刊

左模的张量积及其同调维数*

周伯壎

(南京大学)

§1 引 言

交换环K上两个代数R与S的张量积$R\underset{K}{\otimes}S$(或者，在不会引起含混时，省去K，改记成$R\otimes S$)的同调维数(global dimension)早在50年代就曾为S. Eilenberg, M. Auslander, T. Nakayama等等这些著名的同调代数学家们研究过(例如见[2]～[5])。他们主要应用模范畴的理论(等价范畴，多项式函子，矩阵函子等等)与Spectral列的理论取得了一系列的良好结果。这样一个被Eilenberg等发觉为"令人惊讶的困难"(见[5]，71页)的课题，仍然有许多问题尚待解决。

本文中所有的环都有单位元，所有的环模都是酉模(Unital module)。

我们将只考虑环的左同调维数，环R的左同调维数将记成lgd R，因而所有环模，除非特别声明，都是左模。R模L的左投射维数将记成$Pd_R L$，或者，如果不会引起误解的话，记成$Pd\,L$。

假定R与S都是K环，L与M为R与S模。于$a\in K$，e_R为R的单位元，$\alpha\in L$时，定义$a\alpha=(ae_R)\alpha=\alpha a$，则$L$与$M$都可看成$K$模。取它们(关于$K$)的张量积$L\underset{K}{\otimes}M$，于$r\in R$，$s\in S$，$\alpha\in L$，$\beta\in M$时，定义$(r\otimes s)(\alpha\otimes\beta)=r\alpha\otimes s\beta\in L\underset{K}{\otimes}M$。可以用多重线性代数的理论证明此定义是良好的，即，当$\sum_i r_i\otimes s_i=\sum_a r'_a\otimes s'_a$，$\sum_j \alpha_j\otimes\beta_j=\sum_b \alpha'_b\otimes\beta'_b$时，必有$(\sum r_i\otimes s_i)(\sum\alpha_j\otimes\beta_j)=\sum(r'_a\otimes s'_a)(\alpha'_b\otimes\beta'_b)$，所以$L\underset{K}{\otimes}M$变成一个$R\otimes S$模。

在[5]命题10中证明了：若K是域，则

$$Pd\,L+WPd\,M\leqslant Pd\,L\underset{K}{\otimes}M\leqslant Pd\,L+Pd\,M, \tag{1.1}$$

这里的$WPd\,M$表示M的弱投射维数。为了讨论(1.1)右边的不等式为等式的充要条件，也为了讨论$L\underset{K}{\otimes}M$的全能性质(Universal property)，我们运用多重线性映射的办法来把R模L与S模M定义成一个张量积$L\otimes M$。它是一个$R\otimes S$模，而且——$\otimes M$是由R模的Abel范畴$\mathscr{C}(R)$到$\mathscr{C}(R\otimes S)$的一个右正合函子，这里并不需要K，R与S有单位元。当

* 1980年12月30日收到。

K，R与S有单位元时，$L\otimes M$ 与 $R\otimes S$ 模，$L\underset{K}{\otimes}M$ 模同构。若K是域，则——$\otimes M$ 也左正合，因而是正合函子。我们将在 §4 中证明。

定理 1 若K是域，则下列的三句话等价：

(i)若 $L_2\subseteq L_1$ 都是投射R模，$M_2\subseteq M_1$ 都是投射S模，则 $L_2\otimes M_1+L_1\otimes M_2$是投射$R\otimes S$ 模$\Longleftrightarrow L_1/L_2$ 与 M_1/M_2 中至少有一个是投射模；

(ii) $$Pd\,L=Pd\,M=1\text{ 时，}Pd\,L\otimes M=2;\tag{1.2}$$

(iii) $$Pd\,L=n,\ Pd\,M=m\text{时，}Pd\,L\otimes M=n+m.\tag{1.3}$$

从(1.1)，若在 $\mathscr{C}(S)$ 中 $Pd\,M=1$ 时，也必 $WPd\,M=1$，则(1.2)必成立，因而有(1.3)。但这是平凡的，因为若

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow Q_m\xrightarrow{\partial_m}Q_{m-1}\xrightarrow{\partial_{m-1}}\cdots\longrightarrow Q_1\xrightarrow{\partial_1}Q_0\xrightarrow{\partial_0}M\longrightarrow 0\tag{1.4}$$

为M的一个投射分解，其中所有的 $Im\partial_{m-1},Im\partial_{m-2},\cdots,Im\partial_0$ 都不投射，则有$Pd\,Im\partial_{m-1}=1$，于是对于任何右S模T，$\mathrm{Tor}_1(T,Im\partial_{m-1})=\mathrm{Tor}_m(T,M)$，故若$WPd\,Im\partial_{m-1}=1$，则必$WPd\,M=m=Pd\,M$。代入(1.1) 即得 (1.3)。

由定理 1 立得

定理 2 若环R与S有性质：在 $Pd\,L=Pd\,M=1$ 时，$Pd L\otimes M=2$，则

$$\lg d\,R\otimes S\geqslant \lg d\,R+\lg d\,S.\tag{1.5}$$

只需补充一句话，(1.3) 中虽然要求 $Pd\,L$ 与 $Pd\,M$ 均有限，但对 (1.5) 却没有类似的要求。因为若 $\lg d\,R=\infty$，则必有 L，其投射分解长度无穷：

$$\cdots\longrightarrow P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}L,$$

其中每一个 $Im\,d_n$ 都不投射，于是作为左 $R\otimes S$模，$L\otimes S$ 有投射分解

$$\cdots\longrightarrow P_n\otimes S\xrightarrow{d_n\otimes\varepsilon}P_{n-1}\otimes S\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\otimes S\longrightarrow P_0\otimes S\longrightarrow L\otimes S,$$

其中每一个 $P_n\otimes S$ 都是投射 $R\otimes S$ 模，而且每一个 $Im\,d_n\otimes\varepsilon$ 都不投射，这里 ε 表示 S 的恒等自同构，于是 $Pd\,L\otimes S=\infty$，因而 $\lg d\,R\otimes S=\infty$。

不等式 (1.5) 中等式可以成立，也可能不成立。例如，设R与S都是域K上有限秩单纯代数（这时所有的L与M都有 $Pd\,L=Pd\,M=0$)，它们的中心为 Φ 与 Ψ。若 Φ 与 Ψ 中至少有一个是K上可分扩域，则 $R\otimes S$ 必是满足极小条件的半单纯环，因而 $\lg d\,R\otimes S=0$。但若 Φ 与 Ψ 两个都不是K上可分扩域，$R\otimes S$ 却可能不是半单纯的（〔6〕660 页），这时 $\lg d\,R\otimes S>0$，因而 (1.3) 中等式不成立。更准确地说，$\lg d\,R\otimes S=0$ 的充要条件是 (i) K 是完全域，或者(ii)若K不完全，有特征$=p>0$，则于$r\in\Phi$，$s\in\Psi$ 时，$r\otimes s\longrightarrow r^p\otimes s^p$ 的映射是环 $\Phi\otimes\Psi$ 的自同构。由此易得，若域K的特征$=p>0$，而R是域K上有限秩单纯代

数，其中心为 Φ，则对任何有限秩单纯代数 S 恒有 $\mathrm{lgd}\, R\otimes S=0$ 的充要条件是：于 Φ 中任何有限个元素 $r_1,r_2,\cdots,r_t$ 在 K 上线性无关时，它们的 p 次幂 $r_1^p,r_2^p,\cdots,r_t^p$ 也在 K 上线性无关。因为对于 S 的中心中的元素 $s_1,\cdots,s_t$，如果 $\sum_{i=1}^{t} r_i^p\otimes s_i^p=0$ 则必 $r_1^p,\cdots,r_t^p$ 在 K 上线性相关，或者所有的 $s_1^p,\cdots,s_t^p$ 都等于 0。

§2 左模的张量积

设 K 为交换环，R 与 S 都是 K 环，暂时可不要求它们有单位元。对于 $R\otimes S(=R\underset{K}{\otimes}S)$ 模 T，R 模 L 与 S 模 M，映射 ϕ：$L\times M\longrightarrow T$ 叫做一个 $R\otimes S$ 映射，如果

$$\phi(\Sigma\alpha_i,\Sigma\beta_j)=\sum_{i,j}\phi(\alpha_i,\beta_j),\qquad \alpha_i\in L,\ \beta_j\in M$$

与

$$\phi(r\alpha,s\beta)=(r\otimes s)\phi(\alpha,\beta),\qquad r\in R,\ s\in S,$$

假定又有 $\otimes_1$：ϕ 是满映射，即，T 是由 ϕ 的象所生成的；与 $\otimes_2$：对于任何 $R\otimes S$ 映射 ψ：$L\times M\longrightarrow W$，恒有 $R\otimes S$ 同态（即模同态）σ：$T\longrightarrow W$，使 $\sigma\phi=\psi$，即，有交换图

$$\begin{tikzcd} L\times M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & T \arrow[dl, dashed, "\sigma"] \\ W & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

则 T 叫做 L 与 M 的张量积，记成 $L\otimes M$，而 $\phi(\alpha,\beta)$ 则记成 $\alpha\otimes\beta$。用〔1〕中的办法（稍加改易，因目前不考虑有单位元）即可证明 $L\otimes M$ 的存在性与唯一性。

以下直到文末，我们都要求 K 以及所有的 K 环都有单位元，所有的模都是酉模(Unital module)。

假定 V 也是一个 K 环，而 L 是右 V 模，M 是左 V 模，则由线性平衡映射可得 L 与 M 的关于 V 的张量积 $L\underset{V}{\otimes}M$，它是一个 K 模，$\alpha\nu\underset{V}{\otimes}\beta=\alpha\underset{V}{\otimes}\nu\beta$，如果 L 是 (R,V) 双模（既是左 R 模又是右 V 模，且 $(r\alpha)\nu=r(\alpha\nu)$），而 M 是左 S，V 模（既是左 S 模又是左 V 模，且 $s(\nu\beta)=\nu(s\beta)$），则当 $r\in R$，$s\in S$，$\alpha\in L$，$\beta\in M$ 时，若令 $(r\otimes s)(\alpha\underset{V}{\otimes}\beta)=r\alpha\underset{V}{\otimes}s\beta$，那么 $L\underset{V}{\otimes}M$ 就定义成一个 $R\otimes S$ 模。取

$$\psi:\ L\times M\longrightarrow L\underset{V}{\otimes}M, \tag{2.2}$$

$$(\alpha,\beta)\longmapsto\alpha\underset{V}{\otimes}\beta,$$

则 ψ 显然是一个 $R\otimes S$ 映射，由上述左模张量积的定义，有 $R\otimes S$ 同态

$$\sigma:\ L\otimes M\longrightarrow L\underset{V}{\otimes}M, \tag{2.3}$$

使

$$(r\otimes s)(\alpha\otimes\beta)=r\alpha\otimes s\beta\longmapsto r\alpha\underset{V}{\otimes}s\beta=(r\otimes s)(\alpha\underset{V}{\otimes}\beta),$$

这个 σ 一般不是模同构，因为当 $\nu\in V$ 时，$\alpha\nu\underset{V}{\otimes}\beta=\alpha\underset{V}{\otimes}\nu\beta$，但在 $L\otimes M$ 中，$\alpha\nu\otimes\beta$ 却不一定等于 $\alpha\otimes\nu\beta$。

命题 1　若$V=K$，则(2.3)中的σ是$R\otimes S$模$L\otimes M$到$R\otimes S$模$L\underset{K}{\otimes}M$的模同构.

证：取(2.1)中的ϕ：$L\times M\longrightarrow L\otimes M$，则于$a,b\in K,\alpha\in L$，$\beta\in M$时，$\phi(a\alpha,b\beta)=(a\otimes b)\phi(\alpha,\beta)=(ab)(\alpha\otimes\beta)$，因此$\phi$也是$K$模$L$与$K$模$M$到$L\otimes M$的一个二重线性映射，故由$L\underset{K}{\otimes}M$的定义，有$\tau$：$L\underset{K}{\otimes}M\longrightarrow L\otimes M$，使

$$ab(\alpha\underset{K}{\otimes}\beta)=a\alpha\underset{K}{\otimes}b\beta\longrightarrow a\alpha\otimes b\beta=ab\alpha\otimes\beta,$$

因此，$\phi\tau$是$L\underset{K}{\otimes}M$的恒等自同构，而$\tau\phi$则是$L\otimes M$的恒等自同构.

§3　正　合　性

仍设R与S都是K环，以$\mathscr{C}(R)$表示所有R模的Abel范畴，则当M为一个S模时，$-\otimes M$是$\mathscr{C}(R)$到$\mathscr{C}(R\otimes S)$的一个共变函子，它把$\mathscr{C}(R)$中的L变成$\mathscr{C}(R\otimes S)$中的$L\otimes M$.

命题 2　函子$-\otimes M$右正合

证：设A，B，C均为R模，且

$$A\overset{\eta}{\rightarrowtail}B\overset{\pi}{\twoheadrightarrow}C\tag{3.1}$$

为短正合列，我们要证

$$A\otimes M\xrightarrow{\eta\otimes\varepsilon}B\otimes M\xrightarrow{\pi\otimes\varepsilon}C\otimes M\tag{3.2}$$

右正合，这里的$(\eta\otimes\varepsilon)(\alpha\otimes\mu)=\eta\alpha\otimes\mu\in B\otimes M$，因而$\eta\otimes\varepsilon$是$R\otimes S$同态（见§4引理2）.

同态$\pi\otimes\varepsilon$显然是满的. 为了证明(3.2)在$B\otimes M$处正合，我们让$\omega=\mathrm{Coker}\,\eta\otimes\varepsilon$，则有下图

$$\begin{tikzcd} A\otimes M \arrow[r, dashed, "\eta\otimes\varepsilon"] & B\otimes M \arrow[r, two heads, "\pi\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "\omega"] & C\otimes M \\ & D \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] & \end{tikzcd}\tag{3.3}$$

由于$(\pi\otimes\varepsilon)(\eta\otimes\varepsilon)=\pi\eta\otimes\varepsilon=0$，故有$\sigma$：$D\longrightarrow C\otimes M$，使

$$\sigma\omega=\pi\otimes\varepsilon.\tag{3.4}$$

对于$\gamma\in C$，选$\beta\in B$，使$\pi\beta=\gamma$，于$\mu\in M$时，定义

$$\psi(r\gamma,s\mu)=\omega(r\beta\otimes s\mu),\quad r\in R,\quad s\in S.$$

映射ψ是一意的，因为若$\pi\beta'=\gamma$，则$\beta-\beta'\in\mathrm{Ker}\,\pi$，故有唯一$\alpha\in A$使$\eta(\alpha)=\beta-\beta'$，所以

$$\omega(r(\beta-\beta')\otimes s\mu)=\omega(r\eta\alpha\otimes s\mu)$$
$$=\omega(\eta\otimes\varepsilon)(r\alpha\otimes s\mu)=0.$$

再者，ψ是$C\times M$到D的一个$R\otimes S$映射，故由张量积的定义，有$R\otimes S$同态τ：$C\otimes M\longrightarrow D$使下图可交换

$$\begin{array}{ccc} C\times M & \xrightarrow{f} & C\otimes M \\ \psi\downarrow & \swarrow\tau & \\ D & & \end{array} \tag{3.5}$$

我们现在证明 $\tau\sigma$ 与 $\sigma\tau$ 相应为D与 $C\otimes M$ 的恒等自同构。事实上，我们有

$$\tau(\gamma\otimes\mu)=\psi(\gamma,\mu)=\omega(\beta\otimes\mu),$$

故

$$\sigma\tau(\gamma\otimes\mu)=\sigma\omega(\beta\otimes\mu)=(\pi\otimes\varepsilon)(\beta\otimes\mu)=\gamma\otimes\mu. \tag{3.6}$$

又从 (3.6) 得

$$\tau\sigma\omega(\beta\otimes\mu)=\tau\sigma\tau(\gamma\otimes\mu)=\tau(\gamma\otimes\mu)=\omega(\beta\otimes\mu).$$

注意到 ω 是满同态，即得命题。

命题 3　若 S 有 K 基$\{\nu_\lambda\}$，而M是一个投射 S 模，则函子 —— $\otimes M$ 左正合，因而是一个正合函子。

证：设有(3.1)，我们要证(3.2)中的 $\eta\otimes\varepsilon$ 是单同态。

先设$M=S$，则 $A\otimes M$ 与 $B\otimes M$ 的任一元都可唯一地表成有限和 $\Sigma\alpha_\lambda\otimes\nu_\lambda$ 与 $\Sigma\beta_\lambda\otimes\nu_\lambda$ 的形式，若 $w=\Sigma\alpha_\lambda\otimes\nu_\lambda\neq 0$ 但 $(\eta\otimes\varepsilon)w=\Sigma\eta\alpha_\lambda\otimes\nu_\lambda=0$，则因 η 是单同态故 α_λ 都 $=0$。

若M是自由 S 模，则M同构于许多 S 的上积，因此如上即知 $\eta\otimes\varepsilon$ 是单同态。

最后，设 F 为自由 S 模， $F=M\oplus P$ 为M与 P 的直和，让

$$M\xrightarrow{\sigma}F \quad 与 \quad F\xrightarrow{\tau}M$$

为相应的内射（嵌入映射）与投射，则有交换图

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes M & \xrightarrow{\varepsilon_A\otimes\sigma} & A\otimes F & \xrightarrow{\varepsilon_A\otimes\tau} & A\otimes M \\ \downarrow\eta\otimes\varepsilon_M & & \downarrow\eta\otimes\varepsilon_F & & \downarrow\eta\otimes\varepsilon_M \\ B\otimes M & \xrightarrow{\varepsilon_B\otimes\sigma} & B\otimes F & \xrightarrow{\varepsilon_B\otimes\tau} & B\otimes M \end{array}$$

其中的 ε_A，ε_B，ε_M，与 ε_F 相应表示A，B，M与 F 的恒等自同构．若有 $0\neq w\in A\otimes M$，但$(\eta\otimes\varepsilon_M)w=0$，则

$$0=(\varepsilon_B\otimes\sigma)0=(\varepsilon_B\otimes\sigma)(\eta\otimes\varepsilon_M)w=(\eta\otimes\varepsilon_F)(\varepsilon_A\otimes\sigma)w.$$

因 $\eta\otimes\varepsilon_F$ 是单同态，故$(\varepsilon_A\otimes\sigma)w=0$，因此

$$0\neq w=(\varepsilon_A\otimes\tau)(\varepsilon_A\otimes\sigma)w=(\varepsilon_A\otimes\tau)0=0.$$

矛盾。

命题 4　假定作为K模，M是自由的，则—$\otimes M$ 为正合函子。

证：设M有K—基$\{\nu_\lambda\}$，则 $B\otimes M$ 中任一元素w都可唯一地表成有限和 $\sum_\lambda\beta_\lambda\otimes\nu_\lambda$，于是，$w=0$ 当且仅当所有的 β_λ 都 $=0$。

§4　投 射 维 数

设K为一域，R与 S 为K上的代数，L与M为R与 S 模。

引理 1　$L\otimes M$ 为投射 $R\otimes S$ 模的充要条件是 L 为投射R模，M为投射 S 模。

证：充分性，设F与G为自由R模与自由S模，$F=L'\oplus L$，$G=M'\oplus M$，于是

$$F\otimes G=L'\otimes M'\oplus L'\otimes M\oplus L\otimes M'\oplus L\otimes M,$$

因$F\otimes G$是自由$R\otimes S$模，故$L\otimes M$为投射$R\otimes S$模，这里不需要K是域。

必要性，设有

$$\sigma:\ L\longrightarrow Q;\qquad\qquad \pi:\ D\longrightarrow\!\!\!\rightarrow Q.$$

考虑

$$\sigma\otimes\varepsilon:\ L\otimes M\dashrightarrow Q\otimes M,\qquad \pi\otimes\varepsilon:\ D\otimes M\longrightarrow Q\otimes M,$$

$$\alpha\otimes\beta\longmapsto\sigma(\alpha)\otimes\beta,\qquad \delta\otimes\beta\longmapsto\pi(\delta)\otimes\beta,$$

因为$\pi\otimes\varepsilon$是满同态，而$L\otimes M$是投射$R\otimes S$模，所以有

$$f:\ L\otimes M\longrightarrow D\otimes M$$

使$(\pi\otimes\varepsilon)f=\sigma\otimes\varepsilon$，以$\{x_\lambda\}$为$M$的一个$K$一基，则$L\otimes M$的任何元素都可唯一地表成$\sum\alpha_\lambda\otimes x_\lambda$。任取$\alpha\in L$，假定$f(\alpha\otimes x_1)=\sum\delta_\lambda\otimes x_\lambda$，则

$$\begin{aligned}(\pi\otimes\varepsilon)f(\alpha\otimes x_1)&=(\pi\otimes\varepsilon)\sum\delta_\lambda\otimes x_\lambda\\&=\sum\pi(\delta_\lambda)\otimes x_\lambda=\sum\gamma_\lambda\otimes x_\lambda.\end{aligned}\tag{4.1}$$

在另一方面，如果$\sigma(\alpha)=\gamma'\in Q$，则

$$(\sigma\otimes\varepsilon)(\alpha\otimes x_1)=\sigma(\alpha)\otimes x_1=\gamma'\otimes x_1.\tag{4.2}$$

比较(4.1)与(4.2)得$\gamma'=\gamma_1$。令$g(\alpha)=\delta_1$，则$\pi g=\sigma$，且g为L到D的模同态，故L为投射R模。同理，M为投射S模。

引理2　设$L_1,L_2\in\mathscr{C}(R)$，$M_1,M_2\in\mathscr{C}(S)$，且有模同态

$$d:\ L_2\longrightarrow L_1;\qquad \partial:\ M_2\longrightarrow M_1,$$

则有$R\otimes S$同态　$f:\ L_2\otimes M_2\longrightarrow L_1\otimes M_1$

使

$$\alpha\otimes\beta\longrightarrow d(\alpha)\otimes\partial(\beta),$$

且

$$Im f=Im d\otimes Im\partial,\tag{4.3}$$

$$Ker\ f=L_2\otimes Ker\ \partial+Ker\ d\otimes M_2,\tag{4.4}$$

这个f常记成$d\otimes\partial$。

证：取$R\otimes S$映射$\sigma:\ L_2\times M_2\longrightarrow L_1\otimes M_1$，

$$(\alpha,\beta)\dashrightarrow d(\alpha)\otimes\partial(\beta),$$

于是由张量积的定义即得f与(4.3)。这里不需要K是域。

等式(4.4)是明显的，因为d与∂首先是域K上的线性空间L_2与M_2的线性变换。

对于引理2中的d与∂，我们定义$R\otimes S$同态

$$d\oplus\partial:\ L_2\otimes M_2\longrightarrow L_1\otimes M_2\oplus L_2\otimes M_1,$$

$$\alpha\otimes\beta\longmapsto d(\alpha)\otimes\beta\oplus\alpha\otimes\partial(\beta)$$

与

$$\partial-d:\ L_1\otimes M_2\oplus L_2\otimes M_1\longrightarrow L_1\otimes M_1,$$

$$\alpha'\otimes\beta\oplus\alpha\otimes\beta'\longmapsto\alpha'\otimes\partial(\beta)-d(\alpha)\otimes\beta'.$$

引理3　设

$$0\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}L\longrightarrow 0,\tag{4.5}$$

$$0\longrightarrow Q_1\xrightarrow{\partial_1}Q_0\xrightarrow{\partial_0}M\longrightarrow 0\tag{4.6}$$

为短正合列，则有正合列

$$0\longrightarrow P_1\otimes Q_1\xrightarrow{d_1\oplus\partial_1}P_0\otimes Q_1\oplus P_1\otimes Q_0$$

$$\xrightarrow{\partial_1-d_1}P_0\otimes Q_0\xrightarrow{d_0\otimes\partial_0}L\otimes M\longrightarrow 0. \qquad (4.7)$$

证：由于——$\otimes Q_1$ 与 $P_1\otimes$——都是正合函子，故

$$d_1\otimes\varepsilon_{Q_1}:\ P_1\otimes Q_1\longrightarrow P_0\otimes Q_1,$$

$$\varepsilon_{P_1}\otimes\partial_1:\ P_1\otimes Q_1\longrightarrow P_1\otimes Q_0$$

都是单同态，这里 ε_{Q_1} 与 ε_{P_1} 是 Q_1 与 P_1 的恒等自同构。作这两个单同态的推出图(Pushout diagram)，得

$$\begin{array}{ccc}
P_1\otimes Q_1 & \xrightarrow{d_1\otimes\varepsilon} & P_0\otimes Q_1\\
{\scriptstyle\varepsilon\otimes\partial_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon_{P_0\otimes Q_1}}\\
P_1\otimes Q_0 & \xrightarrow[\varepsilon_{P_1\otimes Q_0}]{} & P_0\otimes Q_1+P_1\otimes Q_0
\end{array}$$

这里的 d_1 与 ∂_1 都可看成嵌入映射，因而 $P_1\subseteq P_0$，$Q_1\subseteq Q_0$，故有 $P_0\otimes Q_1\cap P_1\otimes Q_0=P_1\otimes Q_1$。于是有正合列

$$0\longrightarrow P_1\otimes Q_1\xrightarrow{d_1\oplus\partial_1}P_0\otimes Q_1\oplus P_1\otimes Q_0$$

$$\xrightarrow{\partial_1-d_1}P_0\otimes Q_1+P_1\otimes Q_0\longrightarrow 0,$$

注意到由引理 2 和 $Ker\ d_0\otimes\partial_0=P_0\otimes Q_1+P_1\otimes Q_0$ 即得正合列(4.7)。

由此立得

推论 1　设 $Pd\ L=Pd\ M=1$，而(4.5)与(4.6)为 L 与 M 的投射分解，则(i) $0<Pd\ L\otimes M\leqslant 2$，(ii) $Pd\ L\otimes M=1\Longrightarrow P_0\otimes Q_1+P_1\otimes Q_0$ 是投射 $R\otimes S$ 模。

再由不等式 (1.1) 立有

推论 2　若 $P_0\otimes Q_1+P_1\otimes Q_0$ 是投射 $R\otimes S$ 模，则

(i) 对任何右 R 模 T，群同态 $T\underset{R}{\otimes}P_1\xrightarrow{\varepsilon\otimes d_1}T\underset{R}{\otimes}P_0$ 是单同态；

(ii) 对任何右 S 模 X，群同态 $X\underset{S}{\otimes}Q_1\xrightarrow{\varepsilon\otimes\partial_1}X\underset{S}{\otimes}Q_0$ 是单同态。

现在用归纳法来证明定理 1．

设 $Pd\ L=n$，$Pd\ M=m$。

当 $n=0$ 时，L 为投射 R 模。取 M 的一个投射分解为

$$0\longrightarrow Q_m\xrightarrow{\partial_m}Q_{m-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow Q_1\longrightarrow Q_0\longrightarrow M\longrightarrow 0,$$

则　$$0\longrightarrow L\otimes Q_m\xrightarrow{\varepsilon\otimes\partial_m}L\otimes Q_{m-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow L\otimes Q_1\longrightarrow L\otimes Q_0\longrightarrow L\otimes M$$

为 $L\otimes M$ 的投射分解，且 $Im\ \varepsilon\otimes\partial_m,\cdots,Im\ \varepsilon\otimes\partial_0$ 都不投射，故 $Pd\ L\otimes M=m=0+m$。

设 $nm\neq 0,1$。不失普遍性，假定 $n\geqslant m\geqslant 1$。取 L 的一个生成系为 $\{a_\lambda\}$，取未定量 $\{x_\lambda\}$

与$\{\alpha_\lambda\}$1—1对应，再令F为定义于$\{x_\lambda\}$上的自由R模．取同态

$$\sigma: F \longrightarrow L,$$

$$\Sigma r_\lambda x_\lambda \longrightarrow \Sigma r_\lambda \alpha_\lambda, \qquad r_\lambda \in R,$$

并令$N = Ker\sigma$，则得一个短正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0,$$

于是有短正合列

$$0 \longrightarrow N\otimes M \longrightarrow F\otimes M \longrightarrow L\otimes M \longrightarrow 0,$$

于$n\geqslant 2$时，$Pd\ N = n-1 \geqslant 1$，故由归纳法的假定，$Pd\ N\otimes M = n-1+m \geqslant 1+m > m = Pd\ F\otimes M$，所以$Pd\ L\otimes M = n-1+m+1 = n+m$（〔7〕372页）．定理得证．

参 考 文 献

〔1〕周伯壎，左环模的张量积及其范畴，南京大学学报，1979年第一期，自然科学版．

〔2〕Eilenberg, S., and Nakayama, T., On the dimension of modules and Alegebras Ⅰ, Nagoya Mathe. J. 9(1955) pp. 1—16.

〔3〕Auslander, M., On the Dimension of Modules and Algebras Ⅱ, Nagoya Mathe. J. a(1955) pp. 67—77.

〔4〕Auslander. M., On the Dimension of Modules and Algebras IV, Nagoya Mathe. J. 11(1956) pp. 61—65.

〔5〕Eilenberg, S., Rosenberg, A. and Zelinsky, D., On the Dimension of Modules and Algebras Ⅷ. Nagoya Mathe. J. 12(1957) pp. 71—93.

〔6〕Van der Waerden, 代数学，曹锡华等译．

〔7〕Carl Faith, Algebra, Rings, Modules and Categories I, Sbringer-Verlag(1973).

On the Tensor Product of Left Modules and Their Homological Dimensions

By *Zhou Boxun* (周伯壎)

Abstract

Let K be a commutative ring, R and S be K-rings, L and M be left R-and S-modules respectively. A mapping ϕ of $L\times M$ into an $R\otimes S(=R\underset{K}{\otimes}S)$ module T is said to be an $R\otimes S$ mapping, if for $\alpha_i\in L$, $\beta_j\in M$, $r\in R$, $s\in S$, $\phi(\Sigma\alpha_i,\Sigma\beta_j)=\sum\limits_{i,j}\phi(\alpha_i,\beta_j)$, $\phi(r\alpha,s\beta)=(r\otimes s)\phi(\alpha,\beta)$. If further, ϕ is epic, and for any $R\otimes S$ mapping ψ: $L\times M\to W$, there is an $R\otimes S$ homomorphism $\sigma:T\to W$, such that $\sigma\phi=\psi$, then T is called the tensor product of L and M, written as $L\otimes M$. If K, R, S all have unit elements, then L and M can be defined as(2-sided) K modules, and it is readily shown that $L\otimes M$ coincides with the left $R\otimes S$ module $L\underset{K}{\otimes}M$. Denote by $Pd_R L$, $Pd_S M$, and $Pd_{R\otimes S}\ L\otimes M$ the projective dimensions. By induction, we proved that, if K is a field, then $Pd_{R\otimes S}\ L\otimes M = Pd_R L + Pd_S M \Longleftrightarrow$ whenever $Pd_R L = Pd_S M = 1$, then $Pd_{R\otimes S}\ LM = 2 \Longleftrightarrow$ whenever $P_2\subseteq P_1$ be projective R modules, $Q_2\subseteq Q_1$ be projective S modules, then $P_2\otimes Q_1 + P_1\otimes Q_2$ is a projective $R\otimes S$ module iff one of P_1/P_2 and Q_1/Q_2 is projective. The proof based on two fundamental facts that—$\otimes M(L\otimes$—) is an exact functor of the Abel category $\mathscr{C}(R)$ ($\mathscr{C}(S)$) of left R modules (S modules) to $\mathscr{C}(R\otimes S)$, and $L\otimes M$ is a projective $R\otimes S$ module iff L is R projective and M is S projective.