# 概率度量空间压缩映象的拟Picard迭代收敛性定理*

游兆永

（西安交通大学）

1942年Menger提出概率度量空间概念[1]，这是把度量空间的一对元$x$与$y$所联系的距离（非负实数）换为一个分布函数所得到的一种空间。以后关于这个空间中的近似方法发展很慢，直到1972年才出现了在该空间中的压缩映象定理[2]。这是一个使用Picard迭代的定理。在这基础上本文引入拟Picard迭代的概念，并在相同的空间和条件下建立了该迭代的四个收敛性定理。

**命题**[2] 设$(S,\mathscr{F},\Delta)$是完备Menger空间，模$\Delta$为连续函数且满足

$$\Delta(x,x)\geqslant x,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{1}$$

若$T$为作用在空间$S$中的概率度量（简记为$PM$）压缩映象，即有常数$\alpha(0\leqslant\alpha<1)$使

$$F(Tp,Tq,\alpha x)\geqslant F(p,q,x),\quad p,q\in S,\quad x>0.$$

则$T$在$S$中存在唯一的不动点$p^*$（即$Tp^*=p^*$）。又对任意$p_0\in S$，当$n\to\infty$时都有$T^np_0$（记为$p_n$）按$PM$意义收敛于$p^*$，即对任意$\varepsilon>0$，$\lambda>0$，存在正整数$N$使

$$F(p_n,p^*,\varepsilon)>1-\lambda\quad(n>N).$$

以上$F(p,q,x)$表示$S$中二元$p$与$q$的概率度量，它是实变量$x$的非降、左连续、下确界为0、上确界为1的实值函数（即上述的分布函数）。

上述命题所用的序列$p_n$实际上是Picard迭代

$$p_{n+1}=Tp_n,\qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{2}$$

由概率度量的定义，(2)式可表示为

$$F(p_{n+1},Tp_n,x)=H(x).$$

$H(x)$是一个特殊的分布函数，即

$$H(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

**定义** 设$\{q_n\}$是完备Menger空间$(S,\mathscr{F},\Delta)$中的序列，$F(q_{n+1},Tq_n,x)$不一定是$H(x)$，但有如同下述定理中的条件成立，则$\{q_n\}$称为拟Picard迭代。

* 1980年11月21日收到。

以下假定上述命题中的全部假设条件都成立，从而 $PM$ 压缩映象 $T$ 有唯一不动点 $p^*$.
由于模 $\Delta$ 的单调性(即 $\Delta(c,d)\geqslant\Delta(a,b)$ 当 $c\geqslant a$，$d\geqslant b$ 时成立)以及(1)，可得

$$\Delta(a,b)\geqslant\min(a,b).$$

**定理一**　若序列$\{q_n\}$是满足下述条件的拟Picard迭代：

$$F(q_{n+1},Tq_n,\beta x)\geqslant F(q_{n+1},q_n,x),\quad x>0,$$

其中 $\beta$ 是满足 $\alpha+2\beta<1$ 的正常数，则当 $n\to\infty$ 时，$q_n$ 按 $PM$ 意义收敛于 $T$ 的唯一不动点 $p^*$.

〔证〕　记 $\gamma=\alpha+2\beta$，则

$$\begin{aligned}F(q_{n+1},p^*,\gamma x)&\geqslant\Delta[F(q_{n+1},Tq_n,2\beta x),F(Tq_n,Tp^*,\alpha x)]\\&\geqslant\Delta[F(q_{n+1},q_n,2x),\ F(q_n,p^*,x)]\\&\geqslant\Delta\{\Delta[F(q_{n+1},p^*,x),F(q_n,p^*,x)],F(q_n,p^*,x)\}\\&=\Delta[F(q_{n+1},p^*,x),F(q_n,p^*,x)]\\&\geqslant\min\{F(q_{n+1},p^*,x),F(q_n,p^*,x)\}.\end{aligned}$$

上式对任意 $x>0$ 成立，于是

$$F(q_{n+1},\ p^*,x)\geqslant\min\left[F\left(q_{n+1},p^*,\ \frac{x}{\gamma}\right),\ F\left(q_n,p^*,\ \frac{x}{\gamma}\right)\right].$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad F(q_{n+1},p^*,\gamma x)&\geqslant\min\left\{\min\left[F\left(q_{n+1},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right),F\left(q_n,\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right)\right],F(q_n,p^*,x)\right\}\\&\geqslant\min\left\{F\left(q_{n+1},\ p^*,\ \frac{x}{\gamma}\right),F\left(q_n,\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right),F(q_n,p^*,x)\right\}\\&=\min\left\{F\left(q_{n+1},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right),F(q_n,p^*,x)\right\}.\end{aligned}$$

上式最后一步用到分布函数的非降性：

$$F\left(q_n,\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right)\geqslant F(q_n,p^*,x).$$

类似地：

$$\begin{aligned}F(q_{n+1},p^*,\gamma x)&\geqslant\min\left\{F\left(q_{n+1},\ p^*,\frac{x}{\gamma^2}\right),F(q_n,p^*,x)\right\}\\&\geqslant\cdots\geqslant\min\left\{F\left(q_{n+1},\ p^*,\frac{x}{\gamma^k}\right),F(q_n,p^*,x)\right\}.\end{aligned}$$

若 $x>0$，则

$$F\left(q_{n+1},\ p^*,\frac{x}{\gamma^k}\right)\to1,\qquad 当\ k\to\infty 时.$$

$$\therefore\quad F(q_{n+1},p^*,\gamma x)\geqslant\min\{1,F(q_n,p^*,x)\}=F(q_n,p^*,x).$$

于是可证

$$F(q_n,\ p^*,\ x)\geqslant F\left(q_{n-1},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right)\geqslant\cdots\geqslant F\left(q_0,p^*,\frac{x}{\gamma^n}\right)\to1,\qquad 当 n\to\infty 时,$$

即对任意 $x>0$，$\lambda>0$，存在正整数 $N$ 使

$$F(q_n,p^*,x)>1-\lambda, \qquad \text{当 } n>N \text{ 时。}$$

故定理得证。

**定理二**　若 $\{q_n\}$ 是满足下述条件的拟 Picard 迭代：

$$F(q_{n+1}\ Tq_n,\beta x)\geqslant F(q_n,Tq_n,x), \qquad x>0,$$

其中 $\beta$ 是满足 $\alpha+\beta+\alpha\beta<1$ 的正常数，则当 $n\to\infty$ 时，$q_n$ 按 $PM$ 意义收敛于 $p^*$。

〔证〕　记 $\gamma=\alpha+\beta+\alpha\beta$，则

$$\begin{aligned}
F(q_{n+1},p^*,\gamma x)&\geqslant\Delta[F(q_{n+1},Tq_n,\beta x+\alpha\beta x),F(Tq_n,p^*,\alpha x)]\\
&\geqslant\Delta[F(q_n,Tq_n,x+\alpha x),F(q_n,p^*,x)]\\
&\geqslant\Delta\{\Delta[F(q_n,p^*,x),F(Tq_n,p^*,\alpha x)],F(q_n,p^*,x)\}\\
&\geqslant\Delta\{\Delta[F(q_n,p^*,x),F(q_n,p^*,x)],F(q_n,p^*,x)\}\\
&\geqslant F(q_n,p^*,x).
\end{aligned}$$

故定理得证。

**定理三**　若 $\{q_n\}$ 是满足下述条件的拟 Picard 迭代：

$$F(q_{n+1},Tq_n,\beta x)\geqslant F(q_n,q_{n-1},x), \qquad x>0,$$

其中 $\beta$ 是满足 $\alpha+2\beta<1$ 的正常数，则当 $n\to\infty$ 时，$q_n$ 按 $PM$ 意义收敛于 $p^*$。

〔证〕　记 $\gamma=\alpha+2\beta$，则

$$\begin{aligned}
F(q_{n+1},p^*,\gamma x)&\geqslant\Delta[F(q_{n+1},Tq_n,2\beta x),F(Tq_n,p^*,\alpha x)]\\
&\geqslant\Delta[F(q_n,q_{n-1},2x),F(q_n,p^*,x)]\\
&\geqslant\Delta\{\Delta[F(q_n,p^*,x),F(q_{n-1},p^*,x)],F(q_n,p^*,x)\}\\
&=\Delta[F(q_n,p^*,x),F(q_{n-1},p^*,x)]\\
&\geqslant\min\{F(q_n,p^*,x),F(q_{n-1},p^*,x)\}.
\end{aligned}$$

类似地：

$$F(q_n,\ p^*,x)\geqslant\min\left\{F\left(q_{n-1},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right),F\left(q_{n-2},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right)\right\}.$$

由 $F(q_{n-1}\ p^*,\frac{x}{\gamma})\geqslant F(q_{n-1},p^*,x)$，故

$$\begin{aligned}
F(q_{n+1},p^*,\gamma x)&\geqslant\min\{F(q_{n-1},p^*,x);F(q_{n-2},p^*,\frac{x}{\gamma})\}\\
&\geqslant\min\left\{\min\left[F\left(q_{n-2},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right),F\left(q_{n-3},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right)\right],F\left(q_{n-2},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right)\right\}\\
&=\min\left\{F\left(q_{n-2},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right),F\left(q_{n-3},\ p^*,\frac{x}{\gamma}\right)\right\}\\
&\geqslant\min\left\{F\left(q_{n-4},\ p^*,\frac{x}{\gamma^2}\right),F\left(q_{n-5},p^*,\frac{x}{\gamma^2}\right)\right\}\\
&\geqslant\cdots\cdots\\
&\geqslant\min\left\{F\left(q_{n-2k},p^*,\frac{x}{\gamma^k}\right),F\left(q_{n-2k-1},\ p^*,\frac{x}{\gamma^k}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

于是可证（当 $x>0$ 时）

$$F(q_{n+1},p^*,\gamma x)\to 1, \qquad \text{当 } n\to\infty \text{ 时。}$$

故定理得证。

**定理四**　若$\{q_n\}$是满足下述条件的拟Picard迭代：

$$F(q_{n+1}, Tq_n, \beta x) \geqslant F(q_n, Tq_{n-1}, x), \qquad x>0,$$

其中$\beta$是满足$\beta<1$的正常数，则当$n\to\infty$时，$q_n$按$PM$意义收敛于$p^*$.

〔证〕　不妨设$\beta>\alpha$，记$\beta-\alpha=\varepsilon>0$，则

$$\begin{aligned} F(q_{n+1}, p^*, \beta x) &\geqslant \Delta[F(q_{n+1}, Tq_n, \varepsilon x), F(Tq_n, p^*, \alpha x)] \\ &\geqslant \Delta\left[F\left(q_1, Tq_0, \frac{\varepsilon x}{\beta^n}\right), F(q_n, p^*, x)\right] \\ &\geqslant \min\left[F\left(q_1, Tq_0, \frac{\varepsilon x}{\beta^n}\right), F(q_n, p^*, x)\right]. \end{aligned}$$

类似地：

$$\begin{aligned} F(q_n, p^*, x) &= F\left(q_n, p^*, \beta\cdot\frac{x}{\beta}\right) \\ &\geqslant \min\left\{F\left(q_1, Tq_0, \frac{\varepsilon\cdot\frac{x}{\beta}}{\beta^{n-1}}\right), F\left(q_{n-1}, p^*, \frac{x}{\beta}\right)\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad F(q_{n+1}, p^*, \beta x) &\geqslant \min\left\{F\left(q_1, Tq_0, \frac{\varepsilon x}{\beta^n}\right), F\left(q_{n-1}, p^*, \frac{x}{\beta}\right)\right\} \\ &\geqslant \cdots\cdots \\ &\geqslant \min\left\{F\left(q_1, Tq_0, \frac{\varepsilon x}{\beta^n}\right), F\left(q_0, p^*, \frac{x}{\beta^n}\right)\right\} \\ &\to 1, \qquad \text{当 } n\to\infty \text{ 时}, \ x>0. \end{aligned}$$

故定理得证.

## 参　考　文　献

〔1〕Menger, K., Statistical Metrics, Proc. Nat. Acad. of Sci., U S A, V. 28 (1942) pp. 535—537.

〔2〕Sehgal, V. M., et al., Fixed Points of Contraction Mapping on Probabilistic Metric Spaces, Mathematical Systems Theory, V. 6 (1972) pp. 97—102.

# Convergence Theorems of Quasi-Picard Iteration of a Contraction Mapping on Probabilistic Metric Spaces

*By You Zhaoyong*(游兆永)

## Abstract

In this paper the notion of quasi-Picard iteration of a contraction mapping on a probabilistic metric space is introduced, and four convergence theorems for such an iteration are proved.