关于多维无穷可分分布的Lebesgue分解*

白志东　苏淳

（中国科技大学）

（一）

设 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 定义在 R^n 上，具备 n 维分布函数的其它各条性质，仅除了 λ 不必为1，即

$$\lambda=\lim_{\substack{x_1\to+\infty\\ \cdots\cdots\\ x_n\to+\infty}} F(x_1,\cdots,x_n)\triangleq VarF$$

可为任何正数。这样的 n 维函数称为 n 维准分布函数。如果 $\lambda=1$，则 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 就是通常所言的 n 维分布函数。当然，我们约定准分布函数对每个变元右连续。

我们讨论了 n 维准分布函数的各项 Lebesgue 性质。为方便起见，仅对 $n=2$ 陈述结果。

称 $F(x,y)$ 为Ⅰ型二维准分布函数，如果 $F(x,y)$ 是一个阶梯函数，即存在有限或无限的点列：

$$\{(x_i,y_i)\}\text{与}\{p_i>0\},\ i=1,2,\cdots,\ \sum_{i=1}^{\infty}p_i<\infty,$$

使

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x,\,y_i\le y}p_i=\sum_{i=1}^{\infty}p_iI_{[x_i\le x,\,y_i\le y]}.$$

称 $F(x,y)$ 为Ⅱ型二维准分布函数，如果 $F(x,y)$ 是一个纵条函数，即存在有限或无限的点列 $\{x_i\}$ 及连续有界非降函数列

$$\{f_i(y)\},\ f_i(y)\not\equiv 0,\ f_i(-\infty)=0,\ i=1,2,\cdots,\ \sum_{i=1}^{\infty}f_i(+\infty)<\infty,$$

使

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}f_i(y)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(y)I_{[x_i\le x]}.$$

称 $F(x,y)$ 为Ⅲ型二维准分布函数，如果 $F(x,y)$ 是一个横条函数，即存在有限或无限的点列 $\{y_j\}$ 及连续有界非降函数列

$$\{g_j(x)\},g_j(x)\not\equiv 0,g_j(-\infty)\neq 0,\ j=1,2,\cdots,\ \sum_{j=1}^{\infty}g_j(+\infty)<\infty,$$

使

$$F(x,y)=\sum_{y_j\le y}g_j(x)=\sum_{j=1}^{\infty}g_j(x)I_{[y_j\le y]}.$$

称二维准分布函数 $F(x,y)$ 为Ⅳ型的，如果它是连续的，但它的支撑是一个二维 Lebes-

* 1980年12月2日收到。

推荐者：陈希孺（中国科技大学数学系）。

gue零测集。

称二维准分布函数 $F(x,y)$ 是Ⅴ型的，如果它绝对连续，即存在可测函数 $g(x,y)\geqslant 0$，使

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}g(u,v)\,du\,dv.$$

其中 $g(x,y)$ 称为 $F(x,y)$ 的密度函数。

通常，我们称Ⅰ型为纯离散型；有时也将Ⅳ型、Ⅴ型或Ⅳ Ⅴ两型的混合统称为连续型。

例1 随机变数 X 服从期望值等于1的Poisson分布；当 $X=k$ 时，随机变数 Y 服从 $[k,k+1]$ 上的均匀分布。则二维随机向量 (X,Y) 的分布函数是Ⅱ型的。

例2 (X,Y) 服从单位圆周上的均匀分布，其分布函数是Ⅳ型的。

例3 设 $c(x)$ 为Cantor函数（$x<0$ 时为0，$x>1$ 时为1），则 $F(x,y)=c(x)\cdot c(y)$ 是Ⅳ型的。

（二）

引理2.1 设 $F(x,y)$ 是一个二维准分布函数。如果 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 对 x，y 分别连续，则必在该点二维连续。

引理2.2 任何二维准分布函数的全体间断点的集合是由至多可列条平行于坐标轴的直线或指向为正的半直线构成。

引理2.3 直线 $x=x_0$ 的全部或一半属于 $F(x,y)$ 的间断点集合，当且仅当 F 在直线 $x=x_0$ 上赋有正测度。

定理2.1 任何二维准分布函数 $F(x,y)$ 必可唯一地分解为

$$F=F_{\mathrm{I}}+F_{\mathrm{II}}+F_{\mathrm{III}}+F_{\mathrm{IV}}+F_{\mathrm{V}}. \tag{2.1}$$

其中 F_{I}，F_{II}，F_{III}，F_{IV}，F_{V} 分别为Ⅰ型、Ⅱ型、Ⅲ型、Ⅳ型、Ⅴ型的二维准分布函数。

定理2.2 设 $F(x,y)$ 为二维准分布函数，则：

1° $F(x,y)$ 为Ⅰ型的当且仅当 $F(x,\infty)$ 和 $F(\infty,y)$ 均离散；

2° $F(x,y)$ 为Ⅱ型的当且仅当 $F(x,\infty)$ 离散，$F(\infty,y)$ 连续；

3° $F(x,y)$ 为Ⅲ型的当且仅当 $F(x,\infty)$ 连续，$F(\infty,y)$ 离散；

4° 当 $F(x,\infty)$，$F(\infty,y)$ 中有一奇异连续，另一连续时，$F(x,y)$ 为Ⅳ型的；

5° 当 $F(x,y)$ 为Ⅴ型时，$F(x,\infty)$ 与 $F(\infty,y)$ 均绝对连续。

但4°、5°之逆不真（可由例2看出）。

定理2.3 i 型的二维准分布函数的凸组合仍为 i 型的，$i=$ Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ。

（三）

定理3.1 设 $\{X_n\}=\{(X_n^{(1)},X_n^{(2)})\}$ 为只取离散值的独立随机向量列，$n=1,2,\cdots$。$\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ $a\cdot s$ 收敛到随机向量 $X=(X^{(1)},X^{(2)})$，F 为 X 的分布函数。则 F 必为纯净型分布函数，即 F 的(2.1)分解式中仅含一种成分。

定理 3.2 关于二维准分布函数的卷积，有：

1° Ⅰ型与任何 i 型的卷积仍为 i 型，$i=$ Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ；

2° Ⅱ型与Ⅱ型的卷积仍为Ⅱ型，Ⅲ型与Ⅲ型的卷积仍为Ⅲ型；

3° Ⅱ型与Ⅲ型的卷积为连续型；

4° 连续型与任何型的卷积为连续型；

5° Ⅴ型与任何型的卷积为Ⅴ型。

（四）

本节讨论无穷可分分布函数 $F(x,y)$ 与其相应的 Levy-Хинчин 谱函数 $G(x,y)$ 的 Lebesgue 性质间的关系。显然，Levy-Хинчин 谱函数 $G(x,y)$ 是一个二维准分布函数。

定理 4.1 若 $G(x,y)$ 为Ⅰ型的，则 $F(x,y)$ 为纯净型的，且可为 5 种纯净型中的任何一种。

定理 4.2 $F(x,y)$ 是Ⅰ型的，当且仅当 $G(x,y)$ 为Ⅰ型的，且

$$\iint_{R^2}\frac{1}{x^2+y^2}dG(x,y)<\infty.$$

定理 4.3 $F(x,y)$ 是Ⅱ型的，当且仅当 $G(x,\infty)$ 离散，且

1° $\displaystyle\iint_{(x\neq 0)}\frac{1}{x^2+y^2}dG(x,y)<\infty$；

2° $\displaystyle\iint_{R^2}\frac{1}{x^2+y^2}dG(x,y)=\infty$.

定理 4.3 $F(x,y)$ 是Ⅲ型的，当且仅当 $G(\infty,y)$ 离散，且

1° $\displaystyle\iint_{(y\neq 0)}\frac{1}{x^2+y^2}dG(x,y)<\infty$；

2° $\displaystyle\iint_{R^2}\frac{1}{x^2+y^2}dG(x,y)=\infty$.

例 4 设 $G(x,y)$ 的跳跃点集合为

$$\left\{\left(\pm\frac{1}{2^j},0\right)_{j=1}^{\infty}\right\}\cup\left\{\left(0,\pm\frac{1}{2^k}\right)_{k=1}^{\infty}\right\},$$

在点 $\left(\pm\frac{1}{2^j},0\right)$ 的跃度为 $\frac{1}{2^{2j}}$，在点 $\left(0,\ \pm\frac{1}{2^k}\right)$ 的跃度为 $\frac{1}{2^{2k}}$，则 $F(x,y)$ 为Ⅳ型的。

例 5 设 $1<\beta<2$，$\frac{1}{2}\beta<\alpha<1$。设 $G(x,y)$ 的跳跃点集合为

$$\{(\pm k^{-\alpha},0)_{k=1}^{\infty}\}\cup\{(0,\pm j^{-\alpha})_{j=1}^{\infty}\},$$

在点 $(\pm k^{-\alpha},0)$ 的跃度为 $k^{-\beta}$，在 $(0,\pm j^{-\alpha})$ 的跃度为 $j^{-\beta}$，则 $F(x,y)$ 是Ⅴ型的。

定理 4.4 若 $G(x,y)$ 是Ⅴ型的，则

1° 如果 $\displaystyle\iint_{R^2}\frac{1}{x^2+y^2}dG(x,y)=\infty$，则 $F(x,y)$ 为Ⅴ型的；

2° 如果 $\displaystyle\iint_{R^2}\frac{1}{x^2+y^2}dG(x,y)<\infty$，则 $F(x,y)$ 在某点 (a,b) 有一个跃度 <1 的跳跃，而在除去半直线 $(x\geqslant a,y=b)$ 及 $(x=a,y\geqslant b)$ 以外各处绝对连续。

例 6 设 Q_n 是有限测度，在圆周 C_n 上具有线密度 $\frac{n}{2\pi}$，在余处为 0，其中 C_n 以原点

为圆心，以$\frac{1}{n}$为半径，$n=1,2,\cdots$。令

$$Q(E)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(E),$$

其中E为二维 Borel 集以Q作为无穷可分分布$F(x,y)$的 Levy 谱测度，则相应的 Levy-Хинчин 谱函数$G(x,y)$是Ⅳ型的，而$F(x,y)$是Ⅴ型的。

例 7 设Q在线段$\left(x=\frac{1}{n},\ |y|\leqslant\left|\frac{1}{n}\right|\right)$上赋有线密度$n^2$，$n=\pm1,\pm2,\cdots$。以$Q$为 Levy 谱测度，则相应的 Levy-Хинчин 谱函数$G(x,y)$是Ⅱ型的，而$F(x,y)$是Ⅴ型的。

定理 4.5 不论$G(x,y)$为何型的二维准分布函数，均有可能产生Ⅴ型的无穷可分分布。

参 考 文 献

〔1〕Blum J. R. and Rosenblatt M., On the structure of infinitely divisible distributions, Pacific J. Math. 9(1959) pp. 1—7.

〔2〕Tucker H. G., Absolute continuity of infinitely divisible distributions, Pacific J. Math. 12 (1962) pp. 1125—1129.

〔3〕Tucker H. G., On continuous singular infinitely divisible distribution functions, Ann. Math. Statist. 35 (1964) pp. 330—335.

〔4〕Tucker H. G., On a necessary and sufficient condition that an infinitely divisible distribution be absolutely continuous, Transations of the American Math. society〔6〕(1965) pp. 316—330.

〔5〕Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., 相互独立随机变数之和的极限分布，1949. 王寿仁译.

〔6〕Takano K., On some limit theorems of probability distributions, Ann. of the institute of statist. Math. Vol. 6, No. 1—2 (1954), pp. 37—113.

〔7〕Hartman P. and Wintner A., On the infinitesimal generators of integral convolutions, Amer. J. Math. 64 (1942), pp. 273—298.

〔8〕Loeve M., Probability Theory, 1960, New york.

〔9〕Halmos R., Measure Theory, 1950, New york.

〔10〕Bocher S. and Chandrasekharan K., Fourier Transforms, 1949, London.

On the Lebesgue Decomposition of the Multidimensional Infinitely Divisible Distributions

By Bai Zhidong(白志东) *and Su Chun*(苏 淳)

Abstract

In this paper we have investigated and proved various Lebesgue properties of the n-dimensional quasi-distributions. 2-dimensional quasi-distributions have been classified into 5 types. It is proved among others that every 2-dimensional quasi-distribution can be expressed uniquely as a sum of 5 functions belonging to different types. Some necessary and sufficient conditions for functions belonging to each given type have been analysed in detail.