二部定向图的最长通路和圈*

张存铨

（曲阜师范学院）

一个没有环的，各对顶点之间至多只有一条弧的有向图，称为定向图。如定向图的顶点集合V为两个子集合V_1和V_2的併，并且属于同一个子集合$V_i(i=1,2)$的两个顶点之间没有弧相连，则称为二部定向图。B.Jackson曾证明[1]：当二部定向图D的各顶点的出入度不小于k，并且$|V(D)|\leqslant 4k$时，D有Hamilton有向圈。本文将给出的定理为：

定理：当二部定向图D的各顶点的出入度不小于k时，D中必有$4k+1$长的有向通路或至少为$4k$长的有向圈。

显然，当$|V(D)|\leqslant 4k$时，不存在$4k+1$长的有向通路，于是必有$4k$长的有向圈（即Hamilton圈）存在。从而，Jackson的结果为本定理的直接推论。

本文将引用下面的符号：

二部定向图$D=(V,A)=(V_1\cup V_2,A)$。$V=V_1\cup V_2$为顶点集合，A为弧集合。A中每一条弧的两个端点分属于V_1和V_2。V_1和V_2的交为空集。

令ν为D的一个顶点，D'为D的一个子图。记(u,ν)为一条从u指向ν的弧。记

$$I_{D'}(\nu)=\{u|u\in V(D'),\ (u,\nu)\in A\},$$

$$O_{D'}(\nu)=\{u|u\in V(D'),\ (\nu,u)\in A\}.$$

当$V(D')=V(D)$时，略去表示子图的下标D'，记为$I(\nu)$，$O(\nu)$（显然，对于本文讨论的定向图，有$|I(\nu)|\geqslant k$，$|O(\nu)|\geqslant k$）。当D'为一个有向圈$C=u_1\cdots u_ru_1$时，记

$$I_C^{+t}(\nu)=\{u_i|u_{i-t}\in I_C(\nu),\ \mathrm{mod}(r)\},$$

$$O_C^{-t}(\nu)=\{u_i|u_{i+t}\in O_C(\nu),\ \mathrm{mod}(r)\}.$$

证明：假如有一个二部定向图D，对上述定理不成立，即不存在长度为$4k+1$的有向通路和长度至少为$4k$的有向圈。则令D中最长的有向通路的长度为$l(l\leqslant 4k)$。记

$$\mathscr{P}=\{P^{(i)}|P^{(i)}=\nu_1^{(i)}\cdots\nu_{l+1}^{(i)}\text{为}D\text{中一条最长有向通路}\}.$$

由$P^{(i)}$为最长，显然，

$$I(\nu_1^{(i)})\subseteq V(P^{(i)}),\ O(\nu_{l+1}^{(i)})\subseteq V(P^{(i)}).$$

* 1980年12月9日收到。

推荐者：邵品琮（曲阜师范学院数学系）。

由二部图的特点，我们有：

$$\{\nu_1^{(i)},\nu_3^{(i)},\cdots,\nu_{2s+1}^{(i)},\cdots\}\subseteq V_1(\text{或 }V_2),\ \{\nu_2^{(i)},\nu_4^{(i)},\cdots,\nu_{2t}^{(i)},\cdots\}\subseteq V_2(\text{或 }V_1).$$

并且，

如 $\nu_1^{(i)}\in V_1$(或V_2)，则 $I(\nu_1^{(i)})\subseteq V_2$(或$V_1$)。

令 $2r^{(i)}=\max\{t\mid \nu_t^{(i)}\in I(\nu_1^{(i)})\}$， $r=\max\limits_{P^{(i)}\in\mathcal{D}}\{r^{(i)}\}$。

令 $P^{(0)}=\nu_1\cdots\nu_{l+1}$，则有 $\nu_{2r}\in I(\nu_1)$。令 $\nu_1\in V_1$。

我们有

1. $2r\geqslant 2k+2$ (1)

如 $2r\leqslant 2k+1$。则由 $\nu_2\in O(\nu_1)$，$I(\nu_1)\subseteq V_2$，可知 $I(\nu_1)\subseteq\{\nu_4,\nu_6,\cdots,\nu_{2k}\}$。而 $|\{\nu_4,\nu_6,\cdots,\nu_{2k}\}|=k-1$，从而矛盾。

2. $2r<l$ (2)

如 $2r=l+1$。则 $P^{(0)}$ 成为一个有向圈。$\nu_2\cdots\nu_{l+1}\nu_1$ 也是一条最长通路。从而 $I(\nu_1)\cup O(\nu_1)\subseteq V_2(P^{(0)})$。于是，$|V_2(P^{(0)})|\geqslant|I(\nu_1)|+|O(\nu_1)|\geqslant 2k$。则 $|V(P^{(0)})|=2|V_2(P^{(0)})|\geqslant 4k$，这与$D$中不存在其长度至少为 $4k$ 的有向圈矛盾。

如 $2r=l$。则由 $O(\nu_{l+1})\subseteq V_2(P)$。存在 $\nu_{2i}\in O(\nu_{l+1})$。于是有 $\nu_{l+1}\nu_{2i}\cdots\nu_{2r}\nu_1\cdots\nu_{2i-1}$，也是一条最长通路。即有 $I(\nu_{l+1})\subseteq V_2(P^0)$。从 $|V_2(P^0)|\geqslant|I(\nu_{l+1})|+|O(\nu_{l+1})|\geqslant 2k$ 可知，$|V(P^{(0)})\setminus\{\nu_{l+1}\}|=2|V_2(P^{(0)})|\geqslant 4k$，即有向圈$\nu_1\cdots\nu_l\nu_1$至少其长为$4k$。从而与假设矛盾。

3. 分 $P^{(0)}$ 为两段：$C=\nu_1\cdots\nu_{2r}\nu_1$ 为一个有向圈，$T=\nu_{2r+1}\cdots\nu_{l+1}$ 为一个通路，由(2)式，$|V(T)|\geqslant 2$。

4. $|O_C(\nu_{l+1})|\geqslant\left\lceil k+r-\dfrac{l-1}{2}\right\rceil>0$， (3)

$$|I_C(\nu_{2r+1})|\geqslant\left\lceil k+r-\frac{l-1}{2}\right\rceil>0。\qquad(4)$$

由 $P^{(0)}$为最长，$V(P^{(0)})\supseteq O(\nu_{l+1})=O_C(\nu_{l+1})\cup O_T(\nu_{l+1})$。由$\nu_l\in I(\nu_{l+1})$，则$O_T(\nu_{l+1})\subseteq\{\nu_{l-2},\ \nu_{l-4},\ \cdots,\ \nu_{l-2t}\}$ $(l-2t\geqslant 2r+1)$。右边的集合有 $t\leqslant\dfrac{l-2r-1}{2}$ 个点。即 $|O_T(\nu_{l+1})|\leqslant\dfrac{l-2r-1}{2}$。于是 $|O_C(\nu_{l+1})|\geqslant k+r-\dfrac{l-1}{2}$。由(1)式和$l\leqslant 4k$，可得 $|O_C(\nu_{l+1})|\geqslant k+(k+1)-2k+\dfrac{1}{2}>1$。

由上，$O_C(\nu_{l+1})\neq\phi$。令 $\nu_i\in O_C(\nu_{l+1})$。则$P^{(1)}=\nu_{2r+1}\cdots\nu_{l+1}\nu_i\cdots\nu_{2r}\nu_1\cdots\nu_{i-1}$，也为$D$的一条最长通路，$I(\nu_{2r+1})\subseteq V(P^{(1)})$。由 ν_{2r+1} 在 $P^{(1)}$ 中与 ν_{l+1} 在 $P^{(0)}$ 中的对称性，类似地可证明 $|I_C(\nu_{2r+1})|\geqslant k+r-\dfrac{l-1}{2}>1$。

分别取上整数，即(3)(4)两式得证。

5．当 l 为偶数时。ν_1，ν_{2r+1}，ν_{l+1}同属于 V_1。

5—1，必有 $I_C^{+2}(\nu_{2r+1})\cap O_C(\nu_{l+1})=\phi$，否则，如有 $\nu_{2i}\in I_C^{+2}(\nu_{2r+1})\cap O_C(\nu_{l+1})$，则有 $P^{(2)}=\nu_{2r+1}\cdots\nu_{l+1}\nu_{2i}\cdots\nu_{2i-2}\nu_{2i-1}=\nu_1^{(2)}\cdots\nu_{l+1}^{(2)}$，其中，$\nu_{2r+1}=\nu_1^{(2)}$，$\nu_{2i-2}=\nu_l^{(2)}$，并且$\nu_l^{(2)}\in I(\nu_1^{(2)})$。由 r 的定义，即有 $2r\geqslant 2r^{(2)}\geqslant l$，与 (2) 式矛盾。

5—2，由5—1，并利用 $l\leqslant 4k$ 及(3)(4)两式可知，

$$|V_2(C)\quad I_C^{+2}(\nu_{2r+1})\cup O_C(\nu_{l+1})|=|V_2(C)|-[|I_C^{+2}(\nu_{2r+1})|+|O_C(\nu_{l+1})|]$$

$$\leqslant r-2\left(\left\lceil k+r-\frac{l-1}{2}\right\rceil\right)=-r-2k+l-2\leqslant -r+\frac{l}{2}-2.$$

于是，必有 $\nu_{2i}\in I_c^{+2}(\nu_{2r+1})$，$\nu_{2i+2t}\in O_C(\nu_{l+1})$，$o\leqslant t\leqslant\frac{l}{2}-r-1$。则有

$$P^{(3)}=\nu_{2r+1}\cdots\nu_{l+1}\nu_{2i+2t}\cdots\nu_{2i-2}\cdots\nu_{2i+2t-1}=\nu_1^{(3)}\cdots\nu_{l+1}^{(3)},$$

其中，　$\nu_1^{(3)}=\nu_{2r+1}$，$\nu_{l-2t}^{(3)}=\nu_{2i-2}$，$\nu_{l-2t}^{(3)}\in I(\nu_1^{(3)})$。

由 r 的定义，即有 $2r\geqslant 2r^{(3)}\geqslant l-2t$。而从 $t\leqslant\frac{l}{2}-r-1$ 可得 $2r\leqslant l-2t-2$，从而矛盾。

6．当 l 为奇数时。

6—1，$I_C^{+1}(\nu_{2r+1})\cap O_C(\nu_{l+1})=\phi$。否则，如有 $\nu_{2i+1}\in I_c^{+1}(\nu_{2r+1})\cap O_C(\nu_{l+1})$，则有

$$P^{(4)}=\nu_{2r+1}\cdots\nu_{l+1}\nu_{2i+1}\cdots\nu_{2i}=\nu_1^{(4)}\cdots\nu_{l+1}^{(4)},$$

其中$\nu_1^{(4)}=\nu_{2r+1}$，$\nu_{l+1}^{(4)}=\nu_{2i}$，$\nu_{l+1}^{(4)}\in I(\nu_1^{(4)})$。由 r 的定义，有 $2r\geqslant 2r^{(4)}\geqslant l+1$，与(2)式矛盾。

6—2，由上，可知

$$|V_1(c)\setminus I_C^{+1}(\nu_{2r+1})\cup O_C(\nu_{l+1})|=|V_1(C)|-[|I_C^{+1}(\nu_{2r+1})|+|O_C(\nu_{l+1})|]$$

$$\leqslant r-2\left(\left\lceil k+r-\frac{l-1}{2}\right\rceil\right)=r-2k-2r+l-1=l-r-2k-1\leqslant\frac{l}{2}-r-1.$$

于是，有 $\nu_{2i+1}\in I_C^{+1}(\nu_{2r+1})$，$\nu_{2i+2t+1}\in O_C(\nu_{l+1})$，$0\leqslant t\leqslant\frac{l}{2}-r$。有

$$P^{(5)}=\nu_{2r+1}\cdots\nu_{l+1}\nu_{2i+2t+1}\cdots\nu_{2i}\cdots\nu_{2i+2t}=\nu_1^{(5)}\cdots\nu_{l+1}^{(5)},$$

其中，$\nu_{2r+1}=\nu_1^{(5)}$，$\nu_{2i}=\nu_{l-2t+1}^{(5)}$，$\nu_{l-2t+1}^{(5)}\in I(\nu_1^{(5)})$。由 r 的定义，有 $2r\geqslant 2r^{(5)}\geqslant l-2t+1$。而从 $t\leqslant\frac{l}{2}-r$，有 $2r\leqslant l-2t$，从而矛盾。

定理证毕。

作者感谢导师邵品琮先生的指导和审阅。

参　考　文　献

〔1〕 Jackson, B., Paths and Cycles in Oriented Graphs, Joint Canada-France Combinatorial Colloquium, 49. June 1979.

The Longest Paths and Cycles in Bipartite Oriented Graphs

By Zhang Cunquan (张存铨)

Abstract

Let D be a bipartite oriented graph in which the indegree and outdegree of each vertex are at least k. The result given in this paper is that D contains either a cycle of length at least $4k$ or a path of length at least $4k+1$. Jackson [1] declared that: if $|V(D)|\leqslant 4k$, D contains a Hamiltonian cycle. Evidently, the result of this paper implies the result given by Jackson.