紧摄动连续映象*

陈文嫄　秦成林

（兰州大学数学力学系）

对于作用在同一空间的映象，有许多成功的不动点理论。相比之下，研究不同空间之间的映象却困难得多。当然，改造研究前一类映象的方法以适用于研究后一类映象的工作，仍然陆续取得进展，例如〔1〕中所叙述的紧摄动连续映象的同伦理论，就得到了较好的应用。

我们的工作是上述同伦理论的加深。这里的思想动机确乎来自Leray－Schauder度理论，如见〔2〕及〔3〕。但为了适用于不同空间之间的映象，证明方法有较多的变动，再者，我们所得的主要结果，甚至对Leray－Schauder映象的特例而言，也是新的。

（一）符号、术语和预备

设X、Z为线性赋范空间，Ω为X中有界开集。设$I:\overline{\Omega}\to Z$为确定的有界连续映象。我们所要讨论的映象是$I(x)$经紧连续摄动所构成，为此引入如下概念。

符号　设M为$\overline{\Omega}$中有界闭集，例如M为$\overline{\Omega}$或为Ω的边界$\partial\Omega$。映象$f:M\to Z$能表成

$$f(x)=I(x)-F(x),$$

其中$F:M\to Z$紧连续，则按〔1〕§5.3B的记号，称$f\in C_I(M,Z)$。再者，如果$f\in C_I(M,Z)$又使得$x\in M$时$f(x)\neq 0$，则称$f\in C_I^0(M,Z)$。

定义　$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$称为平凡的，即它存在延拓$\tilde{f}\in C_I^0(\overline{\Omega},Z)$。反之，若$f\in C_I^0(\partial\Omega,Z)$的任何延拓$\tilde{f}\in C_I(\overline{\Omega},Z)$必在$\Omega$有零点，则称$f$为本质的。

如果能建立某种广义度数理论（例如〔1〕§5.3与§5.4），那末所谓本质即相当于度数不为零，而平凡即相当于度数为零。联想到拓扑方法对研究非线性方程的解和固有元的作用，容易看出，判断映象的本质性和平凡性是一件十分重要的事情。如下的同伦不变性定理（见〔1〕定理5.3.3或〔3〕），就是这方面的最基本的结果。

定理　设X、Z为线性赋范空间，Ω为X中有界开集，$I:\overline{\Omega}\to Z$有界连续。

* 1980年12月11日收到。

设映象$H:\partial\Omega\times[0,1]\to Z$紧连续，即两变元连续且$\overline{H(\partial\Omega\times[0,1])}$紧，又使得$x\in\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$时

$$I(x)-H(x,t)\neq 0,$$

则$C_1^0(\partial\Omega, Z)$中映象

$$f(x)=I(x)-H(x,0),$$

$$g(x)=I(x)-H(x,1)$$

或者同时平凡，或者同时本质。

这个定理当然是很一般的准则，只是由于对具体情形须要用特殊技巧去构造$H(x,t)$，使得应用时常常遇到困难。下面我们利用这个定理，导出$f\in C_1^0(\partial\Omega, Z)$为平凡或本质的具体判别办法。当$X=Z$而$I$为恒等映象时，这些办法是Leray--Schauder理论中已知的相应结果的加强。

（二）平凡性的判别

定理1 设X，Z为线性赋范空间，Z为无穷维。

设Ω为X中有界开集，$I:\overline{\Omega}\to Z$连续有界且$m=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|I(x)\|>0$，由有界性，我们可设$\mathop{Sup}\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|I(x)\|<M<\infty$。

设$F:\partial\Omega\to Z$紧连续，$f(x)=I(x)-F(x)$在$\partial\Omega$上没有零点。我们表$\alpha=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|\geqslant 0$且设$\alpha<M$。

设$x\in\partial\Omega$时$\|F(x)\|\geqslant\sigma\|I(x)\|$，其中$\sigma\geqslant 1-\dfrac{\alpha}{M}$，则映象$f\in C_1^0(\partial\Omega, Z)$是平凡的。

证明 只须证$\sigma\leqslant 1$的情形。

注意M，α及σ的定义，易见$x\in\partial\Omega$时，

$$M-\sigma\|I(x)\|>0,$$

$$\alpha\geqslant(1-\sigma)M.$$

以下分两步证明定理。

第一步替换f成$g(x)=I(x)-G(x)$，其中

$$G(x)=M\frac{1}{\|F(x)\|}F(x).$$

由于$x\in\partial\Omega$时$\|F(x)\|\geqslant\sigma\|I(x)\|\geqslant\sigma m>0$，故$G(x)$有定义且$G:\partial\Omega\to Z$紧连续。

作紧连续映象$H:\partial\Omega\times[0,1]\to Z$为

$$H(x,t)=tG(x)+(1-t)F(x),$$

设有 $x_0\in\partial\Omega$，$0\leqslant t_0\leqslant 1$ 使 $I(x_0)-H(x_0,\ t_0)=0$。

如果 $t_0<\dfrac{\alpha}{M-\sigma\|I(x_0)\|}$，则

$$0=\|I(x_0)-H(x_0,t_0)\|=\|I(x_0)-[M\frac{t_0}{\|F(x_0)\|}+(1-t_0)]F(x_0)\|$$

$$\geqslant\|I(x_0)-F(x_0)\|-\|[M\frac{t_0}{\|F(x_0)\|}-t_0]F(x_0)\|$$

$$=\|I(x_0)-F(x_0)\|-Mt_0+t_0\|F(x_0)\|\geqslant\alpha-t_0(M-\sigma\|I(x_0)\|)>0,$$

此不可能。

如果 $t_0\geqslant\dfrac{(1-\sigma)M}{M-\sigma\|I(x_0)\|}$，则

$$0=\|I(x_0)-H(x_0,\ t_0)\|=\|I(x_0)-\left(M\frac{t_0}{\|F(x_0)\|}+(1-t_0)\right)F(x_0)\|$$

$$\geqslant\|\left(M\frac{t_0}{\|F(x_0)\|}+(1-t_0)\right)F(x_0)\|-\|I(x_0)\|$$

$$=Mt_0+(1-t_0)\|F(x_0)\|-\|I(x_0)\|\geqslant Mt_0+(1-t_0)\sigma\|I(x_0)\|-\|I(x_0)\|$$

$$=t_0(M-\sigma\|I(x_0)\|)-(1-\sigma)\|I(x_0)\|>t_0(M-\sigma\|I(x_0)\|)-(1-\sigma)M\geqslant 0,$$

也不可能。

由于 $\alpha\geqslant(1-\sigma)M$，故上面证得 $x\in\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$I(x)-H(x,\ t)\neq 0$。

据同伦不变性定理，$C_I^0(\partial\Omega,\ Z)$ 中映象

$$f(x)=I(x)-H(x,\ 0)=I(x)-F(x),$$

$$g(x)=I(x)-H(x,\ 1)=I(x)-G(x)$$

或者同时平凡，或者同时本质。

第二步证 g 是平凡的。

表 $S=\{z\in Z/\|z\|=M\}$，则 $G:\partial\Omega\to S$。

据 Z 无穷维又 $\overline{G(\partial\Omega)}$ 紧，总有 $p\in S$，使 $-p\notin\overline{G(\partial\Omega)}$。

作 $E:\partial\Omega\times[0,\ 1]\to Z$ 为

$$E(x,\ t)=(1-t)G(x)+tp,$$

则 $0\notin\overline{E(\partial\Omega\times[0,\ 1])}$。事实上，如有 $x_n\in\partial\Omega$，$0\leqslant t_n\leqslant 1$，使得

$$(1-t_n)G(x_n)+t_np\to 0,$$

由 $\overline{G(\partial\Omega)}$ 紧及 $[0,\ 1]$ 紧，不妨设 $G(x_n)\to z_0$，$t_n\to t_0$，于是

$$(1-t_0)z_0+t_0p=0,$$

既然 $\|G(x_n)\|=M$，故 $\|z_0\|=M$。既然 $t_n\in[0,1]$，故 $t_0\in[0,1]$。对上式取范数得

$$(1-t_0)\|z_0\|=t_0\|p\|,$$

这只有 $t_0=\frac{1}{2}$，从而 $z_0+p=0$。此与 $-p$ 不属于 $\overline{G(\partial\Omega)}$ 矛盾。由此可知，当 $x\in\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$\|E(x,t)\|>$某正数。

作映象 $H:\partial\Omega\times[0,1]\to Z$ 为

$$H(x,t)=M\frac{E(x,t)}{\|E(x,t)\|}$$

$$=M\frac{(1-t)G(x)+tp}{\|(1-t)G(x)+tp\|},$$

它是紧连续的。

由于 $\|I(x)\|<M$ 而 $\|H(x,t)\|=M$，故当 $x\in\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$I(x)-H(x,t)\neq 0.$$

据同伦不变性定理，$C_I^0(\partial\Omega,Z)$ 中映象

$$I(x)-H(x,0)=I(x)-M\frac{G(x)}{\|G(x)\|}=I(x)-G(x)=g(x),$$

$$I(x)-H(x,1)=I(x)-M\frac{p}{\|p\|}=I(x)-p$$

或者同时平凡，或者同时本质。

既然 $p\in S$ 可知 $p\notin I(\overline{\Omega})$，因而 $I(x)-p$ 本身就是 $C_I^0(\overline{\Omega},Z)$ 中的映象，即 $I(x)-p$ 是平凡的，于是 g 也是平凡的。

定理 1 证完。

考察特殊情形 $X=Z$，$I(x)=x$ 为恒等映象。注意到这种情况下，从映象平凡可推出 Leray—Schauder 度 $deg(f,\Omega,0)=0$，故由定理 1 可得出

推论 1 设 X 为无穷维线性赋范空间，Ω 为 X 中有界开集，$0\notin\partial\Omega$，设 $F:\partial\Omega\to X$ 紧连续使得

$$f(x)=x-F(x) \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上没有零点},$$

$$x\in\partial\Omega \text{ 时}, \|F(x)\|\geqslant\sigma\|x\|,$$

其中 $\sigma\geqslant 1-\frac{\alpha}{M}$，而 $\alpha=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|$，$M>\operatorname{Sup}\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|x\|$ 且 $M>\alpha$。则 $deg(f,\Omega,0)=0$。

特别如取推论 1 中 $\sigma=1$，就得到〔2〕中度数计算公式（〔2〕和〔3〕中曾利用此公式导出了范数拉伸压缩的不动点定理及著名的Rothe 正固有值存在定理）。值得强调的是：

第一，〔2〕中采用的证明方法是有限维逼近，无法仿照它来证明定理 1。

第二，推论 1 确实是〔2〕中度数计算公式的加强。下面的例 1 表明，确有映象满足推论 1 的条件而不满足 $\|F(x)\|\geqslant\|x\|$。

第三，定理 1 和推论 1 都是本质无穷维的结论。即缺乏 Z 无穷维的条件，这些结论可能不成立。例如平面上的旋转映象即可作为反例。

例 1　满足推论 1 的条件而不满足 $\|F(x)\|\geqslant\|x\|$ 之例。

取 $X=l^2$，$\Omega=\{x\in X|\ \|x\|<1\}$ 对 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2$，定义

$$F(x)=\begin{cases}(-\frac{1}{2}-x_1,\ 2x_2,\ \cdots,\ 2x_n,\ 0,\ \cdots) & \text{当 } x_1\geqslant 0 \text{ 时}\\ (-\frac{1}{2}+3x_1,\ 2x_2,\ \cdots,\ 2x_n,\ 0,\ \cdots) & \text{当 } x_1\leqslant 0 \text{ 时,}\end{cases}$$

则 $F:\partial\Omega\to X$ 紧连续且

$$f(x)=x-F(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2}+2x_1,\ -x_2,\ \cdots,\ -x_n,\ x_{n+1},\ \cdots) & \text{当 } x_1\geqslant 0 \text{ 时}\\ (\frac{1}{2}-2x_1,\ -x_2,\ \cdots,\ -x_n,\ x_{n+1},\ \cdots) & \text{当 } x_1\leqslant 0 \text{ 时,}\end{cases}$$

于是 $x\in\partial\Omega$ 时，

$$f(x)\neq 0 \quad \text{且} \quad \|f(x)\|=\sqrt{(\frac{1}{2}+2|x_1|)^2+\sum_{i=2}^{\infty}x_i^2}$$

$$=\sqrt{\|x\|^2+\frac{1}{4}+2|x_1|+3x_1^2}\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\|F(x)\|=\begin{cases}\sqrt{(-\frac{1}{2}-|x_1|)^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} & \text{当 } x_1\geqslant 0 \text{ 时}\\ \sqrt{(-\frac{1}{2}-3|x_1|)^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} & \text{当 } x_1\leqslant 0 \text{ 时.}\end{cases}$$

我们取 $\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$M=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\sigma=\frac{1}{2}$，则

$$1-\frac{\alpha}{M}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}}{2}}<\frac{1}{2}=\sigma,$$

$$\|F(x)\|\geqslant\frac{1}{2}\geqslant\sigma=\sigma\|x\|, \quad \text{当 } x\in\partial\Omega \text{ 时,}$$

所以推论 1 的条件满足。

但对 $x=(0, \cdots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)\in\partial\Omega$ 有

$$\|F(x)\|=\frac{1}{2}<1=\|x\|,$$

故条件 $\|F(x)\|\geqslant\|x\|$ 不满足。

（三）本质性的判别

定理 2 设X、Z为线性赋范空间。

设Ω为X中有界开集，$I: \overline{\Omega} \to Z$连续有界，我们不妨设$\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|I(x)\| < M < \infty$。

设$F: \partial\Omega \to Z$紧连续，$f(x)=I(x)-F(x)$在$\partial\Omega$上没有零点。我们表$\alpha=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|\geqslant 0$。

设$x\in\partial\Omega$时$\|F(x)\|\leqslant\tau\|I(x)\|$，其中$\tau\leqslant 1+\frac{\alpha}{M}$。

若映象$I\in C_I^0(\partial\Omega, Z)$本质，则$f\in C_I^0(\partial\Omega, Z)$本质。

证明 由$\tau\leqslant 1+\frac{\alpha}{M}$知$\frac{1}{\tau}(M+\alpha)\geqslant M$。

作映象$H: \partial\Omega\times[0, 1]\to Z$为

$$H(x, t)=tF(x),$$

它是紧连续的而且$x\in\partial\Omega$，$0\leqslant t\leqslant 1$时

$$I(x)-H(x, t)\neq 0.$$

事实上，当$0\leqslant t<\frac{1}{\tau}$时，由$I(x)$在$\partial\Omega$上没有零点，得

$$\|I(x)-H(x, t)\|=\|I(x)-tF(x)\|\geqslant\|I(x)\|-t\|F(x)\|$$

$$\geqslant(1-t\tau)\|I(x)\|>0;$$

当$\frac{1}{\tau}\leqslant t\leqslant 1$时，

$$\begin{aligned}\|I(x)-H(x, t)\|&=\|I(x)-tF(x)\|\\&\geqslant t\|I(x)-F(x)\|-(1-t)\|I(x)\|\\&\geqslant\frac{1}{\tau}\alpha-\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\|I(x)\|\\&>\frac{1}{\tau}\alpha-\left(1-\frac{1}{\tau}\right)M\\&=\frac{1}{\tau}(M+\alpha)-M\geqslant 0.\end{aligned}$$

据同伦不变性定理，$C_I^0(\partial\Omega, Z)$中映象

$$I(x)-H(x, 0)=I(x),$$

$$I(x)-H(x, 1)=I(x)-F(x)=f(x)$$

或者同时平凡，或者同时本质。

定理 2 证完。

讨论特殊情形$X=Z$，$I(x)=x$为恒等映象，$0\in\Omega$，几乎可以完全仿照定理 2 的证明得到

推论 2 设X为线性赋范空间，Ω为X中有界开集，$0\in\Omega$。设$F: \partial\Omega\to X$紧连续使得

$$f(x)=x-F(x)\text{ 在 }\partial\Omega\text{ 上没有零点，}$$

$$\text{当 }x\in\partial\Omega\text{时，}\|F(x)\|\leqslant\tau\|x\|,$$

其中 $\tau\leqslant 1+\dfrac{\alpha}{M}$ 而 $\alpha=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|$，$M>\operatorname{Sup}\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|x\|$。

则 Leray－Schauder 度 $deg(f,\ \Omega,\ 0)=1$。

特别如取推论 2 中 $\tau=1$，就得到熟知的 Rothe 不动点原理（见〔4〕）。对于 $X=R^1$ 情形，经过分析可以看出，从 $\|F(x)\|\leqslant\tau\|x\|$ 必然导出 $\|F(x)\|\leqslant\|x\|$，因此推论 2 与 Rothe 不动点原理是重合的，但下面的例 2 表明，只需考虑 $X=R^2$ 就可知推论 2 确实是 Rothe 不动点原理的加强。

例 2　满足推论 2 的条件而不满足 $\|F(x)\|\leqslant\|x\|$ 之例。

取 $X=R^2$，Ω 为单位球，$x=(x_1,\ x_2)$。

定义映象 $F:\bar{\Omega}\to X$ 如下：

$$F(x_1,\ x_2)=(-(1+\eta)x_1,\ 0)\qquad 0<\eta<1,$$

于是

$$f(x_1,\ x_2)=(x_1,\ x_2)-F(x_1,\ x_2)=((2+\eta)x_1,\ x_2).$$

容易算得

$$\alpha=\inf_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|=1.$$

我们取 $M=1+\varepsilon$，则当 $\varepsilon\to 0$ 时 $1+\dfrac{\alpha}{M}\to 2$，所以只要取 ε 为充分小正数，总可找到 $\tau<1+\dfrac{\alpha}{M}$ 而且 $\tau>1+\eta$。因而当 $x\in\partial\Omega$ 时

$$\begin{aligned}\|F(x)\|&=(1+\eta)\ |x_1|\leqslant(1+\eta)\|x\|\\&=1+\eta<\tau\leqslant\tau\|x\|,\end{aligned}$$

所以推论 2 的条件满足。

但对 $x=(1,\ 0)\in\partial\Omega$ 有

$$\|F(x)\|=1+\eta>1=\|x\|.$$

故 Rothe 定理条件不满足。

（四）附　　记

联合推论 1 与推论 2 可得一个有趣的结论：

推论 3　设 X 为无穷维线性赋范空间，Ω 为 X 中有界开集，$0\in\Omega$，$F:\partial\Omega\to X$ 紧连续。若对 $x\in\partial\Omega$ 恒有 $\|F(x)\|=\|x\|$，则 $F(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上必有不动点。

证明　如不然，$f(x)=x-F(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上没有零点。

由 Ω 有界，故存在 $M>\operatorname{Sup}\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|x\|$ 且 $M>\alpha=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|$。

附带提到，由于 F 紧连续，故 f 映闭集 $\partial\Omega$ 成闭集，因而由 $f(x)$ 在 $\partial\Omega$ 不为 0 可知 $\alpha>0$。

根据推论 1（取 $\sigma=1$）应有 $deg(f,\Omega,0)=0$，根据推论 2（取 $\tau=1$）应有 $deg(f,\Omega,0)=1$。两者矛盾。

推论 3 证完。

如推论 1 后的说明所指出，以平面上旋转映象为例，即知推论 3 的结论对有限维空间 X 是不成立的。下面的例子进一步说明，缺乏 F 紧的条件，推论 3 也是不成立的。

例 3 取 $X=c_0$ 即所有极限为 0 的叙列

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots), \lim_{n\to\infty} x_n=0$$

所构成的空间，范数 $\|x\|=\sup_i |x_i|$。

设 Ω 为 X 中单位球，作 $F: \overline{\Omega}\to X$ 为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)=(1, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots),$$

显然当 $x\in\partial\Omega$ 时，$\|F(x)\|=1=\|x\|$。

但 F 在 c_0 中没有不动点，因为 F 的不动点必满足 $1=x_1=x_2=\cdots$，而 $x=(1, 1, \cdots, 1, \cdots)$ 不属于 C_0。

参 考 文 献

〔1〕Berger, M. S., Nonlinearity and Functional Analysis (1977).

〔2〕郭大钧. Hammerstein 非线性积分方程的解，第二次全国泛函分析会议报告 (1979).

〔3〕陈文塬，非线性泛函分析 (1980).

〔4〕Rothe, E., Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen, Compositio Math 5(1937) pp. 177-197.

Compact Perturbations of a Continuous Mapping

By Chen Wenyuan(陈文塬), *and Qin Chenglin*(秦成林)

Abstract

Let X, Z be normed spaces and Ω a bounded open set in X. Suppose that $I: \overline{\Omega}\to Z$ is a fixed continuous bounded mapping. We discuss the properties essential and nonessential of $f(x)=I(x)-F(x)$, see [1] p.245, where $F: \partial\Omega\to Z$ continuous and compact.

We set

$$\alpha=\inf_{x\in\partial\Omega}\|f(x)\|>0, \quad m=\inf_{x\in\partial\Omega}\|I(x)\|>0, \quad M>\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|I(x)\| \text{ and } M>\alpha.$$

The main results of this paper are:

1. Suppose Z is an infinite-dimensional space and

$$\|F(x)\|\geqslant\sigma\|I(x)\|, \text{ for each } x\in\partial\Omega,$$

where $\sigma\geqslant 1-\dfrac{\alpha}{M}$, then f is nonessential.

2. Suppose

$$\|F(x)\|\leqslant\tau\|I(x)\|, \text{ for each } x\in\partial\Omega,$$

where $\tau\leqslant 1+\dfrac{\alpha}{M}$. If I is essential, so is f.

3. Suppose X is an infinite-dimensional space and $F: \partial\Omega\to X$ is a continuous compact mapping. If for each $x\in\partial\Omega$

$$\|F(x)\|=\|x\|,$$

Then F has a fixed point in $\partial\Omega$.