在初等分析中发展椭圆函数论

莫绍揆

（南京大学数学系）

现在，关于椭圆函数的理论，不管是Weierstrass以前或以后，都是很繁复很艰深的。主要原因是：两种说法都是建基于复变函数理论的基础之上的。具体说来，以前的古典说法是把椭圆函数定义为某种积分（所谓第一型椭圆积分）的反演，这时要证明该反演所得的函数是单值的半纯函数，即所谓反演问题，是一件非常艰难的事情。Weierstrass以后的新说法是把椭圆函数定义为双周期的半纯函数，这时要证明（这是解应用问题时所面临的根本问题）给定一个模数k，恒可造出一个以k为模数的双周期半纯函数，却仍须解决反演问题，不过这问题不放在讨论的开端只放在应用问题处罢了。即使撇开这点不谈，在发展双周期半纯函数的性质时，仍须用到相当深奥的复变函数理论（例如哥西积分公式等等）。还可指出，引入了θ函数以后，要想讨论sn，cn，dn等函数，自Jacobi起，一般都从θ函数入手，其实，θ函数的理论比sn等函数的理论要艰深得多，从θ函数来发展sn等函数，无异于用Γ函数来定义正弦、余弦等三角函数，不但违背历史发展次序，而且违背学习的次序，是完全不够妥当的，目前却一时成了最为盛行的做法．这是很不足取的。

长久以来，人们早已看出，椭圆函数的理论本质上是非常简单的。无论在理论的发展上或者在应用上，它都可以在实数范围内讨论，无须使用艰深的复变函数论。即使提到双周期以及保角映射时，这两部分是非提到复数不可的，但也只使用复数罢了，完全不必使用复变函数论。因此，把椭圆函数论建基于复变函数论之上，不但是不必要的，从实质上说，也是很不自然的。

Weierstrass证明了椭圆函数也可以用具有代数加法定理这个性质来刻划。如果我们从具有代数加法定理这个性质出发，很快便可以求出椭圆函数的导数及其积分，很快便推出其周期性，从而完全不必借助于复变函数论便可以充分地发展椭圆函数理论，其理论非常简明直捷，可以说和初等超越函数处在同样水平。不但如此，由于代数加法定理本身与导数、积分是没有关系的，所以很大一部分椭圆函数论可以先于极限论、微分论、积分论而发展，正像初等超越函数那样。因此我们可以说，椭圆函数论所需要的基础和初等超越函数论所需要的相同，我们可以把椭圆函数和初等超越函数同样对待，甚至于把它作为初等超越函数的一种。可是直到现在，竟然没有一个人尝试从代数加法定理来发展椭圆函数论。

当然，如果凭空地假设存在某某函数具有某某代数加法定理，这不但类似于天外飞来，违反了由实践而上升到理论的过程，而且这种讨论方式绝对不是“初等的”，难于为初学者所接受。理论上说，它对基础的要求是极浅，但实际上，其讨论方式却绝不是初等的。

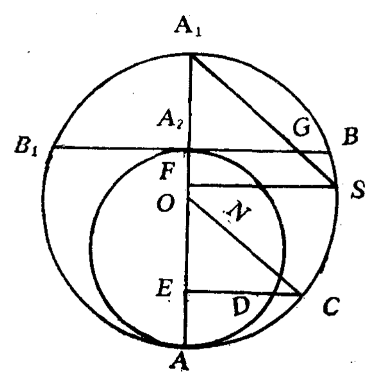
我们还有另一种引入方式，那就是从单摆的运动现像而引入椭圆函数。当讨论单摆运动时，人们都知道如果使用椭圆函数，可把问题表达得非常清楚，可把解答表达得既简单又完全。但从未有人想到利用单摆的运动现像来推出椭圆函数的基本性质。Greenhill 在讨论椭圆函数时曾处处引用单摆运动现像来对照，但他仍是利用椭圆积分来推导椭圆函数的性质，而不是利用单摆运动。如果我们能够从单摆运动的性质而引入椭圆函数，那就正和由几何现象而引入三角函数那样，既极易为初学者所掌握，又完全符合从实践上升到理论的过程。这样我们便能够在初等分析的水平上完全发展了椭圆函数论，为椭圆函数论给出一条新道路。这便是本文的第一部分内容。

此外，目前流行的椭圆函数论之所以艰深难懂，不便初学，除却使用复变函数论以外，还有许多次要的、人为的原因，例如，基本函数选择不当（而且分别讨论两套函数）、标准化的不当、周期选择不当等等，这些毛病如不清除，即使引入新理论也会带来诸多不便。反之，如果把这些毛病清除了，椭圆函数论便真正成了初等超越函数了。这便是本文的第二部分内容。

从单摆运动引入椭圆函数

设有一刚体棒，固定于一支点O上，当棒静止时它处于垂直位置，如对该棒给以一个初速（设向右），然后听任棒受重力作用而运动。假定支点处的阻力与空气阻力可以忽略不计，这便是单摆运动。

根据物理定律，可假定棒的总质量集中于该棒的重心C（名曰摆心）处。支点到摆心的距离名曰摆长，记为l，以O为心以l为半径的圆名曰摆圆。摆静止时摆心的位置A叫做摆的最低位置，A的对径点A_1叫做摆的对顶位置。



在AOA_1直线上有一点A_2使得摆的初速恰为由A_2自由下落到A时所得的速度，A_2名曰摆的模点，以AA_2为直径的圆名曰模圆，模圆与摆圆的直径比（半径比）为k^2（即$\overline{A_2A}/\overline{A_1A}=k^2$），$k$名曰摆的模。令$k'^2=1-k^2$，则$k'$名曰摆的余模。下文就$k^2<1$讨论，但$k^2\geqslant1$仍是可以的。命$\sin\alpha=k$（从而$\cos\alpha=k'$），则$\alpha$名曰摆的模角（当$k^2>1$时，模角为虚角）。从$A_2$作直线垂直于$AA_2$，交摆圆于$B$与$B_1$两点，因$k^2=\overline{AA_2}/\overline{AA_1}=\dfrac{\overline{AA_2}}{\overline{AB}}\cdot\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AA_1}}=\sin^2\angle AA_1B$，故知$\angle AA_1B$即为模角，$B_1$、$B$为摆的最高点（当$k^2>1$时，$B$、$B_1$为虚点）。

当摆运动时命摆心的一般位置为C。过C作$CE\perp AA_1$交AA_1于E，交模圆于D，则$\angle AA_1C$叫做摆的C幅角，记为φ_c，$\angle AA_2D$叫做摆的d幅角记为φ_d。C，D两字母（从而φ_c，φ_d两模角）对今后各函数的命名有极大关系，应熟记之。

今求单摆在C点处的线速度v_c。根据物理学上的能量守恒定律，摆在A点处的能量应与摆在C点处的能量相等，即

$$\frac{1}{2}mv_c^2+mg\overline{AE}=\frac{1}{2}mv_A^2+mg\overline{AA}=\frac{1}{2}mv_A^2\quad(\text{因}\ \overline{AA}=0),$$

这里v_A指摆在A点的速度，根据模点的取法与自由落体定律应有

$$v_A^2=2g\overline{A_2A},$$

因得

$$v_C^2=v_A^2-2g\overline{AE}=2g\overline{A_2A}-2g\overline{AE}=2g\overline{A_2E}.$$

即摆在一般位置C处的速度应和由模点A_2自由下落到E（C在AA_1上的射影点）处的速度相同。

由此可见，要确定摆心的位置C可使用$\angle AA_1C$即φ_c，要确定摆心的速度可用$2g\overline{A_2E}$，但$\overline{A_2E}=2lk^2\cos^2\varphi_d$。因此，如果知道$\varphi_c$，$\varphi_d$两幅角，便可以确定摆心的位置及其速度了。因此这两个幅角及其三角函数便是在研究单摆运动时所必需掌握的。三角函数中以正弦余弦为最基本，又因

$$\overline{AE}=\overline{A_1A}-\overline{A_1E}=2l\sin^2\varphi_c$$

$$\overline{AE}=\overline{A_2A}-\overline{A_2E}=2lk^2\sin^2\varphi_d.$$

故$\sin\varphi_c=k\sin\varphi_d$，因此只需引入三个三角函数便够了。根据 Jacobi，可引入下列三者：命t表时间，作为t的函数，φ_d叫做t的幅角，记为amt。

$\sin\varphi_d$叫做t的幅角正弦，记为$sn(t,k)$；

$\cos\varphi_d$叫做t的幅角余弦，记为$cn(t,k)$；

$\cos\varphi_c$叫做t的幅角Δ，记为$dn(t,k)$

（当然它们还与l有关，我们假定已正规化使$l=g$，从而$\sqrt{\frac{g}{l}}=1$）。

在三角函数中，正弦余弦虽已够用，但是引入六个三角函数更觉方便些。同样，除上述三个函数外，可依 Glaisher，引入下列九个函数更方便：

$$cst=cnt/snt;\qquad dst=dnt/snt;\qquad nst=1/snt;$$
$$sct=snt/cnt;\qquad nct=1/cnt;\qquad dct=dnt/cnt;$$
$$ndt=1/dnt;\qquad sdt=snt/dnt;\qquad cdt=cnt/dnt.$$

根据三角函数的性质，对sn等三个函数可有下列的平方关系式：

$$sn^2t+cn^2t=1;\quad dn^2t+k^2sn^2t=1;\quad dn^2t=k'^2+k^2cn^2t;$$

及

$$dn^2t=cn^2t+k'^2sn^2t.$$

顺便指出一点（这和下文的讨论也有关系）。根据各函数的定义与三角函数的性质，这十二个基本函数中，有十个可以表示为幅角φ_c或φ_d的三角函数，但有两函数即cdt与dct却不能表示成φ_c或φ_d的三角函数（因它们是cnt与dnt的比，不能表示φ_c或φ_d的三角函数）。我们能否引进一个新幅角，把它们表示为该新幅角的三角函数呢？能够的。事实上表明，如果我们不但引进一个新幅角而且引进两个新幅角（与φ_c，φ_d合成四个幅角），那末讨论起来更有系统，更觉对称而简明。这两个新幅角可如下引进。

参照上图，试以A_1E为直径画圆，交BB_1于G。连A_1G，交摆圆于S。从S作线垂直于A_1A，交模圆于N，交A_1A于F，则

$\angle AA_1S$叫做s幅角，记为φ_s，

$\angle A_2AN$叫做n幅角，记为φ_n。

关于这两个幅角可以推出下列的关系。

我们有：
$$\overline{A_1E}=\overline{A_1A}\cos^2\varphi_c$$
及
$$\overline{A_1E}\cos^2\varphi_s=\overline{A_1A_2}=k'^2\overline{A_1A}.$$
两式两边相除得
$$\cos^2\varphi_s=k'^2\sec^2\varphi_c.$$
又由图可得
$$\overline{AA_1}\sin^2\varphi_s=\overline{AF}=\overline{AA_2}\sin^2\angle AA_2N,$$
因$\overline{AA_2}/\overline{AA_1}=k^2$及$\sin\angle AA_2N=\cos\varphi_n$故得
$$\sin\varphi_s=k\cos\varphi_n.$$

这些便是有关φ_s，φ_n的性质。根据φ_c，φ_d，φ_s，φ_n的关系我们可得下列的关系式：

$$\mathrm{cst}=\cot\varphi_d=k'\cot(-\varphi_n),\qquad \mathrm{sct}=\mathrm{tg}\varphi_d=\frac{1}{k'}\mathrm{tg}(-\varphi_n),$$
$$\mathrm{dst}=k\cot\varphi_c=k'\csc(-\varphi_n),\qquad \mathrm{sdt}=\frac{1}{k}\mathrm{tg}\varphi_c=\frac{1}{k'}\sin(-\varphi_n),$$
$$\mathrm{nst}=k\csc\varphi_c=\csc\varphi_d,\qquad \mathrm{snt}=\frac{1}{k}\sin\varphi_c=\sin\varphi_d,$$
$$\mathrm{nct}=\sec\varphi_d=\frac{k}{k'}\cot\varphi_s,\qquad \mathrm{cnt}=\cos\varphi_d=\frac{k'}{k}\mathrm{tg}\varphi_s,$$
$$\mathrm{dct}=k\csc\varphi_s=\sec\varphi_n,\qquad \mathrm{cdt}=\cos\varphi_n=\frac{1}{k}\sin\varphi_s,$$
$$\mathrm{ndt}=\sec\varphi_s=\frac{1}{k'}\cos\varphi_s,\qquad \mathrm{dnt}=\cos\varphi_c=k'\sec\varphi_s$$

这里呈现出很有系统的现象：c，d，n，s四点恰巧对应于四个幅角$\varphi_c,\varphi_d,\varphi_n,\varphi_s$；诸函数名含有的两字母恰巧可用另外两字母的幅角来表示（例如cd可用φ_s或φ_n表示，sn可用φ_c，φ_d表示，等等）。

此外，经验表明，如果我们采用另外的标准化，则以后各关系式将更为简单易记。这另外的标准化如下：对cd,cn,sn多乘以k，对nd,nc,sc多乘以k'，对sd多乘以kk'：例如

$\mathrm{sct}=k'\mathrm{tg}\varphi_d=\mathrm{tg}(-\varphi_n)$，$\mathrm{sdt}=k'\mathrm{tg}\varphi_c=k\sin(-\varphi_n)$，等等（下文将再讨论）。

如想讨论Weierstrass的P函数，可引入：
$$P(t)=\frac{1}{3}(cs^2t+ds^2t+ns^2t)$$
（当然这个$P(t)$的周期须和cs^2t等相同，而不是随意的ω，ω'）。

下面最重要的是求椭圆函数的导数，这可由上面关于ν_c的公式而求得，我们用“$'$”表示对t求导。

一方面
$$\nu_c=l\cdot 2\varphi'_c,$$
另一方面
$$\nu_c^2=2g\overline{A_2E}=4glk^2\cos\varphi_d=4\frac{l^2}{\epsilon^2}k^2\cos^2\varphi_d$$

(这里$\epsilon^2=l/g$，随各单摆而异。在我们正规化下，$l/g=1$，故$\in=1$)。

故得
$$2l\varphi_c'=2\frac{l}{\in}k\cos\varphi_d,$$

即
$$\varphi_c'=\frac{k}{\in}\cos\varphi_d=\frac{k}{\in}\mathrm{cnt}.$$

φ_c的导数既得，于是有：

$$(k\sin\varphi_d)'=(\sin\varphi_c)'\text{ 即 }k\cos\varphi_d\cdot\varphi_d'=\cos\varphi_c\cdot\varphi_c',$$

即
$$k\,\mathrm{cnt}\cdot\varphi_d'=\mathrm{dnt}\cdot\frac{k}{\in}\mathrm{cnt},\text{ 故 }\varphi_d'=\frac{1}{\in}\mathrm{dnt}.$$

又
$$(\mathrm{snt})'=(\sin\varphi_d)'=\cos\varphi_d\cdot\varphi_d'=\mathrm{cnt}\cdot\frac{1}{\in}\mathrm{dnt}=\frac{1}{\in}\mathrm{cnt}\,\mathrm{dnt}.$$

$$(\mathrm{cnt})'=(\cos\varphi_d)'=-\sin\varphi_d\cdot\varphi_d'=-\mathrm{snt}\cdot\frac{1}{\in}\mathrm{dnt}=-\frac{1}{\in}\mathrm{snt}\,\mathrm{dnt}.$$

$$(\mathrm{dnt})'=(\cos\varphi_c)'=-\sin\varphi_c\cdot\varphi_c'=-k\,\mathrm{snt}\cdot\frac{k}{\in}\mathrm{cnt}=-\frac{k^2}{\in}\mathrm{snt}\,\mathrm{cnt}.$$

在正规化下，$\in=1$，上面的导数便和通常的一样了。

可见，由单摆运动很容易得出椭圆函数的导数。

有了导数公式后，我们可以很容易地导出椭圆函数的加法定理。对此也可以从单摆运动现象下手（见Greenhill的书），但是那样较为曲折麻烦，我们可使用纯分析的推导。

试命$y=a-x$（a为常数），$u=snx$，$v=sny$，试用“,”表示对x求导数，则有

$$u'=cnx\,dnx,\text{ 故 }u'^2=(1-u^2)(1-k^2u^2);$$

$$v'=cny\,dny\cdot y'=-cny\,dny,\text{ 故 }v'^2=(1-v^2)(1-k^2v^2).$$

再对x求导，并除以$2u'$与$2v'$得

$$u''=-(1+k^2)u+2k^2u^3,\quad v''=-(1+k^2)v+2k^2v^2.$$

容易算得

$$\frac{u''v-v''u}{u'v-v'u}=\frac{2k^2uv(u^2-v^2)}{(v^2-u^2)(1-k^2u^2v^2)},$$

即
$$\frac{(u'v-v'u)'}{u'v-v'u}=\frac{(1-k^2u^2v^2)'}{1-k^2u^2v^2},$$

积分得$u'v-v'u=c(1-k^2u^2v^2)$，c为积分常数。

如令$x=a$得$y=0$，从而$v=0$，$u=sna$，$v'=-1$（u'的值没有影响）代入上式得

$$sna=c(1-k^2\cdot 0),\qquad\therefore\quad c=sna.$$

如用 $a=x+y$ 代入则得

$$sn(x+y)=sna=c=\frac{u'v-v'u}{1-k^2u^2v^2},$$

即

$$sn(x+y)=\frac{snx\,cny\,dny+sny\,cnx\,dnx}{1-k^2sn^2x\,sn^2y},$$

这便是常见的加法定理。

至此椭圆函数论的发展已没有困难，我们可根据积分而引入 E 函数、Z_n函数、θ函数等，再根据对 P 函数的积分而引入 ζ 函数、σ 函数等。以后又求各函数的三角展式及无穷乘积等，这里便不多说了（可在实数域内展开，但如利用虚周期则更简便）。

从单摆运动极易知道它是周期函数，如果引入虚数，并假定虚数 i 的性状和常数一样，也极易引入虚周期，从而知道椭圆函数为双周期函数（见 Greenhill 的书），这里也不多说了。只需指出一点，这些推导都可以在初等分析的水平上进行。

以上本文的第一部分完。

对现行椭圆函数论的主要改革

现行椭圆函数论之所以艰深难懂，除却因为建基于复变函数论外，还有很多次要原因，急待改革。

第一，函数多寡选择不当。现在大家一致使用两套函数，即所谓 Jacobi 函数和 Weierstrass 函数。这两套函数真可说是截然有别，泾渭分明，彼此互不"干扰"，互不影响。除却专门讨论两套函数之间的关系以外，任何人任何书都从来不把两套函数写在同一公式上，看来这两套函数岂但是彼此互不干扰，简直是彼此冰炭不相容，不能见面的了。其实，这两套函数都表示同一内容——椭圆函数，为什么不能同时使用、彼此互相帮助、互相补充呢？借助于 Jacobi 函数，$p'(t)$ 极易表成三个单值解析函数之积，但迟迟没有表示，直到很久以后，在 Weierstrass 系统中引入 σ 函数以后，才作表示。p 函数的加法定理，如用 Jacobi 函数可表示得相当简单，但从来不用，只能利用 p 而表成很复杂的式子。更奇怪的是，对 E 函数变成周期函数后，可得 Z 函数，再积分便得 θ 函数，这是Jacobi时代已经知道的。如果对 Weiertrass 系统的 ζ 函数也变成周期函数，同样可得 E 函数及 θ 函数，可见 Z 函数与 θ 函数应该是两套系统"公用"的，但因为它是由 Jacobi 发现的，讨论 Weierstrass 函数的人，绝口不谈它们。Jacobi 对 θ 函数推出四项公式，Weierstrass对 σ 函数推出三项公式，其实不论 θ 或 σ，都有四项公式及三项公式，但迄今人们对 θ 永只讨论四项公式，对 σ 永只讨论三项公式，似乎定有专利权不许对方使用似的。其实这两套函数，本是同一内容的不同部分，应该配合使用，所谓合则两美，离则两伤。目前的彼此不相见面的做法是完全错误的。下文我们坚决主张两套合用。

即使两套函数合用以后，目前所选用的函数仍极不适当，须作大量的更动与补充。

首先，关于基本椭圆函数，在 Jacobi 系统中只用 sn，cn，dn 三者，Cayley 甚至公开声言"所谓椭圆函数，严格说来，只有 sn，cn，dn 三个"云云。其实如果只使用这三个，

则加减半周期等诱导公式，变元变换公式（如虚变元公式）等都异常繁复而不便于使用。Glaisher 引入 cs，ds，ns 等九个（与上三个合共 12 个）函数实在是很合用的，正如三角函数论中，除正余弦之外，还须再引入正切等四个函数一样，是完全必要的，但目前竟然还未得人们的普遍承认，实是很奇怪的。

同样，只使用 p 函数一个也是极不方便的，我们必须再引入 $p(u+\omega)$，$p(u+\omega')$，$p(u+\omega+\omega')$ 才成。这三者可记为 $p_c(u)$，$p_n(u)$，$p_d(u)$（我们想象：ω 相当于 ω_c，ω' 相当于 ω_n，$\omega+\omega'$ 相当于 ω_d）；为一致起见，$p(u)$ 可记为 $p_s(u)$。

由基本椭圆函数诱导而得的有关函数，以前也是取舍失当的，由 p 函数积分而得的 ζ 函数对它加减半周期的诱导公式很不简单，须引入由 p_c，p_d，p_n 积分而得的函数，记为 ζ_c，ζ_d，ζ_n；为一致起见，ζ 函数可记为 ζ_s（这也可有别于 Riemann 的 ζ 函数）。

在 Jacobi 系统中，以前只引入 $E_u=\int_0^u dn^2u\,du$ 一个，这是非常不够用的，因为要把12个基本椭圆函数平方的积分都用 E_u 表示，便很繁难不易记忆。Neville 建议把 12 个函数平方的积分全作为基本，用特殊符号表示，这又太多了，试看 Neville 的著作，可见这样做法同样引起极大的不方便。最妥当的办法是在同极点的函数中只选取一个。如果采用 E（它即 dn^2z 的积分），那便应选取函数 cs^2，sc^2，nd^2，dn^2 的积分，但是，根据各种现象，尤其是根据椭圆函数就模数 k 而求导的公式（其中明显地出现 cn^2 等函数的积分），应该选取 ds^2，nc^2，sd^2，cn^2 的积分作为基本才对，这些积分分别记为 D_s，D_c，D_d，D_n（合称 D 函数），可以说，D 函数是与 ζ 函数相当的函数（用以代替 E 函数）。

ζ 函数与 D 函数都不是周期函数，但从它们减去一个线性函数后，便得到周期函数了，所得的结果函数（双方一致）记为 Z 函数，一共四个，Z_s，Z_c，Z_d，Z_n。（以前 Jacobi 得出的是 Z_n 函数）。

对四个 ζ 函数积分可得四个 σ 函数，以前记为 σ，σ_1，σ_2，σ_3，对四个 Z 函数积分可得四个 θ 函数，以前记为 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4（或 θ_0 或 θ），而与 θ 有关的无穷乘积则记为 Q_0，Q_1，Q_2，Q_3，其间的足码完全不相应，呈现出极大的混乱，我们主张改成一律：σ_s，σ_c，σ_d，σ_n；θ_s，θ_c，θ_d，θ_n 及 Q_s，Q_c，Q_d，Q_n（由这里便可看见以前只讨论 ζ_s，E_n，Z_n 的不方便处了）。

Jacobi 还由 E_u 而引入 $\Omega(u)$，但这个函数一无用处，应予删除（其实 ζ，σ 函数的用处也不大，几乎全可用 Z 及 θ 函数来代替）。

对第三型椭圆积分，以前只引入一种新函数，或用（甲）$\int_0^u \frac{pa'}{pu-pa}du$，或用（乙）$\int_0^u \frac{k^2 sna\,cna\,dna\,sn^2u\,du}{1-k^2sn^2a\,sn^2u}$。近来 Neville 建议添入三个：（丙）$\int_0^u \frac{nsa\,csa\,dsa\,du}{ns^2u-ns^2a}$，（丁）$\int_0^u \frac{k'^2sca\,nca\,dca\,sc^2u\,du}{1-k'^2sc^2a\,sc^2u}$，（戊）$\int_0^u \frac{k'^2k^2sda\,nda\,cda\,sd^2u\,du}{1-k'^2k^2sd^2a\,sd^2u}$。其实，（甲）（丙）（丁）实际上是一样的，（乙）（戊）实际上也是一样的，这些式子由于椭圆函数取值的限制，当 a 为实数时，不能包括一切情形（如使用复数 a，则讨论更复杂，不能考虑）。比较起来，还是 Legendre 所使用的（己）$\int_0^u \frac{du}{1-asn^2u}$ 最好，它所能代表的情况比（甲）～（戊）合起来所代表的还多得多。但是如果只使用（己），便和只使用 p，只使用 ζ，只使用 Z 等一样是非常不便的。因此对第三型椭圆积分应该同时引入四种函数：

$$\Pi_s(u,a)=\int_0^u\frac{du}{ds^2u-a},\qquad \Pi_c(u,a)=\int_0^u\frac{du}{dc^2u-a},$$

$$\Pi_d(u,a)=\int_0^u\frac{du}{k^2cd^2u-a},\qquad \Pi_n(u,a)=\int_0^u\frac{du}{k^2sn^2u-a}.$$

以前从来没有人这样提议过，难怪第三型积分算是最麻烦的了。

经过这样添补以后，椭圆函数论可简化不少。

第二，函数的标准化不当，在作理论的探讨时，我们当然要把所使用的函数标准化。最简单的标准化法（下文叫做素朴标准化法）是把“最前项”系数变为1，具体说来，当原点非函数 $f(x)$ 的零点也非极点时，取 $f(0)=1$；当原点为 a 级零点时，取 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^a}=1$；当原点为 a 级极点时，取 $\lim\limits_{x\to 0}x^af(x)=1$。这种素朴标准化法是那么自然，看来很难有别的标准化可供使用。因此，全部的椭圆函数，除 θ 函数以外，全部使用这种素朴标准化法。就是 θ 函数，后来也有人（例如 Neville）主张改用素朴标准化法。如果其主张被采纳，那更是素朴标准化法的一统天下了。

细究起来，素朴标准化法的好处只在于作有理运算时能够始终保持“标准化”，即当 $f(x)$，$g(x)$ 符合标准化时，那末 $1/f(x)$ 与 $g(x)/f(x)$ 也符合标准化。但除此以外，素朴标准化并没有什么好处。

椭圆函数的特点是周期函数，设广义周期为 $2T$，即有 $f(x+2T)=\pm f(x)$。这时 $f(x+T)$ 须作为基本函数而引入，记为 $g(x)$。如果我们选取 $f(x+T)$ 为 $g(x)$，则有

$$f(x+T)=g(x),\qquad g(x+T)=\pm f(x),$$

关系十分简单。如果要作素朴标准化，则 $g(x)$ 须取为 $f(x+T)/f(T)$，于是将有

$$f(x+T)=f(T)g(x),\quad g(x+T)=\pm\frac{1}{f(T)}f(x),$$

那就麻烦得多了。正是考虑到这点，Jacobi 才对 θ 函数放弃素朴标准化，于是 θ 函数的加减半周期的诱导公式十分简单；反之，Weierstrass 对 σ 函数采取素朴标准化，σ 函数加减半周期便复杂得多了。一般书竟然不敢讲 σ 函数加减半周期的有关公式，原因在此。

Jacobi 和 Glaisher 对十二个基本椭圆函数用素朴标准化，结果这十二个函数加减半周期公式便麻烦异常，例如有

$$cn(u+K)=-k'sdu,\qquad dn(u+K)=k'ndu,$$

$$sd(u+K)=\frac{1}{k'}cnu,\qquad nd(u+K)=\frac{1}{k'}dnu,$$

等等。九函数的引入本为简化诱导公式而来，如今仍出现繁复的系数，Glaisher 的九函数所以不被普遍使用，原因便在这里。

我们试作如下标准化：

cs,ds,ns,dn,dc（s 尾及 d 头函数）最前项系数为 1，

cd,cn,sn（c 头及 sn）最前系数为 k，

nd，nc，sc（n 头及 sc）最前系数为 k'，

又 sd 的最前系数为 kk'。

把标准化作这样的改革后，椭圆函数的公式可以简化不少，读者试改用这些新标准来重写各诱导公式便知。

值得指出，Jacobi 对 θ 函数的标准化虽然很好，但仍可以再行改进。他的标准化是要求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\theta_s(x)}{x}=\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}\,\frac{2K}{\pi},\quad \theta_c(0)=\sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\quad \theta_d(0)=\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\quad \theta_n(0)=\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}.$$

但就别的椭圆函数而言，各函数在原点处的值只和 k 有关（k 的代数函数），完全与周期 K 无关，这里却出现了 $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$，致使 θ 函数的变换公式凭空添了麻烦。如果我们改而要求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\theta_s(x)}{s}=\sqrt{kk'},\quad \theta_c(0)=\sqrt{k},\quad \theta_d(0)=1,\quad \theta_n(0)=\sqrt{k'},$$

那末，θ 函数的变换公式可以更简，而别的公式仍然不变（只是三角展式和无穷乘积须乘上一系数，从而下页的公式（*）不再成立）当然较前完美得多了。

改定标准化方法，是我们的改革的一个主要内容。

第三，周期的选取不当。椭圆函数的一大特点是周期函数，因而周期的选取是有一定影响的，如果 $f(x)$ 以 T 为周期，那末 $f\left(\frac{Tx}{a}\right)$ 便以 a 为周期，可见只需对自变元作个一次变换，便可把周期选取为任何非零数，因此周期的选取本来是影响极微的。可是现行椭圆函数论竟然使用三个不同的广义周期（即满足下条件的 $2T$：$f(x+2T)=\pm f(x)$）：

Jacobi 系统函数（除 θ 函数外）用 $2K$，$2iK'$，

θ 函数　　用 2，2τ（或 2π，$2\pi\tau$），

Weierstrass 系统函数　　用 2ω，$2\omega'$。

这三组函数不但使用不同周期，而且彼此毫不通融，坚决互不相让，这实在是很使人奇怪的。结果便使得在讨论各函数时出现极为繁复的关系式。我们举几个例子。

当讨论 p 函数与 Jacobi 函数的关系时，我们有：

$$sn\,(u,\ k)=\frac{(e_1-e_3)^{1/2}}{(p(u/\sqrt{e_1-e_3})-e_3)^{1/2}}\quad 或\quad pu=e_3+\frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\ \frac{1}{sn^2(\sqrt{e_1-e_3}u)}.$$

如果使用相同的周期，本来可以写成

$$pu=e_1+cs^2u=e_2+ds^2u=e_3+ns^2u.$$

两相比较，繁简相去太远了。

常数之间的关系也然，例如我们有：$E=\frac{e_1\omega+\eta}{(e_1-e_3)^{1/2}}$，如果使用相同的周期 $2K$，则可写成 $E=e_1K+\eta$，简单得很。

就算同是 Jacobi 系统的函数，由于 θ 函数的周期不同，也招致麻烦。现在人们大都由 θ 函数而定义基本椭圆函数，用下列定义为基本出发点：

$$snu=\frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_1(u/\theta_3^2)}{\theta_4(u/\theta_3^2)},\quad cnu=\frac{\theta_4\theta_2(u/\theta_3^2)}{\theta_2\theta_4(u/\theta_3^2)},\quad dnu=\frac{\theta_4\theta_3(u/\theta_3^2)}{\theta_3\theta_4(u/\theta_3^2)}.$$

这那里象是引入新函数！难怪 Neville 批评说，基本函数的这些定义，一开始便显出了人工做作的毛病，其实如果使用相同的周期，则在素朴标准化之下它的定义为：

$$snu=\frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_1(u)}{\theta_4(u)},\quad cn\,u=\frac{\theta_4}{\theta_2}\frac{\theta_2(u)}{\theta_4(u)},\quad dnu=\frac{\theta_4\theta_3(u)}{\theta_3\theta_4(u)}.$$

在我们的标准化之下，关系式更简而有系统。

既然改变周期是轻而易举之事，既然周期不统一招致极大的麻烦，那末统一周期是必不可免的了。以前人们安于使用不同周期，实在奇怪。我们看看，以前人们为什么要使用三套不同周期。

基本椭圆函数和 Z 函数之使用 $2K$，$2iK'$，是有道理的，因为如果使用别的周期，则将有

$$sn'u=\in cnu\ dnu,\quad cn'u=-\in snu\ dnu,$$

等等。要使这个$\in$为“1”，只有选取 $2K$，$2iK'$ 为周期，这和对三角函数选取 2π 为周期一样，可以使导数公式（这是最常用的公式）得到简化，是极有道理的。

顺便可以指出，椭圆函数除具有周期 $2K$，$2iK'$ 以外，还有周期 $2(K+iK')$，此外在一定意义上，0 也是椭圆函数的周期。可以说，$0,2K,2iK'$，$2(K+iK')$是椭圆函数的四个最重要的周期。如果我们把它们分别记为 $K_s(=0)$，$K_c(=K)$，$K_n(=iK')$，$K_d(=K+iK')$，那末这四个数值与椭圆函数具有密切的关系。

首先，基本椭圆函数 sn，cn 等，以第一个字母相应的 K 为零点，以第二个字母相应的 K 为极点，例如，sn 函数以 $K_s(=0)$ 为零点，以 K_n 为极点，而 cd 以 K_c 为零点，以 K_d 为极点，等等。此外，命 q 为 s,c,d,n 之一，则 p_q，Z_q，D_q，ζ_q 以 K_q 为极点，而 θ_q，σ_q 以 K_q 为零点，等等。可见，K_s，K_c，K_d，K_n 等的足码与各椭圆函数的命名有极密切的关系。可以说，由各椭圆函数的命名便可知道各函数的零点与极点（这是半纯函数的最重要之点）了。

以前我们引入四种幅角 φ_s，φ_c，φ_d，及 φ_n，由这四个幅角的足码而决定各基本函数的命名，但那样做法还嫌有点迂迴不够直捷。现在则很直捷地便可以得出各函数的命名了。

对 θ 函数，最初本来也是选 $2K$，$2iK'$ 为周期的（这时记为 Θ_u 与 H_u），因为最初是由 sn 等函数而导出 Θ 函数的。后来发现了 θ 函数的三角展式、无穷乘积后，直接由展式而讨论 θ 函数（再由 θ 函数而讨论 sn 等函数），这时便以 2π，$2\pi\tau$（或 2，2τ）为周期更为方便了。另外，对 θ 函数也常常使用

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\theta_a u=4\pi\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_a u \tag{*}$$

一式，这式只当周期与 k 无关时才成立。基于这两点，故对 θ 函数便改用2π，$2\pi\tau$ 为周期了。

如果独立发展 θ 函数，这种做法是很对的，但如果在椭圆函数范围内发展 θ 函数，那末 θ 函数仍应以 $2K$，$2iK'$ 为周期，使它们与 sn 等函数的关系式得到本质的简化，而三角展式与无穷乘积展式仍与原来的公式相去不远，本质上一样。只有上面（*）一式对以 K 为周期的 θ 函数不成立，必须先求 K 周期的 θ 函数的三角展式，再改为 τ 周期的 θ 函数，另选最前系数，然后才能推出（*）式。但这个公式在椭圆函数论中不占主导地位，推导它时多费一点小气力，问题不大。总之，把 θ 函数改为以 $2K$，$2iK'$ 为周期是利多弊少的。

Weierstrass 系统的函数以 2ω，$2\omega'$ 为周期，这是两个任给的数，从而它的应用范围最广，包括上述两种周期为其特例，在一定意义上它吸收了上述两种周期的长处，看来似乎是最好的。但它却有一个致命的弱点。椭圆函数本是二元函数（时间 t 及模数 k），如今却变成三元函数（时间 t 及 ω，ω'）了。变元个数增加，总是一个致命的缺点，因为每增加一个变元，讨论，造表都增加无穷的困难。当然，增加变元之后，Weierstruss 的函数具有齐次性，这个齐次性恰恰表明了函数的变元个数实在应该减少一个。试看在 Jacobi 系统中，把各函数看作 k 的函数，把各函数的特殊值看作 k 的函数等等，都有极大的作用，值得大家研究；但把 p 函数等作为 ω，ω' 的函数或作为 g_2，g_3（相当于 k）的函数时，几乎没有人研究，迄今亦未见其应用，足见把椭圆函数作为三元函数是极不妥当的。既须减少变元，那末周期 ω，ω' 便不能是两个独立变元，必须彼此有关。这样一来，便只能选取 $2K$，$2iK'$ 或选取 2，2τ（2π，$2\pi\tau$）了，照上面所论，当然以选用 $2K$，$2iK'$ 为最好。

因此可得结论，周期必须统一，权衡各种选择的优劣，我们认为选取 $2K$，$2iK'$ 为周期最好。

最后，旧理论的艰深，还由于椭圆积分的影响未曾消除干净。

椭圆函数的出现本由对椭圆积分作反演而来，目前椭圆函数的应用范围虽然日益扩大，但很大一部分的应用仍是对椭圆积分的应用，因此椭圆函数理论不能不处处受到椭圆积分的影响，比如，讨论椭圆函数的书大部分仍从椭圆积分讲起，即其一例。

我们认为，椭圆函数的理论比椭圆积分要简单得多，根据由浅而深的原则，不管椭圆函数的来源如何，应该撇开椭圆积分而论椭圆函数，这样，椭圆函数理论必然更简单而易懂。若因历史关系而处处和椭圆积分纠缠在一起，那就受累不浅了。

问题还不止于此，目前大部分的作家，竟然以椭圆积分为主，椭圆函数竟是可有可无的内容。因此，不但从椭圆积分讲起，而且处处以椭圆积分代替椭圆函数，后者的性质用前者表示，证明时根据椭圆积分而推导（甚至撇开椭圆函数而不谈）。结果，在“椭圆函数论”的书中，竟然靠椭圆积分的性质来理解椭圆函数的性质（类似于靠积分的性质来理解三角函数的性质），怎不使读者觉得难懂异常！有些书中列举积分公式时，竟然列出 $g\int_0^{u_1} du = gu_1 = gsn^{-1}(\sin\varphi,k) = gF(\varphi,k)$ 的式子，认为椭圆函数论中的自变数 u_1 没有椭圆积分中 $F(\varphi,k)$ 那末好懂，要把前者写为后者，这充分说明了受椭圆积分之累到了何等地步。

因此，对椭圆函数论的一个改革，是必须真正地以椭圆函数论为基本，彻底肃清椭圆积分的影响。学过椭圆函数后，可以把它们应用于椭圆积分，但在学椭圆函数的过程中，可以无须借助于椭圆积分。只有明白这一点，才能使椭圆函数论得到根本的简化。

作了上述的简化以后，作者认为，椭圆函数论本质上和三角函数在同一水平（当然较为麻烦些），完全可以在初等分析的水平上发展起来。

参考文献

[1] Greenhill, A. G., The Application of Elliptic Functions. MacMillan (1892).
[2] Neville E. H., Jacobian Elliptic Functions. Clarendon Press, 2nd ed (1951).

The Theory of Elliptic Functions Based on Elementary Analysis

By Moh Shawkwei (莫绍揆)

Abstract

The prevailing approach of the theory of elliptic functions, whether classic (as the inverse of elliptic integrals of the first kind) or following Weierstrass (as the double periodic meromorphic functions), is based on some deep results of the theory of functions of complexe variables, and hence is too difficult to the beginners. However, on the other hand, it is quite well known that the theory of elliptic functions is essentially very elementary, accessible to the precalculus students.

In the present paper, we base the theory of elliptic functions on the phenomena of simple pendulum. From this we deduce successively the fundamental relations, the periodicity, the derivatives, and finally, the addition theorems of the elliptic functions. And then it would be easy to develop the whole theory.

Besides, in order to make the theory really simple and easy, we must reform it in many respects. For example, we need choose suitable basic functions, standardize the periods and the leading coefficients of various functions.

It is obvious that we should take $2K$ and $2iK'$ as periods. Besides, we should take as basic the following functions with suitable leading coefficients: the twelve Jacobian and Glaisher's functions and the functions P, ζ, σ, D, Z, θ, Π, each with one of the four subscripts s, c, d, n.