Möbius-Rota反演理论的扩充及其应用*

徐 利 治

（吉林大学、大连工学院、华中工学院）

引　　言

熟知古典的Möbius反演公式是作为数论中的一个计算工具而出现的．后来人们看出，建立在具有“可除性”的整数集上的这种反演公式，可以扩充成为有限群论中的一个计数工具，因为关于子群间的包含关系正好相当于整数因子间的整除关系．于是便有群论中的Möbius函数及反演公式的出现，并且很成功地用于p群的计数问题．这些便是1935～36年前Weisner[1]与Hall[3]等人所完成的工作．

近代组合分析、概率计算、p群研究、格论以及图论中出现的许多计数问题，使人们进一步发现，原来计数的基本原则，都是以对象事物的“序结构”作为其基础的．这样也就使人们想到，只有将Möbius函数与反演公式推广到“半序集”(partially ordered set)上，才能成为一种应用范围最为广泛的计算工具．Rota于1964年发表的著名论文[8]正是实现了这一想法．我们知道，Möbius－Rota的反演公式在现代的组合数学中有很多应用．欲知其详，请参考1975年刊载于《美国数学月刊》上Bender与Goldman的一篇综合报告[14]．

以Rota的工作为基础，著者曾于1967年引进了“互反μ函数”的概念，得到了很广的一类互反公式，并用于导出一系列互反级数关系．主要结果曾在当年自已印发的《反演公式查用表》中作过介绍．但由于“文革”影响，一直推迟到1978年才有机会用简报的两页篇幅正式发表了基本结果[15]．本文将详尽地论述Möbius－Rota反演理论的一种扩充及其对级数变换的一系列应用举例．虽说主要题材是早在十多年前写出的，但迄今尚未发现国外有类似的工作出现过．

我们假定读者已经熟知“半序集”的有关概念．事实上，本文所述及的半序集都是“局部有限的半序集”(locally finite partially ordered set)，即这种半序集的每一截段(segment)都只包含有限多个元素．值得提及的是，如何引用合适的极限算法(例如借助于类似非标准分析的方法)，使得广义的Möbius－Rota反演理论进一步扩充到“非局部有限半序集”的问题，应该是个很有意义的问题，但也是较困难的问题．

§1　互反μ函数偶与一般的互反公式

在本文中我们常用S表示一个局部有限的半序集，简称“半序集”，其中的元素以x，y，z等记之，而序关系记为$\leqslant$．

* 1980年10月15日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

今考虑半序集 S 上的所有二元实值函数 $f(x,y)(x\in S,y\in S)$ 全体作成的集合，其中每一函数 f 都假定具有性质：当 $x\not\leqslant y$ 时 $f(x,y)=0$。在这函数集中的任一对函数 f 与 g 之和 $f+g$ 及函数与数值之乘积均按常例定义。但函数乘积的概念，即关于 $h=f\cdot g$ 的概念，则按下式规定：

$$h(x,\ y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}f(x,z)g(z,y)=(f\cdot g)(x,y).$$

上式中的和式取遍截段 $[x,y]$ 中的一切 z。这叫做 f 与 g 的 Dedekind 乘积。既然 S 是个局部有限半序集，所以和式中的项数总是有限的。

规定了如上的运算之后，我们便得到 S 上的一个"结合代数"。特别，在这个代数中有三个最简单最常用的元素，即 δ 函数、ζ 函数及"关联函数"(incidence function) λ，它们的定义分别为

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1 & (\text{当}x=y)\\ 0 & (\text{当}x\neq y),\end{cases}\qquad \zeta(x,y)=\begin{cases}1 & (\text{当}x\leqslant y)\\ 0 & (\text{当}x\not\leqslant y),\end{cases}$$

$$\lambda(x,y)=\begin{cases}1 & (\text{当}x<y)\\ 0 & (\text{当}x\not<y),\end{cases}\qquad \lambda(x,y)=(\zeta-\delta)(x,\ y).$$

由上可见，$\lambda(x,y)$ 正好表示着从 x 到 y 的长度为 1 的真链个数。根据函数乘积定义并利用数学归纳法，读者不难直接验证关联函数的 k 次自乘

$$\lambda^k(x,\ y)\equiv(\zeta-\delta)^k(x,\ y)$$

恰好代表着从 x 延伸到 y 的长度为 k 的真链个数(number of proper chains)。特别，不妨记 $\delta=\lambda^0$ (λ 的零次幂)。根据乘法结合律我们有简单的指数律 $\lambda^m\cdot\lambda^n=\lambda^{m+n}$ ($\lambda^0=\delta$，$\lambda^1=\lambda$，$m\geqslant0$，$n\geqslant0$)。

所谓 S 上的结合代数中的广义Möbius函数 μ，实际就是 ζ 的乘法逆函数，也即满足条件 $\mu\cdot\zeta=\delta$ 的函数 μ，不妨将它简记为 $\mu=\zeta^{-1}=(\lambda^0+\lambda)^{-1}$。事实上，我们还可将 ζ 与 μ 都表为 λ 的形式幂级数

$$\zeta=\lambda^0+\lambda\quad(\lambda^0=\delta),$$

$$\mu=\lambda^0-\lambda+\lambda^2-\lambda^3+\cdots,$$

并可按形式幂级数的乘法直接验明互逆条件：

$$\zeta\mu=\mu\zeta=\lambda^0=\delta.$$

只需分析一下 Rota 的广义 Möbius 反演公式，即可看出上述的互逆条件正是保证一对反演公式成立的充要条件。既然形式幂级数之间的一对互逆关系能导致一对反演公式，这就启发我们去引进如下形式的普遍定义。

定义 假设 $\phi(z)=\sum_0^\infty a_kz^k$ 是一个具有实系数的任意幂级数，而 $a_0\neq0$。又设 $1/\phi(z)=\sum_0^\infty b_kz^k$ 是 $\phi(z)$ 的形式逆级数，即 $\left(\sum_0^\infty a_kz^k\right)\left(\sum_0^\infty b_kz^k\right)=a_0b_0=1$。那末，

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\mu_1(x,\ y)=\phi(\lambda)(x,\ y)=\sum_{k\geq 0}a_k\lambda^k(x,\ y), \tag{1}$$

$$\mu_2(x,\ y)=\phi(\lambda)^{-1}(x,\ y)=\sum_{k\geq 0}b_k\lambda^k(x,\ y) \tag{2}$$

便叫做半序集S上的一对“互反μ函数”，其中$x\in S$，$y\in S$。

可用记法$\{\mu_1,\mu_2\}$或$\{\mu_2,\mu_1\}$表示互反μ函数偶。由定义易见，每一个形式幂级数$\sum_0^\infty a_k z^k$ $(a_0\neq 0)$，或者说，每一串实数$a_0,a_1,a_2,\cdots$ $(a_0\neq 0)$，都唯一地确定一个互反偶$\{\mu_1,\mu_2\}$。

$\{\zeta,\mu\}$自然是S上一个最简单最特殊的互反μ函数偶，它显然是由数列$a_0=a_1=1$，$a_k=0\,(k=2,3,\cdots)$ 所确定的。

按(1)及(2)，可将一般形式的μ_1与μ_2简记为

$$\mu_1=\sum_{k\geq 0}a_k\lambda^k,\qquad \mu_2=\sum_{k\geq 0}b_k\lambda^k,$$

其中$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，$a_0\cdot b_0=1$。有了如上所述的互反μ函数偶的一般概念之后，自然，我们也就能够去建立一般性的反演定理了。

定理1　假设S是一个含有最小元a的局部有限半序集。那末，S上每一个互反μ函数偶$\{\mu_1,\mu_2\}$都对应地确定着如下的一对互反公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\leq y}\mu_1(x,y)g(x), & (3)\\ g(y)=\sum\limits_{x\leq y}\mu_2(x,y)f(x), & (4)\end{cases}$$

这里$y\in S$，而f与g是以S为定义域的数值函数。

证法较简短。首先我们注意，根据互反μ函数偶的概念，不难得出μ_1与μ_2在结合代数中的乘积为

$$\mu_1\cdot\mu_2=\phi(\lambda)\cdot\phi(\lambda)^{-1}=a_0b_0\lambda^0=\delta,$$

即μ_1与μ_2在代数中确实互为逆函数。这是因为S是局部有限半序集，对任何截段$[x,y]$说来，按照(1)(2)展出的级数都只含有限多个项，故根据代数中的结合律(或者关于λ的指数律)以及关于有限多项的分配律，便可推出$\phi(\lambda)\cdot\phi(\lambda)^{-1}=\delta$成立。

现在我们来验证(4)$\Rightarrow$(3)。为此目的我们按照已经成立的关系式(4)，用它来代入(3)式的右端并加以变形和简化，则得

$$\begin{aligned}\sum_{x\leq y}\mu_1(x,\ y)g(x)&=\sum_{x\leq y}\mu_1(x,\ y)\sum_{t\leq x}\mu_2(t,\ x)f(t)\\ &=\sum_{x\leq y}\phi(\lambda)(x,\ y)\sum_{t\leq x}\phi(\lambda)^{-1}(t,\ x)f(t)\\ &=\sum_{t\leq y}f(t)\sum_{t\leq x\leq y}\phi(\lambda)^{-1}(t,\ x)\cdot\phi(\lambda)(x,\ y)\\ &=\sum_{t\leq y}f(t)\left\{\phi^{-1}(\lambda)\cdot\phi(\lambda)(t,\ y)\right\}\\ &=\sum_{t\leq y}f(t)\delta(t,\ y)=f(y).\end{aligned}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

这表明(3)式可以从(4)式推导出来。又因为(3)与(4)在形式上是对等的，所以完全同样地可以验证(3)⇒(4)。定理结论(3)⟺(4)因而得证。

根据对偶原则我们还有下述

定理2　假设S是一个含有最大元的局部有限半序集。那末，S上的每个互反μ函数偶$\{\mu_1,\mu_2\}$都对应有如下一对互反公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\geqslant y}\mu_1(y,x)g(x), & (5)\\ g(y)=\sum\limits_{x\geqslant y}\mu_2(y,x)f(x), & (6)\end{cases}$$

此处$y\in S$，而g与f为数值函数。

以后我们总规定把一个幂级数$\phi(z)=\sum\limits_0^\infty a_kz^k$中的非零常数项$a_0$写成$a^0z^0$，因而相应地便有

$$\phi(\lambda)=a_0\lambda^0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots(a_0\neq 0).$$

按此记法，例如e^λ，$\cos\lambda$便分别表示

$$e^\lambda=\lambda^0+\lambda+\frac{1}{2!}\lambda^2+\frac{1}{3!}\lambda^3+\cdots,$$

$$\cos\lambda=\lambda^0-\frac{1}{2!}\lambda^2+\frac{1}{4!}\lambda^4-\cdots.$$

显然互反公式(3)、(4)可以改写成

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}\phi(\lambda)(x,y)\cdot g(x), & (3)^*\\ g(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}\phi(\lambda)^{-1}(x,y)\cdot f(x), & (4)^*\end{cases}$$

因为每一个带有非零常数项的幂级数$\phi(z)$都有形式的逆$\phi(z)^{-1}$，从而都决定一对反演公式(3)*与(4)*；所以上述类型的互反公式是多至无穷的。按照Cantor的观点分析，互反公式全体作成的超穷集合，恰好具有实数集的相同基数（这是容易证明的）。

例1　设半序集S具有最小元，则在其上有互反公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}e^\lambda(x,y)\cdot g(x),\\ g(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}e^{-\lambda}(x,y)\cdot f(x).\end{cases}$$

设S含有最大元，则有互反公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\geqslant y}e^\lambda(y,x)\cdot g(x),\\ g(y)=\sum\limits_{x\geqslant y}e^{-\lambda}(y,x)\cdot f(x).\end{cases}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

例 2　设 S 含最小元，则有反演公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\leq y}\cos\lambda(x,y)\cdot g(x), \\ g(y)=\sum\limits_{x\leq y}\sec\lambda(x,y)\cdot f(x). \end{cases}$$

互反 μ 函数偶 $\{\mu_1,\mu_2\}\equiv\{\phi(\lambda),\phi(\lambda)^{-1}\}$ 可以随时构造。例如，给定一个 μ_1：

$$\mu_1=a_0\lambda^0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots(a_0\neq0),$$

欲求 $\mu_2=\mu_1{}^{-1}=b_0\lambda^0+b_1\lambda+b_2\lambda^2+\cdots$，则可逐步确定 $b_0=1/a_0,b_1,b_2,\cdots$ 的数值。比方，假定已经算出 b_0，b_1，…，b_k 的值，则 b_{k+1} 便可按下式计算

$$b_{k+1}=-\frac{1}{a_0}(a_1b_k+a_2b_{k-1}+\cdots+a_{k+1}b_0).$$

以后我们称$\{a_k\}$与$\{b_k\}$为一对"互逆数列"。

§2　一般互反公式的推论及举例

令 α 与 β 为异于零的实数，则由 $\phi(z)=(1+\beta z)^{\alpha}$ 与 $\phi(z)^{-1}$ 的幂级数展开式的系数所得出的互逆数列为 $a_k=\binom{\alpha}{k}\beta^k$，$b_k=\binom{-\alpha}{k}\beta^k$。于是根据定理 1，我们可得出如下的命题。

推论 1　设 S 是一个含有最小元的半序集；则对 S 上的如下一对互反 μ 函数

$$\mu_1=\sum_{k\geq0}\binom{\alpha}{k}\beta^k\lambda^k,\qquad \mu_2=\sum_{k\geq0}\binom{-\alpha}{k}\beta^k\lambda^k$$

说来，互反公式 (3) 与 (4) 恒成立。

这个推论包含有Möbius—Hall—Rota的反演公式作为其特例，因为当 $\alpha=\beta=1$ 时推论 1 中的互反偶 $\{\mu_1,\mu_2\}$ 恰好就是 $\{\zeta,\mu\}$。

又当 $\beta=1$，$\alpha=m$（正整数）时，上述推论 1 便给出了 m 次重叠和式

$$f(x_m)=\sum_{x_0\leq x_1}\sum_{x_1\leq x_2}\cdots\sum_{x_{m-1}\leq x_m}g(x_0)\tag{7}$$

的反演公式

$$g(x_0)=\sum_{x_m\leq x_0}\mu_2(x_m,x_0)f(x_m).\tag{8}$$

请读者自行检验这一论断。

为了得到一批关于算术函数的比较有趣的互反公式，现在我们把定理 1 中的 S 取为自然数全体按通常大小关系作成的全序集 $S\equiv\{1,2,3,\cdots\}$。显然这是一个有着最小元的局部有限的全序集。对于任意一对正整数 a 与 b $(a\leq b)$，易见所有长度为 k 的形如 $a=\nu_0<\nu_1<\cdots<\nu_k=b$ $(\nu_i\in S)$ 的真链个数是

$$\lambda^k(a,b)=\binom{b-a-1}{k-1}.\tag{9}$$

这是因为每一条真链相当于从整数 $a+1$，$a+2$，…，$b-1$中取出 $k-1$个数$\nu_1<\nu_2<\cdots<$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

ν_{k-1}的一个组合。于是，任意给定一对互逆数列$\{a_k\}$与$\{b_k\}$ $(a_0\neq 0)$，我们都有自然数集S上的一对互反μ函数

$$\mu_1(a,b)=\sum_{k\geq 0}\binom{b-a-1}{k-1}a_k,\qquad \mu_2(a,b)=\sum_{k\geq 0}\binom{b-a-1}{k-1}b_k,$$

此处以及今后我们对二项系数的记法常采取如下的规定

$$\binom{0}{0}=\binom{-1}{-1}=1,\qquad \binom{-1}{n}=\binom{n}{-1}=0\qquad (n\neq -1).$$

既然$\lambda^k(a,b)$，$\mu_1(a,b)$，$\mu_2(a,b)$诸数值只依赖于差数$b-a$，所以不妨简记$\lambda^k(a,b)=\lambda^k(b-a)$，$\mu_1(a,b)=\mu_1(b-a)$，$\mu_2(a,b)=\mu_2(b-a)$。因此，我们现在就把自然数集$S$上的互反$\mu$函数偶定义成

$$\mu_1(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}a_k,\qquad \mu_2(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}b_k,\tag{10}$$

其中$\{a_k\}$与$\{b_k\}$是任意一对互逆数列。于是，从定理1我们又得到下列推论。

推论 2 假设$\mu_1(s)$与$\mu_2(s)$为由(10)式所定义的一对互反μ函数，那末在自然数集上我们就有如下形式的一对互反公式

$$\begin{cases} f(s)=\sum_{t=1}^{s}\mu_1(s-t)g(t), & (11)\\ g(s)=\sum_{t=1}^{s}\mu_2(s-t)f(t). & (12)\end{cases}$$

不难看出，推论2还可以推广到一般的局部有限的全有序集 (totally ordered set) 上。今设S是一个具有最小元的局部有限的全有序集，则其中的每个截段$[x,y]$都是有着有限长度的链，可用$r[x,y]$表示它的长度。类似于 (9) 我们有

$$\lambda^k(x,y)=\binom{r[x,y]-1}{k-1}.$$

因此，对于任意一对互逆数列$\{a_k\}$与$\{b_k\}$ $(a_0\neq 0)$，可以相应地引进S上的一对互反μ函数

$$\mu_1(x,y)=\sum_{k\geq 0}\binom{r[x,y]-1}{k-1}a_k,\tag{13}$$

$$\mu_2(x,y)=\sum_{k\geq 0}\binom{r[x,y]-1}{k-1}b_k.\tag{14}$$

于是可将推论2扩充成下述

定理 3 假设S是一个含有最小元的局部有限的全有序集，$\{\mu_1,\mu_2\}$为定义在S上的具有形式(13)(14)的互反μ函数偶，则如下的互反公式成立：

$$f(y)=\sum_{x\leq y}\mu_1(x,y)g(x),\tag{15}$$

$$g(y)=\sum_{x\leq y}\mu_2(x,y)f(x),\tag{16}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

此处$y\in S$，而g与f为数值函数。

实质上这仍然是定理1的一个推论。它同定理1比较起来，主要是关于μ_1,μ_2中出现的关联函数已有了更具体的表示式。显然，只有对于全有序集才能有这种简明而具体的表示形式。

作为定理3的特例，我们可把互反公式(11)(12)改述为如下形式

$$\begin{cases} f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n-k-1}{r-1}a_r\right\}g(k), & (11)^* \\ g(n)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n-k-1}{r-1}b_r\right\}f(k), & (12)^* \end{cases}$$

这里$f(n)$与$g(n)$是对自然数$n=1，2，3，\cdots$有定义的函数，又$\{a_k\}$与$\{b_k\}$是任意一对互逆数列。

应用推论2可以导出一系列有关算术函数的反演公式。

例3 取$\phi(z)=e^z$，则可得互逆数列$a_k=1/k!$，$b_k=(-1)^k/k!$ $(k=0，1，2，\cdots)$。于是根据(10)，于$s\geqslant1$时可得出

$$\mu_1(s)=\sum_{k>0}\frac{1}{k!}\binom{s-1}{k-1},\qquad \mu_2(s)=\sum_{k>0}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{s-1}{k-1}. \tag{17}$$

特别于$s=0$，我们规定$\mu_1(0)=\mu_2(0)=1$。

我们知道，“超几何函数”的一般定义是

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p;z\\ \rho_1,\ \cdots,\ \rho_q\end{matrix}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{n!\,(\rho_1)_n\cdots(\rho_q)_n}z^n,$$

此处$(\alpha)_n$的定义是$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$，$(\alpha)_0=1$，$(0)_0=1$。特别，$p=q=1$所相应的函数叫做Pochhammer—Barnes的汇合超几何函数，可记作

$${}_1F_1(\alpha;\ \beta;\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!\,(\beta)_n}z^n. \tag{18}$$

读者不难自行验证，按(17)式给出的$\mu_1(s)$与$\mu_2(s)$可以表示成上述函数，即当$s\geqslant1$时有

$$\mu_1(s)={}_1F_1(1-s;\ 2;\ -1),\qquad -\mu_2(s)={}_1F_1(1-s;\ 2,\ +1).$$

因此应用推论2，我们便获得如下的一对反演公式

$$\begin{cases} f(s)=g(s)+\sum_{t=1}^{s-1}{}_1F_1(1-s+t;\ 2;\ -1)g(t), & (19)\\ g(s)=f(s)-\sum_{t=1}^{s-1}{}_1F_1(1-s+t;\ 2;\ 1)f(t), & (20)\end{cases}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中$s=1, 2, 3, \cdots$；又$\sum_{1}^{0}$表示和式不存在。

同理，如取$\phi(z)=e^{\alpha z}(\alpha\neq 0)$，则相应的互逆数列为$a_k=\alpha^k/k!$与$b_k=(-\alpha)^k/k!$。于是类似地可得出如下的一对互反公式

$$\begin{cases} f(s)=g(s)+\alpha\sum_{t=1}^{s-1}{}_1F_1(1-s+t;\ 2;\ -\alpha)g(t), & (21)\\ g(s)=f(s)-\alpha\sum_{t=1}^{s-1}{}_1F_1(1-s+t;\ 2;\ \alpha)f(t). & (22)\end{cases}$$

(19)与(20)相当于$\alpha=1$的情形。

例4　将$\phi(z)$取为Bernoulli数的发生函数

$$\phi(z)=\frac{z}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B_k\cdot z^k,$$

其中$B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$，$B_2=\frac{1}{6}$，$B_3=B_5=B_7=\cdots=0$，$B_4=-\frac{1}{30}$，…。显见$\phi(z)$的逆级数为

$$\phi(z)^{-1}=\frac{1}{Z}(e^z-1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}z^k.$$

于是，根据(10)我们得到如下的一对特殊的互反μ函数

$$\mu_1(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}\frac{1}{(k+1)!},\qquad \mu_2(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}\frac{B_k}{k!}.$$

以此代入(11)(12)，也就得出一对特殊的互反公式.

例5　将$\phi(z)$取为Euler数的发生函数

$$\phi(z)=\sec z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}E_{2k}\cdot z^{2k},$$

则$\phi(z)^{-1}=\cos z$，从而仿例4，根据(10)又可获得如下的一对互反μ函数

$$\mu_1(s)=\sum_{k\geqslant 0}\binom{s-1}{2k-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!},\qquad \mu_2(s)=\sum_{k\geqslant 0}\binom{s-1}{2k-1}\frac{E_{2k}}{(2k)!}.$$

以此代入(11)(12)又可得到一对互反公式,实质上它们是例2中的一对互反公式的显式表示。

例6　假设$g_k(z)$为由下列超几何函数所界定的Mittag—Leffler多项式

$$g_k(z)=2z\,{}_2F_1(1-k,\ 1-z;\ 2;\ 2).$$

这样的多项式具有如下的发生函数（其中$g_0(z)\equiv 1$）

$$\phi(w)=(1+w)^z(1-w)^{-z}=1+\sum_{k=1}^{\infty}g_k(z)\cdot w^k.$$

考虑$\phi(w)^{-1}$便可得到一对互逆数列$\{g_k(z)\}$与$\{(-1)^k g_k(z)\}$，其中z作为参数看待。于是我们又得到一对特别的互反μ函数

$$\mu_1(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}g_k(z),\qquad \mu_2(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}(-1)^k g_k(z),$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

自然又可将它们代入(11)(12)而导出一对特殊的互反公式。

总之，公式(11)(12)可以容许无限多样的特殊化（具体化），而且能够使得同一些特殊多项式或知名数列联系起来。

例 7 对作为全有序集的自然数集而言，按照(9)或(10)，可知推论1中的互反偶$\{\mu_1, \mu_2\}$可表成如下形式（其中$\mu_1(0)=\mu_2(0)=1$）：

$$\mu_1(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{\alpha}{k}\binom{s-1}{k-1}\beta^k, \qquad \mu_2(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{-\alpha}{k}\binom{s-1}{k-1}\beta^k.$$

容易验明，这一对函数可用Gauss的超几何函数表示出来，即于$s\geqslant 1$时有

$$\mu_1(s)=\alpha\beta\,{}_2F_1(1-\alpha,\ 1-s;\ 2;\ \beta); \tag{23}$$

$$\mu_2(s)=-\alpha\beta\,{}_2F_1(1+\alpha,\ 1-s;\ 2;\ \beta), \tag{24}$$

于是根据推论2，便有如下的一对互反公式

$$\begin{cases} f(s)=g(s)+\alpha\beta\sum\limits_{t=1}^{s-1}{}_2F_1(1-\alpha,\ 1-s+t;\ 2;\ \beta)g(t), & (25)\\ g(s)=f(s)-\alpha\beta\sum\limits_{t=1}^{s-1}{}_2F_1(1+\alpha,\ 1-s+t;\ 2;\ \beta)f(t), & (26)\end{cases}$$

其中$s=1, 2, 3, \cdots$。

特别于$\beta=1$时，(23)(24)即化为异常简单的表示式$\mu_1(s)=(-1)^s\binom{-\alpha}{s}$，$\mu_2(s)=(-1)^s\binom{\alpha}{s}$，从而(25)(26)便给出如下的简单而熟知的特例（其中将原来的f，g改换成$(-1)^t f(t)$，$(-1)^t g(t)$）

$$f(s)=\sum_{t=1}^{s}\binom{\alpha}{s-t}g(t), \qquad g(s)=\sum_{t=1}^{s}\binom{-\alpha}{s-t}f(t).$$

自然，人们还可以继续利用推论1与推论2去得出更多特殊的（甚至是更为有趣的）互反公式来。

§3 理论的补充及扩充

前面（§1—§2）曾经借助于关联函数λ的幂级数展开式来界定一般互反μ函数偶的概念。这样做法的明显好处是：第一，λ函数的乘幂具有某种"零化子"(annihilator)的性质或"幂零性质"，即当k大于截段$[x,y]$内的元素个数时，便有零化性质$\lambda^k(x,y)=0$；因而对局部有限的半序集说来，关于互反μ函数$\mu_1(x, y)$，$\mu_2(x, y)$的幂级数实际上都退化为有限多个项的多项式。第二，每个项$a_k\lambda^k(x, y)$中的$\lambda^k(x,y)$都表示长度为k的真链$x<\cdots<y$的个数，因而便于作具体计算。但是，略经分析即可看出，利用λ去界定μ_1，μ_2实际并无必要性。我们完全可以借助于任何一个具有幂零性质的函数，例如σ去定义μ_1与μ_2。

假设σ是局部有限半序集S上的结合代数中的一个二元函数，当$x\not\preceq y$时$\sigma(x, y)=0$，并且对于每一个截段$[x, y]$而言，都存在一个与x，y有关的正整数$N=N(x, y)$，使当$k\geqslant N$时恒有幂零性质$\sigma^k(x, y)=0$。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

又再规定 $\sigma^0=\lambda^0=\delta$，因而 σ 在结合代数中便满足指数律 $\sigma^m\cdot\sigma^n=\sigma^{m+n}(m\geqslant0,\ n\geqslant0)$。

于是，对应于每一对互逆数列 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}(a_0\neq0)$，我们都有如下的一对广义的互反 μ 函数

$$\mu_1(x,\ y)=\sum_{k\geqslant0}a_k\sigma^k(x,\ y)=\phi(\sigma)(x,y),\tag{27}$$

$$\mu_2(x,\ y)=\sum_{k\geqslant0}b_k\sigma^k(x,\ y)=\phi(\sigma)^{-1}(x,\ y).\tag{28}$$

与此同时，定理1便可扩充成下列形式：

定理4 假设 S 是一个含有最小元的局部有限的半序集。那末，对应于按(27)，(28)确定的每一对互反 μ 函数 $\{\mu_1,\ \mu_2\}\equiv\{\phi(\sigma),\ \phi(\sigma)^{-1}\}$，都存在如下的一对互反公式

$$\begin{cases}f(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}\phi(\sigma)(x,\ y)\cdot g(x), & (29)\\ g(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}\phi(\sigma)^{-1}(x,\ y)\cdot f(x). & (30)\end{cases}$$

证法完全与定理1的证明相同。事实上，根据结合代数中的乘法结合律或指数律以及关于有限多个项的分配律，我们同样有 $\phi(\sigma)\cdot\phi(\sigma)^{-1}=a_0b_0\sigma^0=\delta$。

具有"幂零性质"的函数 σ 是多不胜举的。例如任何一个不含零幂项 λ^0 的 λ 的多项式

$$\sigma=c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_n\lambda^n$$

都是一个具有幂零性质的函数。事实上，可以推而广之，凡不含零幂项的 λ 的任一形式幂级数 $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\lambda^k$ 也都是具有幂零性质的函数。例如 $\sigma=\sin\lambda$ 就是这样的一个函数。

显然，定理4要比定理1具有更高的概括性；但它还是以定理1为背景（特别是抓住 λ 的幂零性这一特征）抽象出来的。下面举两个较简单的例子以资表明定理4的应用。

例8 设半序集 S 具有最小元，则在其上有互反公式

$$\begin{cases}f(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}e^{\sin\lambda}(x,\ y)\cdot g(x),\\ g(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}e^{-\sin\lambda}(x,\ y)\cdot f(x).\end{cases}$$

例9 考虑 $\sigma=\lambda+\lambda^2$。这在结合代数中可以表作 $\sigma=\lambda(\lambda^0+\lambda)=\lambda\zeta=\zeta\lambda$，此处 λ 与 ζ 具有乘法可交换性。因此再根据乘法结合律，我们得到

$$\sigma^m=(\lambda\zeta)^m=\lambda^m\zeta^m.$$

今设 x，y 为局部有限半序集 S 中的任一对固定元而 $x\leqslant y$，则

$$\zeta^m(x,\ y)=(\lambda^0+\lambda)^m(x,\ y)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\lambda^k(x,\ y).$$

注意每一条长度为 k 的真链 $x<x_1<\cdots<x_{k-1}<y$ 能伸长成 $\binom{m}{k}$ 条长度为 m 的链 $x\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{m-1}\leqslant y$。所以由上式可见 $\zeta^m(x,\ y)$ 即等于所有形如

$$x\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{m-1}\leqslant y$$

的链的总个数。进一步我们再考虑 $\lambda^m\zeta^m(x,\ y)$ 的意义，容易看出这正好给出长度为2m的"半真链"(semi-proper chains)

$$x<x_1<\cdots<x_m\leqslant x_{m+1}\leqslant\cdots\leqslant x_{2m-1}\leqslant y$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

的总个数。

根据 (27)及(28) 我们有如下形式的一对特殊的互反 μ 函数

$$\mu_1(x, y)=\sum_{k\geqslant 0}a_k\lambda^k\zeta^k(x, y),$$

$$\mu_2(x, y)=\sum_{k\geqslant 0}b_k\lambda^k\zeta^k(x, y),$$

其中$\{a_k\}$与$\{b_k\}$是一对互逆数列 ($a_0\neq 0$)，而 $\lambda^0\zeta^0=\delta$。

特别，若 S 是一个全有序集，则易算出

$$\lambda^k\zeta^k(x, y)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^{k+j}(x, y)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{r[x, y]-1}{k+j-1}$$

$$=\binom{k+r[x, y]-1}{2k-1},$$

其中 $r[x, y]$表示截段$[x, y]$的长度。于是应用定理 4 可得下列互反公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}\left\{\sum\limits_{k=0}^{r[x,y]}\binom{k+r[x,y]-1}{2k-1}a_k\right\}g(x), & (31)\\ g(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}\left\{\sum\limits_{k=0}^{r[x,y]}\binom{k+r[x,y]-1}{2k-1}b_k\right\}f(x). & (32)\end{cases}$$

显然，如果将 S 取为自然数全序集，再把$\{a_k\}$，$\{b_k\}$选取为一些特殊的互逆数列，则可从(31)，(32)获得一系列特殊形式的级数反演公式(参考(11)*，(12)*)。

我们知道有如下的简单命题能说明反演公式在何种条件下存在且唯一的问题：

假设 S 是一个局部有限半序集，含有最小元与最大元。假设 f_1，f_2，…，f_m是 m 个定义于 S 上的任意数值函数。又假设有如下的一组公式成立：

$$f_{k+1}(x_{k+1})=\sum_{x_k}\phi_k(x_k, x_{k+1})f_k(x_k)\quad(k=1, \cdots, m-1),$$

其中对每个 k，不定和式按照条件 $x_k\leqslant x_{k+1}$ 或 $x_k\geqslant x_{k+1}$ 取遍 S 中的一切 x_k；又$\phi_k(\cdot, \cdot)$是 S 上的二元数值函数。那末，为了使得以 f_m 表出 f_1 的反 演公式存在且唯一，其充分必要条件是各个 $\phi_k(\cdot, \cdot)$都须具有性质 $\phi_k(x, x)\neq 0$ $(x\in S)$。

但是，这样的命题对构造互反公式是没有用处的，因为它并未给出计算逆函数 ϕ_k^{-1}的有效方法。所以，要想去获得各种各样的互反公式，还须借助于前面讲过的定理 1，2，3，4 及推论。

本稿曾经分别向吉林大学的与大连工学院的组合数学讨论班的成员们报告过。对他们的审查和验证谨表谢意。

参 考 文 献

[1] Weisner, L., Abstract theory of inversion of finite series, Trans. Amer. Math. Soc., 38 (1935), 474—484.

[2] Weisner, L., Some properties of prime-power groups, Trans. Amer. Math. Soc., 38(1935), 485-492.

[3] Hall, P., The Eulerian functions of a group, Quart. J. Math. Oxford ser. (1936), 134-151.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

〔4〕Hille, E., The inversion problems of Möbius, Duke Math. J. (1937), 549—568.
〔5〕Hsu, L. C., Abstract theory of inversion of iterated summations, Duke Math. J. (1947), Vol. 14, 465—473.
〔6〕Delsarte, S., Fonctios de Möbius sur les groupes abeliens finis, Ann. of Math. (1948), 2nd Ser. Vol. 60, 359—364.
〔7〕Green, M. S., and Nettleton, R. E., Möbius function on the lattice of dense subgraphs, J. Res. nat. Bur. Standard (1962), 41—47.
〔8〕Rota, G.-C., On the foundations of combinatorial theory, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie (1964), Vol. 2, 340—368.
〔9〕Goldman, J. R., and Rota, G. C., The number of subspaces of a vector space, Recent Progress in Combinatorics, Academic Press, New York (1969), 75—83.
〔10〕Wilf. H. S., The Möbius Function in Combinatorial Analysis and Chromatic Graph Theory, Proof Techniques in Graph Theory, Academic Press, New York (1969), 179—188.
〔11〕Rota, G.-C., On the Combinatorics of the Euler Characteristic, Studies in Pure Mathematics, Academic Press, New York (1971), 221—233.
〔12〕Crapo, H., and Rota, G. C., On the foundations of combinatorial theory: Combinatorial Geometries, M. I. T. Press (1971).
〔13〕Bender, E. A., and Goldman, J. R., Enumerative uses of generating functions, Indiana Univ. Math. J. (1971), 753—765.
〔14〕Bender, E. A., and Goldman, J. R., On the applications of Möbius iuversion in combinatorial analysis, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), No.8, 789—803.
〔15〕徐利治，两类级数变换的反演公式，吉林大学自然科学学报 (1978), No.1, 136—138.

An Extension of the Möbius—Rota Inversion Theory with Applications

By L. C. Hsu (Xu Lizhi 徐利治)

Abstract

Denote by S a locally finite poset with the order relation $\leqslant$. As in the fundamental paper of Rota's in 1964, we use λ to denote the incidence function in an associative algebra on S. Definition. Let $\phi(z)=\sum_0^\infty a_k z^k$ $(a_0\neq 0)$ be any given power series with its formal inverse $1/\phi(z)=\sum_0^\infty b_k z^k$. Then

$$\mu_1=\phi(\lambda)=\sum_0^\infty a_k\lambda^k, \qquad \mu_2=\phi(\lambda)^{-1}=\sum_0^\infty b_k\lambda^k$$

are called a pair of reciprocal μ functions on S. Theorem 1. Let S have a minimal element. Then for every pair $\{\mu_1,\mu_2\}$, we have a pair of reciprocal formulas

$$f(y)=\sum_{x\leqslant y}\mu_1(x,\ y)g(x), \qquad g(y)=\sum_{x\leqslant y}\mu_2(x,\ y)f(x),$$

where $x\in S$, $y\in S$, and f, g are numerical functions defined on S. An extensive generalization of this theorem has been formulated (see Theorem 4), and some simple applications to obtaining various special inverse series relations have been illustrated in detail.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.