关于自然数集合上的递归定理*

程极泰

(上海交通大学　应用数学系)

我们在讲授“集合论”课程时，对于Enderton书中[1]议论到的自然数集合上的递归定理证明问题(见原书76页)，有我们的不同看法．后来，经过与Enderton教授通讯讨论，他也觉得我们的见解是正确的．Enderton教授是对递归理论有专门研究的[2]，所以，我们觉得写出文章，把这方面的讨论加以阐明是有意义的．

一般论述递归定理，分成自然数集合上的递归定理以及一般良序集合上的超限递归定理两种形式来分别给以证明．

在良序集合A上定理的证明包括关于递归函数F的四个方面的论证(见[1]，181页)：

1° F是一个函数；

2° F是γ构造的；

3° $\mathrm{dom}F=A$；

4° F是唯一的．

Enderton书中关于自然数集合ω上的递归定理，完全仿照这种一般超限递归定理证明步骤，从而在“题外话”(Digression)中提到，其它书和文献中有关自然数集合上的递归定理的简要证法是错误的．

我们知道，自然数集合上的递归定理对于证明下面二个问题是重要的：

1° 自然数集合上的算术运算的构造；

2° 从构造定义的自然数集合与从Peano公设给出的自然数集合的同构性．

在自然数集合上的递归定理不似一般良序集合上的递归定理需要引用置换公理，它已经用

$$a\in A,\ F:A\to A$$

的具体形式给出了“从公式γ给出集合”这个用置换公理来肯定的过程．

另外一点，一般良序集合A上的递归定理是利用公式γ构造到t的函数逐渐扩张起来的类

$$\mathscr{H}=\{V\mid(\exists t\in A),\ V\text{是}\gamma\text{构造直至}t\text{的一个函数}\},$$

然后从置换公理肯定$\mathscr{H}$是一个集合，从而设

$$F=\cup\mathscr{H},$$

* 1981年1月20日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

就得到由併集累起来的所要求出的函数F。

通常，按Peano公设给出的自然数系统是由一个集合N，一个函数$S:N\to N$以及一个元$e\in N$所组成的满足下述三条件的三序组$\langle N,S,e\rangle$：

1° $e\notin \mathrm{ran}\,S$；

2° S是一一的；

3° N的任一个含e且在S下闭的子集本身等于N。

一般数学逻辑书中给出的N上递归定理证明是[3]

定理：给定集合A及$a\in A$与$F:A\to A$，则有唯一的函数$h:N\to A$使

$$h(e)=a,\quad h(s(x))=F(h(x)),\quad \forall x\in N.$$

〈证明〉从$h(e)=a$，知$e\in\mathrm{dom}\,h$。

当$x\in\mathrm{dom}\,h$时，就有$h(s(x))=F(h(x))$，从而$s(x)\in\mathrm{dom}\,h$，所以$\mathrm{dom}\,h$是N的一个子集，而$\mathrm{dom}\,h$除了e外都是$s(x)$，所以$\mathrm{dom}\,h$是在s下闭的，故从Peano公设知$\mathrm{dom}\,h=N$。

证毕。

Enderton认为这样的证明是错误的，我们觉得这个证法基本上正确，所缺少的一点就是唯一性的证明，这个唯一性的证明可以按D. Van Dalen等所著"集合：朴素性，公理性与应用"(1978)的证法[4]修正，我们可以就归纳定义的自然数集合论述为[5]：

ω上的递归**定理**

设给定集合A以及$a\in A$，且$F:A\to A$，则有唯一的一个函数$h:\omega\to A$使

$$h(o)=a,$$

$$h(n^+)=F(h(n)),\quad \forall n\in\omega.$$

〈证明〉设$a\in A$且$F:A\to A$，则从ω到A的函数是$\omega\times A$这个笛氏积集合的一个子集。

我们构造h是一个序对的集合

$$h(o)=a\Rightarrow\langle o,a\rangle\in h,$$

$$\langle n,x\rangle\in h\Rightarrow\langle n^+,\ F(x)\rangle\in h,\quad \forall n\in\omega.$$

今定义一个R集合(关系集合)：

$$X\subseteq\{\omega\times A\wedge\langle o,a\rangle\in X\wedge\forall n\in\omega,\ \forall x\in A[\langle n,x\rangle\in X\Rightarrow\langle n^+,F(x)\rangle\in X]\}.$$

这样，$\omega\times A$本身就是一个R集合，从而，所有R集合的组合C是非空的，可做C的一切R集合的交h，由子集公理知道这个交h是一个集合，且

$$h\subseteq\omega\times A,$$

而且h本身也是一个R集合，即

$$h\subseteq\{\omega\times A,\ \langle o,a\rangle\in h,\ \langle n,x\rangle\in h\Rightarrow\langle n^+,F(x)\rangle\in h\},$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

如果能证明 h 是一个函数，则从交的构造，就知道它是唯一的，因为它是最小的一个 R 集合。

所以，现在要证明

$$\forall n \in \omega \ \exists ! x \in A[\langle n, x\rangle \in h].$$

设
$$\Phi(n) := \exists ! x \in A[\langle n, x\rangle \in h],$$

要证
$$\forall n \in \omega[\Phi(n)].$$

〈证1〉 $\Phi(o)$：由于 $\langle o, a\rangle \in h$，若 $\langle o, b\rangle \in h$，且 $b \neq a$，则究 $h-\{\langle o, b\rangle\}$，由于 $h-\{\langle o, b\rangle\}$ 是一个 R 集合，它就与 h 是最小 R 集合矛盾，故 $\Phi(o)$，即

$$\exists ! x \in A[\langle o, x\rangle \in h].$$

〈证2〉 $n \in \omega$，$\Phi(n)$：当 $\langle n, x\rangle \in h$ 时，$\langle n^+, F(x)\rangle \in h$，设 $\langle n^+, b\rangle \in h$，且 $b \neq F(x)$，则究 $h-\{\langle n^+, b\rangle\}$，又可见 $h-\{\langle n^+, b\rangle\}$ 是一个 R 集合，它与 h 是最小的 R 集合矛盾。

证毕。

可见，自然数集合上的递归定理不必按 Enderton 的容许函数构造方法，因为现在不必引用置换公理；而且自然数集合上的递归定理证明中唯一性问题，可以通过“交”的构造，而不是通过“併”的构造来完成。

参 考 文 献

〔1〕 Herbert B. Enderton, Elements of Set Theory (1977).

〔2〕 Herbert B. Enderton, Elements of Recursion Theory, Handbook of Mathematical Logic (1977).

〔3〕 Donald W, Barnes, John M. Mack, An Algebraic Introduction to Mathematical Logic (1975).

〔4〕 D. Van Dalen, H. C. Doets, H. De Swart, Sets, Naive, Axiomatic and Applied (1978).

〔5〕 程极泰，集合论讲义 (1980).

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.