第4卷 第2期 1984年4月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.4 No.2 April 1984

一类牛顿插值级数的推广*

莫国端

（上海市闸北区教师进修学院）

本文研究半平面 $\mathrm{Re}z>a$ 内解析的函数 $f(z)$ 能展成形如

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right),\quad 0<\lambda_k\leqslant\lambda_{k+1}\to\infty \tag{1}$$

的牛顿插值级数的充要条件，我们推广了[1,2]的工作，他们只考虑 $\lambda_k=k$，k^a 的情况。

下文一律以字母 M 表示 $O(1)$。

熟知(见[3])级数(1)与级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\left[-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{\lambda_k}\right)^j\right] \tag{2}$$

同时敛散，其中 p (假定存在)是使 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-(p+1)}<\infty$ 的最小正整数，又(1)及(2)有收敛横坐标 λ：

$$\lambda=\varlimsup_{n\to\infty}\log\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\Big/\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1},\quad \lambda\geqslant 0 \tag{3}$$

$$\lambda=\varlimsup_{n\to\infty}\log\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\right|\Big/\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1},\quad \lambda<0. \tag{4}$$

设 $\psi(r)$ 为定义于 $[0,\infty)$ 上的连续正函数，满足条件：

$$\lim_{r\to\infty}\frac{d\log\psi(r)}{d\log r}=\rho,\quad 0<\rho<\infty, \tag{5}$$

我们从(5)易推出：对于 $\varepsilon>0$，当 r 充分大时有

$$t^{\rho-\varepsilon}\leqslant\psi(rt)/\psi(r)\leqslant t^{\rho+\varepsilon},\quad t\geqslant 1, \tag{6}$$

$$|\psi(rt)/\psi(r)-t^{\rho}|\leqslant\varepsilon,\quad 0<\alpha\leqslant t\leqslant\beta<\infty. \tag{7}$$

设 $\{\lambda_n\}$ 为一序列，$0<\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}\to\infty$，它有密度：

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{\psi(r)}=D,\quad 0<D<\infty, \tag{8}$$

---

*本文1965年2月完成于北京大学，作者感谢沈燮昌教授的指导。现新添加文献[4,5,6]供读者参考。
1982年4月28日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中$n(r)$为$\{\lambda_n\}$在$|z|\leqslant r$上的个数(重点重计)。

设$p(t,\theta)=(1-t\cos\theta)/(1+t^2-2t\cos\theta)$，令

$$h(\rho,\theta)=\int_0^{1/2\cos\theta}p(t,\theta)t^{\rho-1}dt,\ \cos\theta>0. \tag{9}$$

定理 1 设函数$f(z)$在半平面$\operatorname{Re} z>a(-\infty<a<\infty)$内解析，且存在一个$\varepsilon>0$，使

$$|f(a+re^{i\theta})|\leqslant Me^{\psi(r)[Dh(\rho,\theta)-\delta(\rho,\varepsilon,\theta)]}, \tag{10}$$

其中

$$\delta(\rho,\varepsilon,\theta)=\begin{cases}\varepsilon, & \rho<2\\ (D+\varepsilon)\displaystyle\int_{1/4}^{1/2\cos\theta}t^{\rho-3}|t^{\varepsilon}-1|dt, & \rho\geqslant 2\end{cases} \tag{11}$$

则当$\{\lambda_n\}$满足(5)且积分

$$\int_1^{\infty}\frac{\psi(r)}{r^2}dr=\infty \tag{12}$$

时，$f(z)$可展成牛顿级数(1)，在$\operatorname{Re} z>a$内一致收敛，其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\dfrac{\zeta}{\lambda_k}}\cdot\frac{f(\zeta)}{\zeta-\lambda_{n+1}}, \tag{13}$$

C_n为$\operatorname{Re} z>a$内包有大于a的$\lambda_k(k\leqslant n+1)$的任一闭路。

证 不妨设$f(z)$在$z=a$处连续，且$a\neq\lambda_n$，$n=1,2,\cdots$，否则以$a+\varepsilon_1$代替a。在定理所提闭路C_n之下，由恒等式

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\zeta-\lambda_{k+1}}\prod_{j=1}^{k}\frac{z-\lambda_j}{\zeta-\lambda_j}+\frac{1}{\zeta-z}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{\zeta-\lambda_k}$$

及哥西积分公式得

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\prod_{m=1}^{k}\left(1-\frac{z}{\lambda_m}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\dfrac{z}{\lambda_k}}{1-\dfrac{\zeta}{\lambda_k}}\cdot\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

以$R_n(z)$表示最后一项，并令$\zeta'=\zeta-a$，$z'=z-a$得

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n'}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\dfrac{z'}{\lambda_k-a}}{1-\dfrac{\zeta'}{\lambda_k-a}}\cdot\frac{f(a+\zeta')}{\zeta'-z'}d\zeta'.$$

取线路C_n'为

$$r=2(\lambda_n-a)\cos\theta,\ \zeta'=re^{i\theta}$$

设

$$d_n(\zeta')=\prod_{1\leqslant\lambda_k-a\leqslant r/2\cos\theta}\left(1-\frac{\zeta'}{\lambda_k-a}\right)$$

则由$\log|1-2\cos\theta\, e^{i\theta}|=0$得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\log|d_n(\zeta')|=\int_{1-}^{r/2\cos\theta}\log\left|1-\frac{re^{i\theta}}{t}\right|dn(t)$$

$$=\int_{1}^{r/2\cos\theta}\frac{(r^2-rt\cos\theta)n(t)dt}{t(t^2+r^2-2rt\cos\theta)}+O(\log(1+r)).$$

由(8)及(5)易得$\int_0^{\sigma r}=O(\psi(\sigma r))+O(1)$。于是

$$\log|d_n(\zeta')|=\int_{\sigma r}^{r/2\cos\theta}\frac{(r^2-rt\cos\theta)n(t)dt}{t(t^2+r^2-2rt\cos\theta)}+O(\psi(\sigma r))+O(\log(1+r)). \tag{14}$$

设

$$n(t)=D\psi(t)(1+\beta(t)),\quad \beta_0(t)=\operatorname*{Sup}_{t<r<\infty}\beta(t), \tag{15}$$

则由(8)，$\beta_0(t)\to0$，$t\to\infty$。我们有

$$\int_{\sigma r}^{r/2\cos\theta}=D\psi(r)h(\rho,\theta)+\alpha_1(r,\theta)+\alpha_2(r,\theta)+\alpha_3(r,\theta), \tag{16}$$

其中$h(\rho,\theta)$是(9)，而

$$\alpha_1(r,\theta)=D\int_{\sigma r}^{r/2\cos\theta}\frac{(r^2-rt\cos\theta)\psi(t)\beta(t)dt}{t(t^2+r^2-2rt\cos\theta)},$$

$$\alpha_2(r,\theta)=-D\psi(r)\int_0^{\sigma}p(t,\theta)t^{\rho-1}dt,$$

$$\alpha_3(r,\theta)=D\psi(r)\int_{\sigma}^{1/2\cos\theta}p(t,\theta)\left[\frac{\psi(rt)}{\psi(r)}-t^{\rho}\right]\frac{dt}{t}.$$

我们有

$$|\alpha_1(r,\theta)|\leqslant D\beta_0(\sigma,r)\int_{\sigma r}^{r/2\cos\theta}\frac{(r^2-rt\cos\theta)\psi(t)dt}{t(t^2+r^2-2rt\cos\theta)}$$

$$\leqslant\beta_0(\sigma r)[D\psi(r)h(\rho,\theta)+|\alpha_2(r,\theta)|+|\alpha_3(r,\theta)|], \tag{17}$$

$$|\alpha_2(r,\theta)|\leqslant M\psi(r)\int_0^{\sigma}t^{\rho-1}dt\leqslant M\sigma^{\rho}\psi(r), \tag{18}$$

$$|\alpha_3(r,\theta)|\leqslant D\psi(r)\left(\int_{\sigma}^{1/4}t^{-3}\left|\frac{\psi(rt)}{\psi(r)}-t^{\rho}\right|dt+\int_{1/4}^{1/2\cos\theta}t^{\rho-3}|t^{\varepsilon_1}-1|dt\right)$$

$$\leqslant M\sigma^{-2}\varepsilon_1\psi(r)+D\psi(r)\int_{1/4}^{1/2\cos\theta}t^{\rho-3}|t^{\varepsilon_1}-1|dt, \tag{19}$$

对于$\sigma>0$，$\varepsilon_1>0$，当r充分大时成立。有关计算用了(6)及(7)。

因为$\log(1+r)=o(\psi(r))$；$\psi(\sigma r)=M\sigma^{\rho}\psi(r)$；$\sigma^{\rho}\to0(\sigma\to0)$；$\beta_0(t)\to0(t\to\infty)$，于是由(14)—(19)，只要先取$\sigma$充分小，然后固定$\sigma$，再取$\varepsilon_1$充分小，就有

$$\left|\log|d_n(\zeta')|-D\psi(r)h(\rho,\theta)\right|$$

$$<\psi(r)\left(\varepsilon_2+\varepsilon_2h(\rho,\theta)+(D+\varepsilon_2)\int_{1/4}^{1/2\cos\theta}t^{\rho-3}|t^{\varepsilon_1}-1|dt\right), \tag{20}$$

对于$\varepsilon_2>0$，当r充分大时成立。

因为

$$\left|\log\prod_{-a<\lambda_k-a<1}\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\lambda_k-a}\right|\right|\leqslant\varepsilon_2\psi(r),$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

并注意当 $\rho<2$ 时(20)右边的积分收敛，我们有

$$\left|\log \prod_{-\alpha<\lambda_k-\alpha<r/2\cos\theta}\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\lambda_k-\alpha}\right|-D\psi(r)h(\rho,\theta)\right|<\left(\delta(\rho,\varepsilon,\theta)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\psi(r). \tag{21}$$

由路线 C_n' 的取法，注意(20)及(21)，

$$\log\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{\zeta'}{\lambda_k-\alpha}\right|>D\psi(r)h(\rho,\theta)-\delta(\rho,\varepsilon,\theta)+\frac{\varepsilon}{2}\psi(r). \tag{22}$$

最后，由 $1/|\zeta'-z'|\leqslant M$，$|d\zeta'|\leqslant M\lambda_n d\theta$ 得

$$\frac{|R_n(z)|}{\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{z'}{\lambda_k-\alpha}\right|}\leqslant\int_{C_n'}\frac{|f(\alpha+\zeta')d\zeta'|}{|\zeta'-z'|\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{\zeta'}{\lambda_k-\alpha}\right|}=\int_{C_n'\cap(|\zeta'|\leqslant r_0)}+\int_{C_n'\cap(|\zeta'|>r_0)}$$

$$\leqslant M+M\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\lambda_n e^{-\frac{\varepsilon}{2}\psi[2(\lambda_n-\alpha)\cos\theta]}d\theta.$$

将最后的积分写成 $\int_{0\leqslant\cos\theta\leqslant M/\lambda_n}+\int_{M/\lambda_n<\cos\theta\leqslant 1}$ 就得 $O(1)$。我们得到

$$|R_n(z)|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\left|1-\frac{z'}{\lambda_k-\alpha}\right|=M\sum_{k=1}^{n}\left|1-\frac{z-\alpha}{\lambda_k-\alpha}\right|$$

由条件(12)易得 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}=\infty$，于是当 $\mathrm{Re}(z-\alpha)>0$ 时，按无穷乘积的性质得

$$R_n(z)\to 0,\quad n\to\infty.$$

定理 1 证毕。

定理 2 设序列 $\{\lambda_n\}$ 及函数 $\psi(r)$ 满足条件(5)，(8)。如果级数(1)在 $\mathrm{Re}\,z>\alpha$ 内表示一解析函数，则它的前 n 项部份和 $S_n(z)$ 有估计式

$$\sup_{n\geqslant 0}|S_n(z)|<e^{\psi(r)[Dh(\rho,\theta)+\delta(\rho,\varepsilon,\theta)]}, \tag{23}$$

$$r\geqslant r_0,\quad z=\alpha_1+re^{i\theta},\quad \alpha<\alpha_1\neq\lambda_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

特别

$$|f(\alpha_1+re^{i\theta})|<e^{\psi(r)[Dh(\rho,\theta)+\delta(\rho,\varepsilon,\theta)]},\quad r\geqslant r_0. \tag{24}$$

证 设 $d_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)$. 如果 $\alpha\geqslant 0$，则令 $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$，得

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kd_k(z)=A_0+\sum_{k=1}^{n}(A_k-A_{k-1})d_k(z)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{z}{\lambda_{k+1}}d_k(z)+\frac{A_0z}{\lambda_1}+A_nd_n(z). \tag{25}$$

如果 $\alpha<0$，则令 $A_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$ 得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$S_n(z)=-\sum_{k=1}^{n}A_k\frac{z}{\lambda_{k+1}}d_k(z)+f(0)-A_nd_n(z).\tag{26}$$

因此，当$-\infty<\alpha<\infty$时，

$$|S_n(z)|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|z|}{\lambda_{k+1}}|A_k||d_k(z)|+M(1+r)+|A_nd_n(z)|.\tag{27}$$

设

$$|S_n^*(z)|=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|A_k|}{\lambda_{k+1}}|d_k(z)|.\tag{28}$$

对于$\varepsilon_1>0$，由(3)，(4)，

$$|S_n^*(z)|\leqslant M\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|d_k(z)|}{\lambda_k}e^{(\alpha+\varepsilon_1)\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{1}{\lambda_s}},$$

对于$z=\alpha_1+re^{i\theta}(\alpha_1>\alpha)$，取正数$p$，使

$$\left|\prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{\alpha_1}{\lambda_s}\right)e^{\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_s}\right)^j}\right|\leqslant M.$$

当$2\varepsilon_1<\alpha_1-\alpha$时我们有

$$\begin{aligned}|S_n^*(z)|&\leqslant M\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_k}e^{(\alpha+\varepsilon_1)\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{1}{\lambda_s}}\prod_{s=1}^{k}\left|1-\frac{\alpha_1+re^{i\theta}}{\lambda_s}\right|\\
&\leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}e^{(\alpha+\varepsilon_1)\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{1}{\lambda_s}}\prod_{s=1}^{k}\left|1-\frac{\alpha_1}{\lambda_s}\right|\prod_{s=1}^{k}\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\lambda_s-\alpha_1}\right|\\
&=M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}e^{(\alpha+\varepsilon_1)\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{1}{\lambda_s}}\cdot e^{-\sum\limits_{s=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_s}\right)^j}\\
&\quad\times\left|\prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{\alpha_1}{\lambda_s}\right)e^{\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_s}\right)^j}\right|\left|\prod_{s=1}^{k}\left(1-\frac{re^{i\theta}}{\lambda_s-\alpha_1}\right)\right|\\
&\leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}e^{(\alpha+2\varepsilon_1-\alpha_1)\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{1}{\lambda_s}}\prod_{s=1}^{k}\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\lambda_s-\alpha_1}\right|\\
&\leqslant M\max\prod_{s=1}^{k}\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\lambda_s-\alpha_1}\right|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}e^{-\delta\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{1}{\lambda_s}},\end{aligned}$$

其中$\delta=\alpha_1-\alpha-2\varepsilon_1>0$。

设$\varphi(x)$是连结λ_k的折线，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}e^{-\delta\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{1}{\lambda_s}}\leqslant M\int_1^{\infty}\frac{dx}{\varphi(x)}e^{-\delta\int_1^x\frac{dt}{\varphi(t)}}=O(1).$$

我们得到

$$|S_n^*(z)|\leqslant M\max_{k>1}\prod_{s=1}^{k}\left|1-\frac{re^{i\theta}}{\lambda_s-\alpha_1}\right|.$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

同样估计 $A_n d_n(z)$ 我们得到

$$|S_n(z)| \leqslant Mr \max_{n>1} \prod_{k=1}^{n} \left|1-\frac{re^{i\theta}}{\lambda_k-\alpha_1}\right| + O(r)$$

$$= Mr \prod_{-\alpha_1<\lambda_k-\alpha_1<r/2\cos\theta} \left|1-\frac{re^{i\theta}}{\lambda_k-\alpha_1}\right| + O(r).$$

由(21)得定理2。

推论1 如果我们以条件

$$0<\rho_1=\varliminf_{r\to\infty}\frac{d\log\psi(r)}{d\log r}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{d\log\psi(r)}{d\log r}=\rho_2<2 \tag{29}$$

代替条件(5)，以

$$|f(a+re^{i\theta})| \leqslant M e^{\sigma\phi(r)}$$

代替(10)，其中 σ 是只依赖于 ρ_2 的充分小的常数，则当积分(12)发散时，$f(z)$ 在 $\operatorname{Re} z>a$ 内可展成牛顿级数(1)。

推论2 在定理2中以(29)代替(5)，那么

$$|S_n(z)| \leqslant M e^{A\phi(r)}, \quad z=\alpha_1+re^{i\theta}, \quad \alpha_1>a,$$

$$|f(\alpha_1+re^{i\theta})| \leqslant M e^{A\phi(r)},$$

其中 M 与 n 无关，A 是一个只依赖于 ρ_1 的常数。

参 考 文 献

[1] Гельфонд, А. О., Исчисление Конечных разностей, II, 1952, Москва.

[2] Гончаров, В. Л., Интерполяционные процессы и Целые функции, У. М. Н., III (1937), 113—143.

[3] Edmund Landan, Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen, Sitzung der Math-Phys, Klasse, vom3 (1906), 151—221.

[4] Осколков, В.А. и Абдрашитова, С.А., Рост целых функций представленных рядами Мьютана, теорема о базисности некоторой системы функций, *Сиб* Мат *Жур*, 19(1978), 122—141.

[5] Abdrashitova, S. A., On the convergence class of Newton's lnterpolation problem for entire functions of lnfinite, Tr. Mosk. Inst khim, Moshinostr, No. 65, 1975, 70—75.

[6] Калинниченко, Л. И., рост целых фунций, Представленных рядами Ньютона, Мех Тверд дефрмир тела и родствн пробл апализа, М. 1978, 96—107.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

On the Extension of a Class of Newton's Interpolation Series

Mo Guoduan

(Zhabei College for Teacher Advanced studies, Shanghai)

Abstract

Theorem 1 Let $\psi(r)$ be a really continuous and differentiable function on $[0,\infty)$ to satisfy that

$$(*)\qquad \lim_{r\to\infty}\frac{d\log\psi(r)}{d\log r}=\rho,\quad 0<\rho<\infty.$$

Let sequence $\{\lambda_n\}$ satisfy $0<\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}\to\infty$ and have the density

$$(**)\qquad \lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{\psi(r)}=D,\quad 0<D<\infty,$$

where $n(r)$ be the number of $\{\lambda_n\}$ lying on $|\lambda|\leqslant r$. Suppose that the function $f(z)$ be analytic for $\operatorname{Re} z>a$ and there exists an $\varepsilon>0$, such that

$$|f(a+re^{i\theta})|\leqslant M\, e^{\psi(r)[Dh(\rho,\theta)-\delta(\rho,\theta,\varepsilon)]},$$

where $\delta(\rho,\theta,\varepsilon)\to 0\ (\varepsilon\to 0)$ for $|\theta|<\frac{\pi}{2}$, particularlly $\delta(\rho,\theta,\varepsilon)=\varepsilon$, if $\rho<2$; and where

$$h(\rho,\theta)=\int_0^{1/2\cos\theta}\frac{(1-t\cos\theta)t^{\rho-1}dt}{1-2t\cos\theta+t^2}.$$

If

$$\int_1^\infty\frac{\psi(r)}{r^2}dr=\infty,$$

then $f(z)$ can be expanded in Newton's series in the form

$$(***)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right),$$

whose coefficient

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-\lambda_{n+1})\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\zeta}{\lambda_k}\right)},$$

where C_n be a simple closed curve in $\operatorname{Re} z>a$ containing the points $z=\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_{n+1}$ in its interior.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

Theorem 2 Let $\{\lambda_n\}$ and $\psi(r)$ satisfy the conditions (*) and (**). If Newton's series (***) is convergent in Re $z>a$, then its part sum $S_n(z)$ of the first n terms satisfies that

$$\sup_{n>0}|S_n(z)|\leqslant M\, e^{\psi(r)[h(\rho,\theta)+\delta(\rho,\theta,\varepsilon)]},\quad z=a_1+re^{i\theta},\quad a_1>a,$$

particularlly,

$$|f(a_1+re^{i\theta})|\leqslant M\, e^{\phi(r)[Dh(\rho,\theta)+\delta(\rho,\theta,\varepsilon)]}.$$

《运筹学杂志》的发行与邮购办法

由中国数学会运筹学会理事长华罗庚教授任名誉主编、副理事长越民义研究员任主编的《运筹学杂志》，是我国运筹学会主办的第一份刊物。

该杂志贯彻百家争鸣，繁荣我国科学事业的方针。其主要任务是介绍和普及运筹学的知识及研究成果的报导，促使运筹学在我国工农业生产管理、商业管理、军事、交通运输、工程技术、财政经济、社会科学中的应用。

该杂志刊登的主要内容为：介绍有关运筹学的学科方向；学科的具体内容与方法；发表国内运筹学方面的研究成果（简报）；刊登运筹学的应用实例；报导国内外运筹学动态及教学书评等等。

该杂志由运筹学会《运筹学杂志》编辑委员会编辑，暂定为半年刊，已于1982年秋冬创刊发行。编辑部设在上海科学技术大学数学系，上海科技出版社负责出版，欢迎各界从事运筹学的工作者来稿。

该杂志由全国各地新华书店发售，定价每期0.53元。为便于读者购买，上海科学技术出版社邮购组（地址：上海瑞金二路 450 号，承办邮购业务，邮购需另加邮寄包装费10%，挂号费再另加。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.