第4卷 第3期
1984年7月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.4 No.3
July 1984

有关分布参数系统无界控制的几个定理*

姚允龙 尤云程

（复旦大学 数学研究所）

本文提供的基础定理可用于各类无界最优控制问题。我们已将之用于快速控制问题、二次不定判据最优控制问题和固定时间的一般指标无界最优控制问题。

一、主要定理与证明

设V、H是二个Hilbert空间，且V可以稠密地连续嵌入H中。以上标$'$表记对偶空间，设$H'=H$为轴空间，则H可稠密地连续嵌入V'之中。我们称$\{V,H,V'\}$满足轴空间假定，记为$V\hookrightarrow H\hookrightarrow V'$。

设在V上给定一个连续双线性型$a(u,v)$，其中$u,v\in V$。这时，$\{V,H,a(\cdot,\cdot)\}$称为三重结构（见[1]）。

由这样的连续双线性型$a(\cdot,\cdot)$唯一确定了线性有界算子$\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V,V')$，使得$a(u,v)=(\mathscr{A}u)(v)$，其中$u$、$v\in V$。

若记$D(A)=\mathscr{A}^{-1}H=\{v\in V\,|\,\mathscr{A}v\in H\}$，$A$为$\mathscr{A}$在$D(A)$上的限制，即$A=\mathscr{A}\restriction_{D(A)}$。若$u\in D(A)$，$v\in V$，则$a(u,v)=\langle Au,v\rangle_H$。我们以下标表示所取内积的空间。

V的对偶空间V'上的范数是$\|f\|_{V'}=\sup\limits_{v\in V\setminus\{0\}}(|f(v)|/\|v\|_V)$，$\forall f\in V'$。由$\|\cdot\|_{V'}$诱导出$V'$上的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V'}$，$V'$按此内积成为Hilbert空间。

对于所述的三重结构，能用于发展方程求解问题的结果仅有当$a(\cdot,\cdot)$是半椭圆型时$-A=-\mathscr{A}\restriction_{D(A)}$是空间$H$上的$C_0$类算子半解的母元[1]。但是，这样的结果不适于讨论诸如点控制、点测量、边界控制等有实际意义的重要问题。我们的主要结果定理1和定理2可以作为讨论这些无界控制问题的基础。

定理1 设三重结构$\{V,H,a(\cdot,\cdot)\}$中，V紧嵌入轴空间H，且$a(\cdot,\cdot)$是Hermite连续双线性型，满足椭圆性条件，即

$$\exists\delta>0,\ \text{使得}\ a(v,v)\geqslant\delta\|v\|_V^2,\ \forall v\in V, \tag{1}$$

则$-\mathscr{A}$是对偶空间V'上的C_0类算子半群的具有紧豫解式的母元。若记$-\mathscr{A}$生成的算子半群为$e^{-\mathscr{A}t}\in\mathscr{L}(V')$，则它是等度有界半群，即存在$M>0$，使得

$$\|e^{-\mathscr{A}t}\|_{\mathscr{L}(V')}=\sup_{f\in V'\setminus\{0\}}(\|e^{-\mathscr{A}t}f\|_{V'}/\|f\|_{V'})\leqslant M. \tag{2}$$

下面的定理给出$e^{-\mathscr{A}t}$的一些重要性质。

1981年10月29日收到。

定理2 在定理1的相同条件下，V' 上的半群 $e^{-\mathscr{A}t}$ 有以下性质．对 $t>0$，

1）$e^{-\mathscr{A}t}V'\subset D(A)$，即对一切 $f\in V'$，$e^{-\mathscr{A}t}f\in D(A)$．从而有 $e^{-\mathscr{A}t}V'\subset V\subset H$．

2）$e^{-\mathscr{A}t}\in\mathscr{L}(V',H)\cap\mathscr{L}(V',V)$ 且有常数 $k_1,k_2>0$，使得

$$\|e^{-\mathscr{A}t}\|_{\mathscr{L}(V',H)}\leqslant\frac{k_1}{\sqrt{t}},\qquad \|e^{-\mathscr{A}t}\|_{\mathscr{L}(V',V)}\leqslant\frac{k_2}{t}. \tag{3}$$

3）$e^{-\mathscr{A}t}$ 视为 $t\in(0,+\infty)$ 到 $\mathscr{L}(V',V)$ 的映射为强连续．从而 $e^{-\mathscr{A}t}$ 视为 $t\in(0,+\infty)$ 到 $\mathscr{L}(V',H)$ 的映射也是强连续的．

4）$e^{-\mathscr{A}t}$ 是 e^{-At} 的延拓，即 $e^{-\mathscr{A}t}\restriction_H=e^{-At}$．可记为 $e^{-At}\subset e^{-\mathscr{A}t}$．

以下分成几个引理来证明定理1和定理2．

首先，由[1,3]知，H 中存在一组由 A 的特征向量完全系 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 构成的就范正交基，$Ae_i=\lambda_ie_i$，其中特征值 λ_i 可设为 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$．并可表 A 与 $e^{-\mathscr{A}t}$ 为

$$Ax=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\langle x,e_i\rangle_He_i,\quad x\in D(A). \tag{4}$$

$$e^{-\mathscr{A}t}x=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_it}\langle x,e_i\rangle_He_i,\quad x\in H. \tag{5}$$

(4)，(5) 中的级数是按 H 的范数收敛，以后简称为 H 收敛．类似地可言 V 收敛，V' 收敛等．此外，A 的定义域 $D(A)$ 是

$$D(A)=\{x\in H\,\Big|\,\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i\langle x,e_i\rangle_H|^2<+\infty\}. \tag{6}$$

由于 (1)，定义 $\langle u,v\rangle_a=a(u,v)$ 及 $\|v\|_a=\sqrt{a(v,v)}$，u、$v\in V$．显然 $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ 形成 V 的一个与 V 原来内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 等价的新内积．事实上，取 $c_1=\sqrt{\delta}$，$c_2=\sqrt{\|a\|}$，其中 $a(\cdot,\cdot)$ 之范数 $\|a\|=\sup\limits_{\|u\|_V=\|v\|_V=1}|a(u,v)|$，则成立

$$c_1\|v\|_V\leqslant\|v\|_a\leqslant c_2\|v\|_V. \tag{7}$$

V 按新内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ 也成为 Hilbert 空间，记为 (V,a)．V 中的 V 收敛与 a 收敛等价，(V,a) 嵌入 H 中仍是紧嵌入，V 的对偶空间 V' 保持不变，但是 V' 中的对偶于 (V,a) 的范数将是

$$\|f\|_{(V,a)'}=\sup_{v\in V\setminus\{0\}}(|f(v)|/\|v\|_a). \tag{8}$$

V' 中的新范数 $\|\cdot\|_{(V,a)'}$ 与原来范数 $\|\cdot\|_{V'}$ 也是等价的，有

$$\frac{1}{c_2}\|f\|_{V'}\leqslant\|f\|_{(V,a)'}\leqslant\frac{1}{c_1}\|f\|_{V'}. \tag{9}$$

V 中换取等价拓扑后，遂有下面的结果．

引理1 $\{e_i\}$ 也是 Hilbert 空间 (V,a) 的正交基，并且 $\lambda_i=\|e_i\|_a^2$．

证明 由于 $\{e_i\}$ 是 H 的就范正交基．对一切 $u\in D(A)$，$v\in V$，记 $u_i=\langle u,e_i\rangle_H$，$v_i=\langle v,e_i\rangle_H$，就有，$\forall u\in D(A)$，$v\in V$，

$$a(u,v)=\langle Au,v\rangle_H=\sum_{i=1}^{\infty}\langle Au,e_i\rangle_H\bar{v}_i=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_iu_i\bar{v}_i. \tag{10}$$

由此容易证得 $\{e_i\}$ 在 (V,a) 中的正交性和完备性．

引理2 $\{e_i\}$ 组成对偶空间 V' 在新内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(V,a)'}$ 之下的正交基，并且 $\|e_i\|^2_{(V,a)'}=$

$\frac{1}{\|e_i\|_a^2}=\frac{1}{\lambda_i}$.

证明　由引理 1 及（10）可知

$$V=\{v=\sum\nolimits_V v_i e_i \Big| \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|v_i|^2=\|v\|_a^2<+\infty\},\tag{11}$$

这里 $\sum_V$ 表示该级数是 V 收敛，类似地 $\sum_a$ 为 a 收敛。对 $f\in V'$，

$$\|f\|_{(V,a)'}=\sup_{v\in V\setminus\{0\}}(|f(v)|/\|v\|_a)=\sup_{v\in V\setminus\{0\}}\left(|\sum_{i=1}^{\infty}v_i f(e_i)|\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|v_i|^2}\right).$$

类似于空间 $(l_2)'$ 的范数计算可得

$$\|f\|_{(V,a)'}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}[|f(e_i)|^2/\lambda_i]\right)^{\frac{1}{2}},\ f\in V'.\tag{12}$$

相应于（12）的内积是

$$(f,g)_{(V,a)'}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}f(e_i)\overline{g(e_i)}\right),\ f、g\in V'.\tag{13}$$

现证 $\{e_i\}$ 是 V' 按内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(V,a)'}$ 的正交基。由轴空间假定，$\{e_i\}\subset H\hookrightarrow V'$，按自然嵌入，$e_i$ 作为 V' 中元素时有

$$e_i(e_j)=\langle e_i,e_j\rangle_H=\delta_{ij},$$

由（12）、（13）可得，$\|e_i\|^2_{(V,a)'}=\frac{1}{\lambda_i}$，以及 $i\neq j$ 时 $\langle e_i,e_j\rangle_{(V,a)'}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}e_i(e_k)\cdot\overline{e_j(e_k)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\delta_{ik}\delta_{jk}=0$.

对任意的 $f\in V'$，它的 Fourier 系数是 $\frac{\langle f,e_i\rangle_{(V,a)'}}{\sqrt{\langle e_i,e_i\rangle_{(V,a)'}}}=\frac{f(e_i)}{\sqrt{\lambda_i}}$，由（12）可知如下的封闭性公式成立，

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle f,\frac{e_i}{\|e_i\|_{(V,a)'}}\rangle_{(V,a)'}|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|f(e_i)|^2}{\lambda_i}=\|f\|^2_{(V,a)'}.$$

于是，$\{e_i\}$ 是 $(V,a)'$ 中的正交基。同时得到

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\frac{e_i}{\|e_i\|_{(V,a)'}}\rangle_{(V,a)'}\frac{e_i}{\|e_i\|_{(V,a)'}}=\sum_{i=1}^{\infty}f(e_i)e_i,\ \forall f\in V'.\tag{14}$$

引理3　对 $t\geqslant 0$，$i\in V'$，定义算子 $e^{-\tilde{A}t}$ 为

$$e^{-\tilde{A}t}f=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}f(e_i)e_i,\tag{15}$$

则对一切 $f\in V'$，上式右边级数都是 V'（或 $(V,a)'$）收敛，且 $e^{-\tilde{A}t}\in\mathscr{L}(V')$（或 $\mathscr{L}((V,a)')$）。又 $e^{-\tilde{A}t}$ 是 V' 上以算子 $\tilde{A}$ 为母元的 C_0 类算子半群，其中，

$$\tilde{A}f=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f(e_i)e_i,\tag{16}$$

$$f\in D(\tilde{A})=\{f\in V'\Big|\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|\cdot|f(e_i)|^2<+\infty\}.\tag{17}$$

证明　由[3]有这样的结果，若 $\{\phi_i\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的就范正交基，$\{\mu_i\}$ 是复数列且 $\inf_i\{\mathrm{Re}\mu_i\}>-\infty$，则 $T(t)x=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\mu_i t}\langle x,\phi_i\rangle_{\mathscr{H}}\phi_i$ 定义了算子 $T(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$，$t\geqslant 0$，进而 $T(t)$

是以 $Kx=\sum_{i=1}^{\infty}-\mu_i\langle x,\phi_i\rangle_{\mathscr{H}}\phi_i$，$x\in D(K)=\{x\in\mathscr{H}\,\Big|\,\sum_{i=1}^{\infty}|\mu_i|^2|\langle x,\phi_i\rangle_{\mathscr{H}}|^2<+\infty\}$为母元的 C_0 类半群。

现取$\mathscr{H}=V'$，内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(V,a)'}$，$\phi_i=e_i/\|e_i\|_{(V,a)'}$，$\mu_i=\lambda_i$，由于 $\langle f,e_i/\|e_i\|_{(V,a)'}\rangle_{(V,a)'}(e_i/\|e_i\|_{(V,a)'})=f(e_i)e_i$，则获证。

引理4 $\mathscr{A}=\tilde{A}$，这里$\tilde{A}$由（16）、（17）所定义。

证明 由（11），（14）和（17），知$D(\tilde{A})=V=D(\mathscr{A})$。当 u、$v\in V$ 时，由（10）可以证明 $\tilde{A}u=\mathscr{A}u$ 对一切的 $u\in V$ 成立。

定理 1 的证明 由引理 3 和引理 4 知 $e^{-\mathscr{A}t}\in\mathscr{L}(V')$ 是 C_0 类算子半群，且其母元是$-\mathscr{A}$。由V紧嵌入H可证得$\mathscr{A}$有紧豫解算子。由（15），

$$\|e^{-\mathscr{A}t}f\|^2_{(V,a)'}=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-2\lambda_i t}|f(e_i)|^2\|e_i\|^2_{(V,a)'}\leqslant e^{-2\lambda_1 t}\|f\|^2_{(V,a)'},$$

从而

$$\|e^{-\mathscr{A}t}\|_{\mathscr{L}(V')}\leqslant\frac{c_2}{c_1}e^{-\lambda_1 t}\leqslant\frac{c_2}{c_1}. \tag{18}$$

取 $M=c_2/c_1$，则完成定理 1 的证明。

定理 2 的证明 1）对任意的$f\in V'$，要证$e^{-\mathscr{A}t}f\in D(A)$。由（15）和（6），只要证明$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2e^{-2\lambda_i t}|f(e_i)|^2<+\infty$即可。容易算出 $\lambda_i^3e^{-2\lambda_i t}\leqslant(3/2et)^3$，$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2e^{-2\lambda_i t}|f(e_i)|^2\leqslant(3/2et)^3\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}|f(e_i)|^2=\left(\frac{3}{2et}\right)^3\|f\|^2_{(V,a)'}$。从而证得，$t>0$ 时，$e^{-\mathscr{A}t}f\in D(A)$。

2）由于 $\lambda_ie^{-2\lambda_i t}\leqslant\frac{1}{2et}$，故有$\|e^{-\mathscr{A}t}f\|^2_H=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-2\lambda_i t}|f(e_i)|^2\leqslant\frac{1}{2et}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}|f(e_i)|^2=\frac{1}{2et}\|f\|^2_{(V,a)'}$，$\forall f\in V'$。取 $k_1=\frac{1}{\sqrt{2e}}$，则得（3）的前一式。类似可得（3）的后一式。

3）由于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ 与 $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ 等价，只要证明$\lim\limits_{\tau\to t}\|e^{-\mathscr{A}\tau}f-e^{-\mathscr{A}t}f\|_a=0$，$\forall f\in V'$。事实上，$\|e^{-\mathscr{A}\tau}f-e^{-\mathscr{A}t}f\|^2_a=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|[e^{-\lambda_i\tau}-e^{-\lambda_i t}]f(e_i)|^2$。注意到$\sum_{i=1}^{\infty}(|f(e_i)|^2/\lambda_i)=\|f\|^2_{(V,a)'}<+\infty$，及 $\lambda_i^2|e^{-\lambda_i\tau}-e^{-\lambda_i t}|^2\leqslant\left(\frac{1}{e\tau}+\frac{1}{et}\right)^2$，当 τ 充分接近于$t>0$时，$\left(\frac{1}{e\tau}+\frac{1}{et}\right)^2$有界，应用级数形式的 Lebesgue 极限定理即得所要证的强连续性。

4）若 $x\in H$，$x(e_i)=\langle x,e_i\rangle_H$，从而$e^{-\mathscr{A}t}x=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}x(e_i)e_i=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}\langle x,e_i\rangle_He_i=e^{-At}x$，故 $e^{-At}\subset e^{-\mathscr{A}t}$。至此定理 2 证毕。

系1 三重结构 $\{V,H,a(\cdot,\cdot)\}$ 中，若V紧嵌入H中，连续 Hermite 双线性型满足半椭园性条件，即存在实数 λ 及有关的正数 $\delta(\lambda)$，使得

$$a(v,v)+\lambda\|v\|^2_H\geqslant\delta(\lambda)\|v\|^2_V,\quad\forall v\in V. \tag{19}$$

则 $-\mathscr{A}$ 同样是 V' 上的 C_0 类算子半群的母元，且也有紧自共轭豫解式。同样，定理 2 的结论成立，但不等式（2）、（3）分别改为

$$\|e^{-\mathscr{A}t}\|_{\mathscr{L}(V')}\leqslant Me^{\lambda t}, \tag*{(2)'}$$

$$\|e^{-\mathscr{A}t}\|_{\mathscr{L}(V',H)}\leqslant\frac{k_1}{\sqrt{t}}e^{\lambda t},\quad\|e^{-\mathscr{A}t}\|_{\mathscr{L}(V',V)}\leqslant\frac{k_2}{t}e^{\lambda t}. \tag*{(3)'}$$

证明 只要对三重结构 $\{V,H,b(\cdot,\cdot)\}$，其中 $b(u,v)=a(u,v)+\lambda(u,v)_H$，应用定理1、2 即得所证。

根据定理1、2及系1，应用[3]第八章的有关结果（参见其命题8，3），可得以下结论。

系2　三重结构 $\{V,H,a(\cdot,\cdot)\}$ 中，若 V 紧嵌入 H 中，又 $a(u,v)$ 满足系1的条件。设 $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V,V')$ 使得 $a(u,v)=(\mathscr{A}u)(v)$，$\forall u,v\in V$。若 Z 是 Banach 空间，$B\in\mathscr{L}(Z,V')$。对 V' 上给出的一阶发展方程

$$\frac{dx}{dt}=-\mathscr{A}x+Bu(t),\quad t>0,\quad x(0)=x_0\in H, \tag{20}$$

当 $u(\cdot)\in L_q^{loc}(0,+\infty;Z)$，$2<q\leqslant+\infty$ 时，(20) 的弱解

$$x(t)=e^{-\mathscr{A}t}x_0+\int_0^t e^{-\mathscr{A}(t-s)}Bu(s)ds,\quad t>0 \tag{21}$$

满足 $x(\cdot)\in C([0,+\infty);H)$，其中 (21) 式的积分在 H 中的 Bochner 积分意义下存在（亦可为 V' 中的 Bochner 积分）。

二、二阶发展方程

设 $\{V,H,a(\cdot,\cdot)\}$ 满足系1的条件，有 $\lambda\in\boldsymbol{R}$，$\delta(\lambda)>0$ 使得 (19) 成立。记双线性型

$$a_\lambda(u,v)=a(u,v)+\lambda\langle u,v\rangle_H,\quad \forall u,v\in V. \tag{22}$$

于是，$\{V,H,a_\lambda(\cdot,\cdot)\}$ 满足定理1的条件。并且

$$\mathscr{A}e_i=\mu_i e_i,\quad -\lambda<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots,\quad \mu_n\to+\infty. \tag{23}$$

考察 V' 上的发展方程

$$\begin{cases}\ddot{x}+\mathscr{A}x=Bu(t),\quad B\in\mathscr{L}(Z,V'),\quad t>0,\\ x(0)=x_0\in V',\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0\in V',\quad u(\cdot)\in L_1^{loc}(0,+\infty;Z).\end{cases} \tag{24}$$

它的弱解可表示为

$$x(t)=C(t)x_0+S(t)\dot{x}_0+\int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau,\quad t>0, \tag{25}$$

其中，$C(t)$，$S(t)$ 由下式定义。

$$\left.\begin{aligned}C(t)f&=\sum_{i=1}^{\infty}\cos(\mu_i^{\frac{1}{2}}t)f(e_i)e_i,\\ S(t)f&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(\mu_i^{\frac{1}{2}}t)}{\mu_i^{\frac{1}{2}}}f(e_i)e_i,\end{aligned}\right\}\quad f\in V' \tag{26}$$

并且 (25) 中的积分是 V' 中的 Bochner 积分。

在 (26) 中，当 $\mu_i<0$ 时，$\cos(\mu_i^{\frac{1}{2}}t)=\mathrm{ch}[(-\mu_i)^{\frac{1}{2}}t]$，$\sin(\mu_i^{\frac{1}{2}}t)/\mu_i^{\frac{1}{2}}=\mathrm{sh}[(-\mu_i)^{\frac{1}{2}}t]/(-\mu_i)^{\frac{1}{2}}$，当 $\mu_i=0$ 时，$\sin(\mu_i^{\frac{1}{2}}t)/\mu_i^{\frac{1}{2}}$ 理解为 $\mu_i\to0$ 的极限，即等于 t。

定理3　设 $\{V,H,a(\cdot,\cdot)\}$ 满足系1的条件，当 $x_0\in H$ 时，二阶发展方程 (24) 的弱解 (25) 所给出的 $x(\cdot)\in C([0,+\infty);H)$。

证明　由 (26)，对 (25) 的等号右方三项分别考虑，即可得到所要证的结论。这里从略。

参　考　文　献

[1]　利翁斯著（李大潜译），偏微分方程的边值问题，上海科技出版社，1980。

[2]　宋健、于景元，点测量点控制的分布参数系统，中国科学，1979，2。

[3] Curtain, R. F. & Pritchard, A. J., *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, 1978.

[4] 李训经，姚允龙，分布参数系统的时间最优控制，中国科学，1980,7，619—627.

[5] Li Xunjing (李训经) and Yao Yunlong (姚允龙), *On optimal control for distributed parameter systems*, The 8th IFAC Congress (Kyoto), August 24—28, 1981.

[6] 李训经，抛物型系统边界控制的时间最优问题，数学年刊，1 (1980)，453—457.

[7] 姚允龙，向量测度与分布系统的最大原理，中国科学，1982，7.

Several Theorems on Unbounded Control for Distributed Parameter Systems

Yao Yun-long (姚允龙)　　*You Yun-cheng* (尤云程)

Abstract

In this paper, some theorems underlying the discussion of unbounded control for distributed parameter systems are obtained.

Let $\{V,H,a(\cdot,\cdot)\}$ be a triple structure in which V embeds compactly in H and $a(\cdot,\cdot)$ is an Hermite elliptic continuous sesquilinear form on V. Operator $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(V;V')$ is defined by $a(u,v)=(\mathscr{A}u)(v)$, $u,v\in V$. Let A be the restriction of $\mathscr{A}$ on $\mathscr{D}(A)=\mathscr{A}^{-1}H$.

Theorem 1 $-\mathscr{A}$ is an infinitesimal generator of C_0 equi-bounded operator semi-group $e^{-\mathscr{A}t}$ on the dual space V' with properties

1) $e^{-\mathscr{A}t}\in\mathscr{L}(V';H)\cap\mathscr{L}(V';V)$, $t>0$, and $\|e^{-\mathscr{A}t}\|_{\mathscr{L}(V';H)}\leqslant\text{const}/\sqrt{t}$, $\|e^{-\mathscr{A}t}\|_{\mathscr{L}(V',V)}\leqslant\text{const}/t$, $t>0$.

2) the restriction of $e^{-\mathscr{A}t}$ on H is e^{-At}, $t\geqslant0$.

Theorem Ⅱ Let $B\in\mathscr{L}(Z;V')$, Z being a Banach space. Linear evolution equation on V' of first and second order

$$\dot{x}=-\mathscr{A}x+Bu,\ x(0)=x_0\in H,\ t\geqslant0;$$

$$\ddot{x}=-\mathscr{A}x+Bu,\ x(0)=x_0\in V',\dot{x}(0)=\dot{x}_0\in V',\ t\geqslant0,$$

admits mild solutions respectively given by

$$x(t)=e^{-At}x_0+\int_0^t e^{-\mathscr{A}(t-s)}Bu(s)ds,\ u(\cdot)\in L_q^{loc}([0,+\infty);\ Z),$$ where

$Z<q\leqslant+\infty$, $x(\cdot)\in C([0,+\infty);H)$, and

$$x(t)=C(t)x_0+S(t)\dot{x}_0+\int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau,\ u(\cdot)\in L_1^{loc}([0,+\infty);Z).$$ where $C(t)$ and $S(t)$ are corresponding generalized cosine and sine operator families, $x(\cdot)\in C((0,+\infty);H)$.

We have applied the above results to tackle problems such as time optimal control and quadratic cost optimal control of linear evolution systems, their settings being pointwise or boundary control of parabolic and hyperbolic systems.