第5卷 第2期
1985年4月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.5 No.2
April 1985

有限π-拟幂零群

赵耀庆

（广西大学）

本文把有限幂零群的概念推广为有限π-拟幂零群，证明了这类群的一系列性质．文中定理9推广了[1]的两个主要结果．

本文涉及的群G均指有限群．

定义 1 设π为某素数集合．$N\leqslant G$．若$\forall p_i\in\pi$，G的Sylow p_i-子群均与N可换，则称N为G的一个π-拟正规子群．（当$p_i\nmid\circ(G)$时，G的Sylow p_i-子群理解为G的单位元群1；若π为空集，则1是G的唯一的π-子群．此时G的每个子群是π-拟正规的）[2]．

定义 2 设π为某素数集合．若$\forall p_i\in\pi$，群G的Sylow p_i-子群正规于G，则称G为π-拟幂零群．

显然，G为π-拟幂零群等价于G含有幂零正规π-Hall子群．因而，若G为π-拟幂零群，则G的子群及同态象也是π-拟幂零群．而且容易看出，若$G=G_1\times G_2$，则G为π-拟幂零群的充要条件是G_1和G_2为π-拟幂零群．

下面我们从不同角度探讨π-拟幂零群的若干性质．

定理 1 G为π-拟幂零群$\Longleftrightarrow G$的所有极大子群在G中π-拟正规．

证 设G的所有极大子群在G中π-拟正规，p_i为π中任一素数．若G的Sylow p_i-子群S_{p_i}含于G的某极大子群M，则S_{p_i}在G中的任一共轭子群S'_{p_i}亦含于M．事实上，由于M为G的π-拟正规子群，故$MS'_{p_i}=S'_{p_i}M$，因而$M\cap S'_{p_i}$为M的Sylow p_i-子群．由于$S_{p_i}\supseteq M$，从而$\circ(S_{p_i})=\circ(M\cap S'_{p_i})=\circ(S'_{p_i})$．于是我们有$M\cap S'_{p_i}=S'_{p_i}$，所以$S'_{p_i}\subseteq M$．

现证$S_{p_i}\lhd G$．若不然，则$N_G(S_{p_i})\lneqq G$．从而存在G的极大子群M'，使得$S_{p_i}\leqslant N_G(S_{p_i})\leqslant M_1\lneqq G$．由于群$G$的任一子群在$G$中的共轭子群的个数等于该子群的正规化子在$G$中的指数，故由前证，$S_{p_i}$在$G$中的共轭子群均在$M'$内，其个数应为$S_{p_i}$在$M'$中的共轭子群的个数．即$[G:N_G(S_{p_i})]=[M':N_{M'}(S_{p_i})]$．由于$N_G(S_{p_i})\leqslant M'$，故$N_G(S_{p_i})=N_{M'}(S_{p_i})$．因而$[G:M']=1$．此不可，故$S_{p_i}\lhd G$．由$p_i\in\pi$的任意性，$G$为$\pi$-拟幂零群．

反之，仍设p_i为π中任一素数．由于G的Sylow p_i-子群$S_{p_i}\lhd G$，故对G的任一极大子群M，恒有$MS_{p_i}=S_{p_i}M$．从而G的任一极大子群为G的π-拟正规子群．证毕．

由定理1，我们可以立即得到

定理 2 G为幂零群$\Longleftrightarrow$对任一素数集合π，G的所有极大子群在G中π-拟正规．

定理 3 在群G中，对任一固定的素数集合π，记

*1982年6月23日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$S_\pi(G)=\langle S_{p_i}\mid p_i\in\pi,\ S_{p_i}\text{为}G\text{的Sylow }p_i\text{-子群}\rangle,$$

则 1° $S_\pi(G)\lhd\lhd G$；

2° 若 $H\lhd G$，则 $S_\pi(G)H/H=S_\pi(G/H)$，特别有 $S_\pi(G/S_\pi(G))=1$.

证 1° 显然.

2° $\forall p_i\in\pi$，由于 G/H 的 Sylow p_i-子群形如 $S_{p_i}H/H$，其中 S_{p_i} 为 G 的 Sylow p_i-子群，故知 $S_\pi(G)H/H=S_\pi(G/H)$. 取 $H=S_\pi(G)$，则 $S_\pi(G/S_{\pi(G)})=1$. 证毕.

O. H. Kegel [2] 定理 1 指出，若π-子群 N 为 G 的π-拟正规子群，则 N 为 G 的次正规子群. 于是我们有下述

定理 4 G 为π-拟幂零群$\Longleftrightarrow G$ 的任一π-子群为 G 的π-拟正规子群.

证 必要性显然. 今任意取定 $p_i\in\pi$，由设，则 G 的 Sylow p_i-子群 S_{p_i} 在 G 中 π-拟正规，从而 S_{p_i} 次正规于 G. 若 $S_{p_i}\neq G$，而 $S_{p_i}\lhd A$，A 为 G 的次正规子群，则 $S_{p_i}\lhd\lhd A$，因而易知 $S_{p_i}\lhd G$. 故 G 为π-拟幂零群. 证毕.

由定理 4 的证明，可知下述定理 5 成立.

定理 5 G 为π-拟幂零群$\Longleftrightarrow G$ 的任一π-子群为 G 的次正规子群.

若将定理4、5中"G 的任一π-子群"改为"G 的任一 Sylow p_i-子群，$p_i\in\pi$"，定理仍然成立. 此外，虽然 O. H. Kegel [2] 定理 1 之逆不真，但由定理 4、5，我们可以有如下

推论 G 的所有π-子群为 G 的π-拟正规子群$\Longleftrightarrow G$ 的所有π-子群为 G 的次正规子群.

定理 6 G 为π-拟幂零群$\Longleftrightarrow$对 G 的任一子群 $H\lneq S_\pi(G)$，必有 $H\lneq N_{S_\pi(G)}(H)$.

证 必要性显然. 今设 $H\lneq S_\pi(G)$，由设 $H\lneq N_{S_\pi(G)}(H)$，于是 $S_\pi(G)$ 为 G 的幂零正规 π-Hall 子群，故 G 为π-拟幂零群. 证毕.

定理 7 G 为π-拟幂零群$\Longleftrightarrow$对 G 的任一正规子群 $M\lneq S_\pi(G)$，恒有 $Z(S_\pi(G)/M)\neq 1$.

证 先证充分性. 不妨设 $S_\pi(G)\neq 1$. 取 $M=1$，则 $Z_1=Z(S_\pi(G))\neq 1$，且 $Z_1\lhd S_\pi(G)$. 若 $Z_1\neq S_\pi(G)$，再取 $M=Z_1$，令 $Z_2/Z_1=Z(S_\pi(G)/Z_1)\neq 1$，我们有 $1\lneq Z_1\lneq Z_2$，且 $Z_2\lhd S_\pi(G)$. 若 $Z_2\neq S_\pi(G)$，可以继续上述过程. 如此可知 $S_\pi(G)$ 的上中心链必中止于 $S_\pi(G)$. 于是 $S_\pi(G)$ 幂零，从而 G 为π-拟幂零群.

次证必要性. 若 G 为π-拟幂零群，则 $S_\pi(G)=\prod_{p_i\in\pi}S_{p_i}$ 幂零. 故若 G 的正规子群 $M\lneq S_\pi(G)$，令 $\bar S_\pi(G)=S_\pi(G)/M$，$\bar S_{p_i}=S_{p_i}M/M$，则 $\bar S_\pi(G)=\prod_{p_i\in\pi}\bar S_{p_i}$. 因为 $\bar S_\pi(G)\neq 1$，因此至少存在一个 $\bar S_{p_i}\neq 1$，$p_i\in\pi$. 于是 $Z(\bar S_{p_i})\neq 1$. 故由 $Z(\bar S_\pi(G))=\prod_{p_i\in\pi}Z(\bar S_{p_i})\neq 1$ 知 $Z(S_\pi(G)/M)\neq 1$. 证毕.

定理 8 G 为π-拟幂零群$\Longleftrightarrow G/\Phi(G)$ 为π-拟幂零群. 其中 $\Phi(G)$ 为 G 的 Frattini 子群.

证 仅证充分性. 若 $G/\Phi(G)$ 为π-拟幂零群，任取 G 的极大子群 M 及 Sylow p_i-子群 S_{p_i}，$p_i\in\pi$. 分别记其同态象为 $\bar M$ 和 $\bar S_{p_i}$，由定理 1，$\bar M$ 与 $\bar S_{p_i}$ 可换，从而 M 与 S_{p_i} 可换. 复由定理 1，G 为π-拟幂零群. 证毕.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

以上诸定理表明，π-拟幂零群与幂零群有着极为相似的特点，而幂零群是π-拟幂零群的特例。下述定理将给出与超可解有关的结果。

定理 9 若G为π-拟幂零群，对每一个$q_j\in\pi'$，G的Sylow q_i-子群S_{q_j}的极大子群是G的π'-拟正规子群，且对每一个$p_i\in\pi$，G的Sylow p_i-子群S_{p_i}的极大子群与G的π'-Hall子群可换，则G为超可解群。

证 设 $\circ(G)=\prod\limits_i p_{p_i}^{\alpha_i}\prod\limits_j q_j^{\beta_j}$，$p_i\in\pi$，$q_j\in\pi'$。

若$\forall q_j\in\pi'$，$S_{q_j}=1$，则定理显然成立。当存在$q_j\in\pi'$，使$S_{q_j}\neq 1$时，记每一个这样的S_{q_j}的极大子群为$S_{q_j}^0$。我们首先证明$S_{q_j}^0\lhd G$。事实上，因为$S_{q_j}^0$在G中π'-拟正规，故由[2]定理 1，对每一个异于q_j的素数$q_i\in\pi'$，$S_{q_j}^0$是$S_{q_j}^0S_{q_i}$的次正规Sylow q_j-子群，故$S_{q_j}^0\lhd S_{q_j}^0S_{q_i}$。同理$S_{q_j}^0\lhd S_{q_j}^0S_{p_i}$对每一个$p_i\in\pi$。考虑到$S_{q_j}^0\lhd S_{q_j}$，于是$\circ(N_G(S_{q_j}^0))$的素分解式中含有$\circ(G)$的一切素因子的最高幂。于是$S_{q_j}^0\lhd G$。

其次，对一切$p_i\in\pi$和一切$q_j\in\pi'$，令N为所有S_{p_i}和所有$S_{q_j}^0$之积。由于N的Sylow子群均正规，因而N幂零且G/N的阶不含平方因子，所以G/N超可解。于是G可解。

设M为G的任一极大子群，则$[G:M]=q_j^n$或$[G:M]=p_i^m$，$p_i\in\pi$，$q_j\in\pi'$，m、$n\geqslant 1$。

1° 若$[G:M]=q_j^n$。此时$\circ(M)=(\prod\limits_i^{\alpha_i}\prod\limits_k^{\beta_k})q_j^{\beta_j-n}$，其中$p_i\in\pi$，$q_k\in\pi'$且$q_k\neq q_j$。记$\circ(M)/q_j^{\beta_j-n}=a$。由于$M$可解，而$(a,\ q_j^{\beta_j-n})=1$，于是$M=AM_{q_j}$，其中$M_{q_j}$为$M$的Sylow q_j-子群，$\circ(A)=a$。因为必存在S_{q_j}的极大子群$S_{q_j}^0$使得$M_{q_j}\leqslant S_{q_j}^0<S_{q_j}$，而$S_{q_j}^0\lhd G$已如前证，故由$M$的极大性，从$M=AM_{q_j}\leqslant AS_{q_j}^0<G$，可知$M=AS_{q_j}^0$。故$[G:M]=q_j$。

2° 若$[G:M]=p_i^m$。此时$\circ(M)=(\prod\limits_k p_k^{\alpha_k}\prod\limits_j q_j^{\beta_j})p_i^{\alpha_i-m}$，其中$p_k\in\pi$且$p_k\neq p_i$，$q_j\in\pi'$。记$\circ(M)/p_i^{\alpha_i-m}=a'$。和 1° 的情况相同，我们有$M=AM_{p_i}$，其中$M_{p_i}$为$M$的Sylow p_i-子群，$\circ(A)=a'$。且存在S_{p_i}的极大子群$S_{p_i}^0$使得$M_{p_i}\leqslant S_{p_i}^0<S_{p_i}$。由于$A$可解，故$A=BC$，其中$\circ(B)=\prod\limits_k p_k^{\alpha_k}$，$p_k\in\pi$且$p_k\neq p_i$，而$\circ(C)=\prod\limits_j q_j^{\beta_j}$，$q_j\in\pi'$。由于$C$为$G$的$\pi'$-Hall子群，由设$CS_{p_i}^0=S_{p_i}^0C$，而$B$为$G$的Sylow p_k-子群的直积，所以A与$S_{p_i}^0$可换，从而$AS_{p_i}^0$为G的子群。而$M=AM_{p_i}\leqslant AS_{p_i}^0<G$说明$M=AS_{p_i}^0$。于是$[G:M]=p_i$。

综合1°、2°，由 Huppert 定理，G为超可解群。证毕。

如果在定理 9 中考虑特殊情况，令$\pi\cap\pi(G)=\varnothing$，我们可以立即得到[1]的两个主要结果。今以推论形式述于次。

推论 1 G的所有Sylow子群的极大子群正规于G，则G超可解。

推论 2 对于$\pi'=\pi(G)$，若G的所有Sylow子群的极大子群在G中π'-拟正规，则G为超可解群。

本文承蒙张远达先生、曹锡华先生以及南京大学赵力田先生、广西大学李世余、俞曙霞先生关心和指导，谨此致谢。

参 考 文 献

[1] Srinivasan, S., Two Sufficient Conditions for Supersolvability of Finite Groups, *Israel Jornal Math*. V35 No 3(1980).

[2] Kegel, O. H., Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen, *Math. Z.* 78(1962) 205.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.