第5卷 第3期 数学研究与评论 Vol.5 No.3
1985年7月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION July, 1985

联合逼近的存在性与离散化*

祝长忠

（上海科技大学）

摘　　要

本文研究了紧距离空间上的函数集合被满足Young条件的函数类的联合逼近问题，建立了存在性定理，得到了极限定理，证明了可以用函数集合的离散化或距离空间的离散化得到最佳联合逼近。

设X是紧距离空间，$C[X]$是X上的连续函数空间。对任一函数$g\in C[X]$，定义切比雪夫范数

$$\|g(x)\|_X=\sup\{|g(x)|:x\in X\}.$$

设函数$F(A,x)$连续依赖于参数$A=(a_1,\cdots,a_n)$，$A\in P$，P是n维欧氏空间E_n的一个非空闭子集，且对任何$A\in P$，都有$F(A,x)\in C[X]$。

给定一个函数集合$\mathscr{F}\subset C[X]$，所谓用函数类$F(A,x)$对它作联合逼近，就是要选取一个参数$A^*\in P$，使

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|_X=\inf_{A\in P}\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A,x)\|_X,$$

这样的A^*和$F(A^*,x)$分别称为在X上对$\mathscr{F}$的最佳联合逼近参数和最佳联合逼近函数。

若$\mathscr{F}$是单元素集，$F(A,x)$是线性函数$F(A,x)=\sum_{i=1}^n a_ig_i(x)$，其中$\{g_i(x)\}$在$X$上满足Haar条件，且$P=E_n$，则上述逼近就是经典的线性切比雪夫逼近问题[1, pp.72]。

若$\mathscr{F}$是有限集$\mathscr{F}=\{f_1,\cdots,f_s\}$，$X$是区间$[a,b]$，取

$$f^+(x)=\max\{f_k(x),\ k=1,\cdots,s\},$$
$$f^-(x)=\min\{f_k(x),\ k=1,\cdots,s\},$$

显然$f^+(x)$，$f^-(x)$仍属于$C[X]$，且$f^+(x)\geqslant f^-(x)$。由

$$\max\{\|f_k(x)-F(A,x)\|_X,\ k=1,\cdots,s\}=\max\{\|f^+(x)-F(A,x)\|_X,\|f^-(x)-F(A,x)\|_X\},$$

可知对$\mathscr{F}$的联合逼近可归结为对$f^+(x)$和$f^-(x)$两个函数的联合逼近。Dunham[2]研究了当$f^+(x)$和$f^-(x)$分别为上半连续和下半连续函数时，用n阶唯一可解函数$F(A,x)$对这两个函数的联合逼近问题。史应光[3]解决了当$F(A,x)$是线性函数时的同一类问题，并给出了最佳逼近的一个算法。

*1983年8月29日收到。

若$\mathscr{F}$是无限集，且在X上一致有界，X是闭区间，由文献[4]知，对$\mathscr{F}$的联合逼近也等价于对一个上半连续函数和一个下半连续函数的联合逼近，所以仍可归结为Dunham型联合逼近问题。

本文假设$\mathscr{F}$是无限集，但把逼近函数类$F(A,x)$加以扩充。我们假设$F(A,x)$满足Young条件[5,pp.26-27;6]:

(1) 若$\{A_k\}\subset P$，$A^*\in P$，由极限$\lim\limits_{k\to\infty}A_k=A^*$可推出

$$\lim_{k\to\infty}\|F(A_k,x)-F(A^*,x)\|_X=0,$$

即$\{F(A_k,x)\}$在X上一致收敛到$F(A^*,x)$；

(2) 存在紧集$Y\subset X$，对任何$\{A_k\}\subset P$，由$\max\{|a_{k_i}|:i=1,\cdots,n\}\to\infty$可推出

$$\|F(A_k,x)\|_Y\to\infty,$$

其中$A_k=(a_{k_1},\cdots,a_{k_n})$。$Y$称为$X$的参数有界集。

满足Young条件的函数类有不少，如线性函数类$F(A,x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ig_i(x)$[5,pp.27]、满足一定条件的有理函数类[7;5,pp.75]、n阶唯一可解函数[6,pp.61]，以及满足Young条件的函数类加权或变形所形成的函数类[6,pp.61]等。

定理1（最佳逼近的存在性） 设$\mathscr{F}\subset C[X]$在X上一致有界，函数类$F(A,x)$满足Young条件，则在X上对$\mathscr{F}$的最佳联合逼近存在。

证 设[注] $\inf\limits_{A\in P}\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A,x)\|=e(\mathscr{F},P)$，

则存在单调下降数列$\{\sup\limits_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A_k,x)\|\}$，$A_k\in P$，满足

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A_k,x)\|=e(\mathscr{F},P).\tag{1}$$

我们指出数列$\{\max\{|a_{k_i}|:i=1,\cdots,n\}\}$是有界的，因为若不然，由Young条件可推知（必要时取子列）

$$\|F(A_k,x)\|\geqslant\|F(A_k,x)\|_Y\to\infty,$$

其中Y是X的参数有界集。由于$\mathscr{F}$在X上一致有界，所以存在$M>0$，对一切$f\in\mathscr{F}$成立

$$\|f(x)\|<M,$$

从而

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A_k,x)\|\geqslant\|f(x)-F(A_k,x)\|\geqslant\|F(A_k,x)\|-\|f(x)\|\to\infty,$$

矛盾。所以向量序列$\{A_k\}$有界，从而存在极限点，设为$\bar{A}$。不妨（必要时取子列）认为$\{A_k\}\to\bar{A}$。因为P是闭集，所以$\bar{A}\in P$。易证$\bar{A}$就是在X上对$\mathscr{F}$的最佳联合逼近参数。因为若不然，则存在$B\in P$和$\varepsilon>0$，使

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(B,x)\|<\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\bar{A},x)\|-\varepsilon.\tag{2}$$

由Young条件知$\|F(A_k,x)-F(\bar{A},x)\|\to0$，又由

$$\|f(x)-F(A_k,x)\|\geqslant\|f(x)-F(\bar{A},x)\|-\|F(A_k,x)-F(\bar{A},x)\|,$$

[注] 以下直至定理3以前，范数都在X上取，所以下标X省略。

当 k 充分大时有

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A_k,x)\|>\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\bar{A},x)\|-\varepsilon/2,$$

考虑到（2），于是当k充分大时，

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A_k,x)\|>\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(B,x)\|+\varepsilon/2\geqslant e(\mathscr{F},P)+\varepsilon/2,$$

这与（1）矛，证毕。

定理 2　设(i)$\mathscr{F}\subset C[X]$在X上一致有界，$\mathscr{F}_k\subset\mathscr{F}$ $(k=1,2,\cdots)$，且对任何 $f\in\mathscr{F}$，存在 $f_k\in\mathscr{F}_k$，成立 $\|f_k(x)-f(x)\|\to0$；(ii)$F(A,x)$ 满足 Young 条件，且 A_k 是在 X 上对$\mathscr{F}_k$ 的最佳联合逼近参数，则函数序列$\{F(A_k,x)\}$存在在X上一致收敛的子序列，且该子序列的极限函数是在X上对$\mathscr{F}$的最佳联合逼近函数。

证　根据定理 1，在 X 上对$\mathscr{F}$的最佳联合逼近函数存在，设为$F(A^*,x)$，由于 $\mathscr{F}_k\subset\mathscr{F}$，并由 A_k 的含义，知

$$\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A_k,x)\|\leqslant\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A^*,x)\|\leqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|,$$

所以

$$\|F(A_k,x)\|\leqslant\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)\|+\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|\leqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)\|+\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|.$$

考虑到$\mathscr{F}$在X上一致有界，由上式可知，存在$M>0$，对一切 k 成立$\|F(A_k,x)\|<M$。于是根据 Young 条件可知$\{A_k\}$有界，从而有极限点，设为 $\bar{A}$。因为P是闭集，所以 $\bar{A}\in P$。再根据 Young 条件知，$\{F(A_k,x)\}$存在在X上一致收敛的子序列。

为证定理后一部分，只需证

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\bar{A},x)\|=\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|.$$

首先，由 A^* 的定义知

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\bar{A},x)\|\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|.$$

现证相反的不等式。由定理假设知，对任何$f\in\mathscr{F}$，存在$f_k\in\mathscr{F}_k$，成立$\|f_k(x)-f(x)\|\to0$，从而由

$$\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A,x)\|\geqslant\|f_k(x)-F(A,x)\|\geqslant\|f(x)-F(A,x)\|-\|f(x)-f_k(x)\|,$$

可得对任何$A\in P$，成立

$$\varliminf_{k\to\infty}\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A,x)\|\geqslant\|f(x)-F(A,x)\|,$$

进而对任何 $A\in P$，成立

$$\varliminf_{k\to\infty}\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A,x)\|\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A,x)\|,$$

又根据

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A^*,x)\|\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A_k,x)\|$$

$$\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(\bar{A},x)\|-\|(F(\bar{A},x)-F(A_k,x)\|,$$

得

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|\geqslant\varliminf_{k\to\infty}\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(\bar{A},x)\|\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\bar{A},x)\|.$$

定理证毕。

推论 在定理2条件下，成立

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{A\in P}\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A,x)\|=\inf_{A\in P}\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A,x)\|. \qquad (3)$$

证 从定理2的证明过程，易知

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A_k,x)\|\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\bar{A},x)\|\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|.$$

另一方面，由

$$\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A_k,x)\|\leqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|,$$

可得

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\sup_{f\in\mathscr{F}_k}\|f(x)-F(A_k,x)\|\leqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|,$$

所以（3）式成立.

注 （离散化）. 若$\mathscr{F}$是$C[X]$中的列紧集，根据泛函分析中的亚尔采拉定理[8]知，$\mathscr{F}$必在X上一致有界. 又根据Hausdorff定理[8]知，存在有限集合序列$\{\mathscr{F}_k\}$，$\mathscr{F}_k\subset\mathscr{F}$ $k=1,2,\cdots$，对任何$f\in\mathscr{F}$，总有$f_k\in\mathscr{F}_k$，成立$\|f_k(x)-f(x)\|\to 0$. 所以，若把定理2的条件（i）改为$\mathscr{F}$是列紧集，结论仍成立. 这样，就可以用对有限集$\mathscr{F}_k$的联合逼近来近似代替对无限集$\mathscr{F}$的联合逼近，前者在计算上当然容易些，这种离散化方法可以进一步尝试.

下面，考虑另一种极限定理，是对距离空间离散化误差理论[1, pp. 86—87；6]的再推广.

定理3 设（i）$\mathscr{F}\subset C[X]$在X上一致有界；（ii）$F(A,x)$满足Young条件，X_0是X的参数有界集；（iii）X_k，$k=1,2,\cdots$是紧集，$X_0\subset X_1\subset X_2\subset\cdots\subset X$，且对任何$x\in X$，存在$x_k\in X_k$，成立$d(x_k,x)\to 0$[注]；（iv）$A_k$是在$X_k$上对$\mathscr{F}$的最佳联合逼近参数，则$\{A_k\}$存在极限点，且这样的极限点是在$X$上对$\mathscr{F}$的最佳联合逼近参数.

证 首先指出$\{A_k\}$必有界，因为否则由Young条件可推知（必要时取子列）$\|F(A_k,x)\|_{X_0}\to\infty$. 由$X_0\subset X_k$得$\|F(A_k,x)\|_{X_k}\to\infty$. 再由条件（i），可得

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A_k,x)\|_{X_k}\to\infty,$$

与（iv）矛盾. 所以$\{A_k\}$存在极限点，设为$\bar{A}$，显然$\bar{A}\in P$，且不妨认为$\{A_k\}\to\bar{A}$.

由定理1知，在X上对$\mathscr{F}$的最佳联合逼近存在，设A^*是最佳联合逼近参数. 下面证明$\bar{A}$也是最佳联合逼近参数. 对任何$f\in\mathscr{F}$，由$|f(x)-F(\bar{A},x)|$在X上的连续性，以及X的紧性，必存在点$x\in X$，使

$$|f(x)-F(\bar{A},x)|=\|f(x)-F(\bar{A},x)\|_X,$$

根据定理条件（iii），存在$x_k\in X_k$，使$d(X_k,x)\to 0$. 于是

$$\begin{aligned}|f(x)-F(\bar{A},x)|&\leqslant\lim_{k\to\infty}|f(x_k)-F(A_k,x_k)|\\&\leqslant\sup_k\|f(x)-F(A_k,x)\|_{X_k}\leqslant\sup_k\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A_k,x)\|_{X_k}\\&\leqslant\sup_k\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|_{X_k}\leqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|_X,\end{aligned}$$

[注]$d(x,y)$表示x与y之间的距离.

所以

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\overline{A},x)\|_X\leqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|_X.$$

考虑到A^*的含义，应有

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\overline{A},x)\|_X\geqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|_X,$$

于是

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\overline{A},x)\|_X=\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|_X,$$

证毕。

推论　在定理 3 条件下，成立

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{A\in P}\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A,x)\|_{X_k}=\inf_{A\in P}\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A,x)\|_X. \tag{4}$$

且若在X上对$\mathscr{F}$的最佳联合逼近函数唯一，记为$F(A^*,x)$，则$\{F(A_k,x)\}$在X上一致收敛到$F(A^*x)$。

证　从定理 3 的证明中知

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A_k,x)\|_{X_k}\leqslant\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A^*,x)\|_X. \tag{5}$$

下面证明：任给$\varepsilon>0$，当k充分大时有

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(A_k,x)\|_{X_k}>\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\overline{A},x)\|_X-\varepsilon, \tag{6}$$

其中$\overline{A}$是$\{A_k\}$的极限点，且认为$\{A_k\}\to\overline{A}$。

对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\bar{f}\in\mathscr{F}$，使

$$\|\bar{f}(x)-F(\overline{A},x)\|_X>\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\overline{A},x)\|_X-\frac{\varepsilon}{2}.$$

显然存在$x\in X$，使$|\bar{f}(x)-F(\overline{A},x)|=\|\bar{f}(x)-F(\overline{A},x)\|_X$，且存在$x_k\in X_k$，$d(x_k,x)\to 0$。由不等式

$$\begin{aligned}|\bar{f}(x)-F(\overline{A},x)|\leqslant&|\bar{f}(x)-\bar{f}(x_k)|+|\bar{f}(x_k)-F(A_k,x_k)|\\&+|F(A_k,x_k)-F(\overline{A},x_k)|+|F(\overline{A},x_k)-F(\overline{A},x)|,\end{aligned}$$

以及当k充分大时

$$|\bar{f}(x)-\bar{f}(x_k)|+|F(A_k,x_k)-F(\overline{A},x_k)|+|F(\overline{A},x_k)-F(\overline{A},x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

知当k充分大时

$$\begin{aligned}\|\bar{f}(x)-F(A_k,x)\|_{X_k}\geqslant|\bar{f}(x_k)-F(A_k,x_k)|>&\|\bar{f}(x)-F(\overline{A},x)\|_X-\frac{\varepsilon}{2}\\>&\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f(x)-F(\overline{A},x)\|_X-\varepsilon,\end{aligned}$$

于是立即可得（6）式。由（5）、（6）式即得（4）。

至于推论的后一部分，根据定理3的结论，并由Young条件即可推知。

参考文献

[1] Cheney, E. W., Introduction to apporoximation theory, McGraw-Hill, New York, 1966.

[2] Dunham, C. B., Simultaneous Chebyshev approximation of functions on an interval, *Proc*, Amer. Math. Soc., 18:3 (1967), 472—477-

[3] 史应光，Dunham型联合最佳逼近，数值计算与计算机应用，(3)1981, 138—142.

[4] Diaz, J. B., MacLaughlin, H. W., Simultaneous approximation of a set of bounded real functions, *Math. Comp.*, 23:107 (1969), 583—594.

[5] Rice, J. R., The approximation of functions, Vol. 1, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964.

[6] Dunham, C. B., The limit of non-linear Chebyshev approximation on subsets *Aequationes Math.*, 9(1973), 60—63.

[7] Dunham, C. B., Chebyshev approximation by rationals with constrained denominators,. J. Approx. Theory, 1(1983), 5—11.

[8] Л. A. 刘斯铁尔尼克，B. И. 索伯利夫，泛函分析概要，1964.

Existence and Discretization of Simultaneous Approximation

Zhu Chang-zhong

Abstract

In this paper we study the problem of simultaneous approximation of a set of functions on a compact metric space by a family of functions satisfying Young's condition,. Existence is established. Limit theorems are obtained. It is also pointed out that discretization of the set of functions or the metric space can be employed to get a best approximation.