Fuzzy测度空间上的"几乎"与"伪几乎"概念

王　震　源

（河北大学）

既然Sugeno的Fuzzy测度不具有可加性，那么，就有必要在Fuzzy测度空间上同时引进"几乎"与"伪几乎"这两个概念。由此，对于Fuzzy测度空间上可测函数列的收敛，也相应地出现许多新的内容。本文将讨论这些收敛之间的关系，我们得到的一系列结果推广了经典测度论中相应的定理。我们还发现，〔1〕中引进的集函数的自连续性这个概念对上述研究起着极为重要的作用，在一些定理中它恰到好处地替代了经典测度论中可加性这个条件。

设X是一个非空集合，$\mathscr{F}$是X的子集的一个σ-代数。可测空间$(X, \mathscr{F})$上的一个集函数μ：$\mathscr{F}\to[0, \infty]$称为Fuzzy测度，若它单调、连续，且$\mu(\phi)=0$。

若μ是$(X, \mathscr{F})$上的Fuzzy测度，我们称$(X, \mathscr{F}, \mu)$为Fuzzy测度空间。在本文中，f、f_n，$n=1, 2, \cdots$，总是表示$(X, \mathscr{F}, \mu)$上的广义实值可测函数（参见〔1〕，〔2〕）。

定义1　设$A\in\mathscr{F}$。若存在$E\in\mathscr{F}$，满足$\mu(E)=0$　$(\mu(A-E)=\mu(A))$，使得命题P在$A-E$上成立，则称P在A上几乎处处（伪几乎处处）成立。

定义2　设$A\in\mathscr{F}$。若存在$\{E_n\}\subset\mathscr{F}$，满足$\mu(E_n)\to 0$　$(\mu(A-E_n)\to\mu(A))$，使得对一切$n=1, 2, \cdots$，命题P在$A-E_n$上成立，则称P在A上几乎（伪几乎）成立。

由定义2，容易得到可测函数列几乎一致收敛与伪几乎一致收敛的概念。我们分别用"$a.e.$"、"$p.a.e$"、"a"、"$p.a.$"、"$a.u.$"和"$p.a.u.$"来表示"几乎处处"、"伪几乎处处"、"几乎"、"伪几乎"、"几乎一致"和"伪几乎一致"。

记$E^+=\{x: f(x)=+\infty\}$、$E^-=\{x: f(x)=-\infty\}$及$E^*=X-E^+-E^-$。

定义3　设$A\in\mathscr{F}$。若对任一给定的$\varepsilon>0$，有$\mu(([\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}\cap E^*]\cup[\{f_n\leq\frac{1}{\varepsilon}\}\cap E^+]\cup[\{f_n\geq-\frac{1}{\varepsilon}\}\cap E^-])\cap A)\to 0$　$(\mu(([\{|f_n-f|<\varepsilon\}\cap E^*]\cup[\{f_n>\frac{1}{\varepsilon}\}\cap E^+]\cup[\{f_n<-\frac{1}{\varepsilon}\}\cap E^-])\cap A)\to\mu(A))$，则称$\{f_n\}$在$A$上依Fuzzy测度$\mu$收敛（伪依Fuzzy测度$\mu$收敛）于$f$，并记为$f_n\xrightarrow{\mu}f$（$f_n\xrightarrow{p.\mu}f$）。

应当注意，"几乎"与"伪几乎"并不是两个完全对称的概念。例如，若命题P在$A\in\mathscr{F}$上几乎处处成立，则也在A的任一可测子集上几乎处处成立；但对"伪几乎处处"却没有相应的结论。当μ为有限测度时，这两个概念重合。

在上述概念的基础上，以下三个定理是不难证明的。

定理1　设$A\in\mathscr{F}$。在A上，若$f_n\xrightarrow{a.u.}f$　$(f_n\xrightarrow{p.a.u.}f)$，则$f_n\xrightarrow{a.e.}f$　$(f_n\xrightarrow{p.a.e.}f)$。

定理2　设$A\in\mathscr{F}$。在A上，若$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，且$\mu(A)<\infty$，则$f_n\xrightarrow{\mu}f$；若$f_n\xrightarrow{p.a.e.}f$，则

* 1982年 5 月20日收到。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$f_n \xrightarrow{p.\mu} f$。

定理3 设$A\in\mathscr{F}$。在A上，若$f_n \xrightarrow{a.u.} f$ （$f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$），则$f_n \xrightarrow{\mu} f$ （$f_n \xrightarrow{p.\mu} f$）。

为了得到Fuzzy测度空间上相应于经典测度论中Egoroff定理与Liesz定理的推广形式，我们需要〔1〕中引进的“自连续性”概念。

定义4 可测空间（X，$\mathscr{F}$）上的集函数μ：$\mathscr{F}\to[-\infty,\infty]$被称为是上（下）自连续的，若对一切满足$A\cap B_n=\phi$ （$B_n\subset A$），$n=1,2,\cdots$，$\mu(B_n)\to 0$的A、$B_n\in\mathscr{F}$，有

$$\mu(A\cup B_n)\to\mu(A) \qquad (\mu(A-B_n)\to\mu(A))$$

μ被称为是自连续的，若它既上自连续，又下自连续。

对于Fuzzy测度来说，“自连续”这个条件是相当弱的，它为很广泛的若干类Fuzzy测度所满足。例如，当μ为次可加时（特别，为F－可加时），以及当μ是拟测度时（特别，是g_λ型Fuzzy测度时），都是自连续的（参见〔1〕、〔3〕、〔4〕）。显然，经典的测度是自连续的。此外，可能性测度（参见〔5〕）也具有自连续性，虽然它不一定是一个Fuzzy测度。

引理1 设$\{E_n\}\subset\mathscr{F}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$。若$\mu$为上（下）自连续，则存在$\{E_n\}$的子列的序列$\{\mathscr{E}_k\}$，其中$\mathscr{E}_k=\{E_{n_i(k)}\}$，$k=1,2,\cdots$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{n_i(k)})=0 \qquad (\lim_{k\to\infty}\mu(X-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{n_i(k)})=\mu(X))\text{。}$$

证：对任意给定的$\varepsilon>0$，取n_1，使得$\mu(E_{n_1})<\frac{\varepsilon}{2}$。若$\mu$为上自连续，则对于$E_{n_1}$，可取$n_2>n_1$，使得$\mu(E_{n_1}\cup E_{n_2})<\mu(E_{n_1})+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{3}{4}\varepsilon$；一般地，对于$\bigcup_{i=1}^{k}E_{n_i}$，可取$n_{k+1}>n_k$，使得$\mu(\bigcup_{i=1}^{k}E_{n_i}\cup E_{n_{k+1}})<(1-\frac{1}{2^{k+1}})\varepsilon<\varepsilon$。结果，得到$\{E_n\}$的一个子列$\{E_{n_i}\}$，使得

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{n_i})=\lim_{k=\infty}\mu(\bigcup_{i=1}^{k}E_{n_i})\leqslant\varepsilon\text{。}$$

类似地，当μ为下自连续时，可以分别在$\mu(X)=\infty$和$\mu(X)<\infty$的情况下证明相应的结论。Ⅰ

引理2 设$\{E_n\}\subset\mathscr{F}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=0$。若$\mu$为上（下）自连续，则存在$\{E_n\}$的子列$\{E_{n_i}\}$，使得

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}E_{n_i})=0 \qquad (\mu(X-\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}E_{n_i})=\mu(X))\text{。}$$

证：由引理1，存在$\{E_n\}$的子列$\{E_{n_i^{(1)}}\}$，使得$\mu(\bigcup_{i=\infty}(E_{n_i^{(1)}})<1$，注意到$\lim\limits_{i\to\infty}\mu(E_{n_i^{(1)}})=0$，故又存在$\{E_{n_i^{(2)}}\}$，的子列$\{E_{n_i^{(2)}}\}$，使得$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{n_i^{(2)}})<\frac{1}{2}$；一般地，存在$\{E_{n_i^{(k-1)}}\}$的子列$\{E_{n_i^{(k)}}\}$，使得$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{n_i}^{(k)})<\frac{1}{k}$，$k=2,3,\cdots$，取$n_i=n_i^{(i)}$，得到$\{E_n\}$的子列$\{E_{n_i}\}$，有

$$\bigcup_{i=k}^{\infty}E_{n_i}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{n_i^{(k)}}，\ k=1,2,\cdots，\text{。}$$

结果，

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}E_{n_i})\leqslant\mu(\bigcup_{i=k}^{\infty}E_{n_i})\leqslant\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{n_i^{(k)}})<\frac{1}{k}$$

对一切$k=1,2,\cdots$成立。于是，

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}E_{n_i})=0 \quad\text{。}$$

类似地，可以证明μ为下自连续时的结论。Ⅰ

当μ为经典的测度这一特殊情况时，引理2的结论也可由Borel-Cantelli引理推得。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定理4 设$A\in\mathscr{F}$，μ为上(下)自连续，$\mu(A)<\infty$。在A上，若$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，则$f_n\xrightarrow{a.u}f$ ($f_n\xrightarrow{p.a.u.}f$)。

证：由引理1，使用类似于经典测度论中证明相应定理的技巧不难得证。∎

定理5 设$A\in\mathscr{F}$，μ为上(下)自连续。在A上，若$f_n\xrightarrow{\mu}f$，则存在$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_i}\}$，$f_{n_i}\xrightarrow{a.e.}f$ ($f_{n_i}\xrightarrow{p.a.e.}f$)。

证：由引理2不难得证。∎

参 考 文 献

〔1〕Wang zhenyuan, The autocontinuity of set function and the fuzzy integral, 12th meeting of the EWG on fuzzy sets, Hamburg, July 1981.

〔2〕Halmos P. R., Measury Theory, Van Nostrand, New York, 1967.

〔3〕Sugeno M., Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey, in "Fuzzy automata and decision processes" (Gupta, Saridis, Gaines eds.) North Holland, 1977, 89—102.

〔4〕Wang zhenyuan, Une classe de mesures flous—les quasimesures, BUSEFAL, France, Vol. 6(1981), 28—37.

〔5〕Zadeh L. A., Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Syst., 1(1978), 3—28.

〔6〕Ralescu D. & Adams G., The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl., 75(1980), 562—570.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.