关于线性算子的高阶饱和*

余 祥 明

（南京师院数学系）

设$f(x)\epsilon C_{2\pi}$，而$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}A_k(f_1x)\equiv\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

又设　$$U_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)u_n(t)dt,$$

其中$u_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{(n)}\cos kt$满足条件：$\int_0^{\pi}|u_n(t)|dt=O(1)$，$\rho_k^{(n)}\to 1$ $(n\to\infty;\ k=1,2,\cdots,)$。设$m$是正整数，$\rho_0^{(n)}=1$。记$\Delta^m\rho_k^{(n)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}\rho_{k+\nu}^{(n)}$ $(k=0,1,\cdots,)$。T. Nishishiraho 考虑了在$\rho_k^{(n)}=0(k>n)$的情况下$U_n(f,x)$的饱和问题，证明了[1],[2]。

定理A　设$\{\varphi_n\}$是收敛于0的正数列，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\rho_k^{(n)}}{\varphi_n}=k\quad(k=1,2,\cdots)\tag{1}$$

和$\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta^2\rho_k^{(n)}\right|=O(\varphi_n)$，那么，$U_n(f,x)$追近$f(x)$的饱和阶是$(\varphi_n)$，饱和类$S(U_n)=\{f(x)\epsilon C_{2\pi},\ \hat{f}(x)\epsilon \mathrm{Lip}1\}$

由(1)，实际上我们可取$\varphi_n=1-\rho_1^{(n)}$。我们见到(1)等价于$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\rho_k^{(n)}}{1-\rho_1^{(n)}}=k$，也就等价于$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta\rho_k^{(n)}}{\Delta\rho_0^{(n)}}=1$ $(k=1,2,\cdots)$。所以上述结果可以改述为

定理A′　假如$u_n(t)$满足条件：

$$\lim_{k=\infty}\frac{\Delta\rho_k^{(n)}}{\Delta\rho_0^{(n)}}=1\quad(k=1,2,\cdots)\qquad\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta^2\rho_k^{(n)}\right|=O(1-\rho_1^{(n)}),$$

那么，$U_n(f,x)$追近$f(x)$的饱和阶是$(1-\rho_1^{(n)})$，饱和类$S(U_n)=\{f(x)\epsilon C_{2\pi},\ \hat{f}(x)\epsilon\mathrm{Lip}1\}$

在本文中，我们用不同的方法将上述定理推广到$U_n(f,x)$的高阶饱和的情况，而Nishishiraho的结果则是包含在定理2中。

设$p.q.j.$是正整数，记

$$\delta_p(j)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\frac{k^j}{j!},\qquad C_{p,0}=1,\ C_{p,q}=-\sum_{i=1}^{q}\delta_p(p+i)C_{p+i,q-i}$$

设m是正整数，对于$k=1,2,\cdots,$记

* 1983年5月1日收到。

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{\rho_k^{(n)}-1}{k\Delta\rho_0^{(n)}} & (m=1),\\[2ex] \dfrac{\rho_k^{(n)}-1-\sum\limits_{j=1}^{m-1}\dfrac{k^j}{j!}\sum\limits_{q=j}^{m}C_{j,q-j}\Delta^q\rho_0^{(n)}}{\dfrac{k^m}{m!}\Delta^m\rho_0^{(n)}} & (m>1)\end{cases}$$

对于$f^{(m-1)}(x)\in C_{2\pi}$，则记

$$\nabla_m U_n(f,x)=\begin{cases}U_n(f,x)-f(x) & (m=1),\\ U_n(f,x)-f(x)-\sum\limits_{j=1}^{m-1}\dfrac{1}{j!}\sum\limits_{q=j}^{m}C_{j,q-j}\Delta^q\rho_0^{(n)}\cdot f^{(j)}(x) & (m>1)\end{cases}$$

定理1 设m是正整数，$f(x)\in C_{2\pi}$，$f^{(m-1)}(x)\in C_{2\pi}$。假如$U_n(t)$满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)}=1 \quad 和 \quad \int_0^\pi\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right|dt=O(1),$$

我们有

1）若$\nabla_m U_n(f,x)=o(|\triangle^m\rho_0^{(n)}|)$，则$f(x)$是常数。

2）当且仅当$f^{(m-1)}(x)\in\mathrm{Lip}\,1$时，$\nabla_m U_n(f,x)=O(|\triangle^m\rho_0^{(n)}|)$

证明 首先证明1）记

$$g_n(x)=(\triangle^m\rho_0^{(n)})^{-1}\nabla_m U_n(f,x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_k(g_n)\cos kx+b_k(g_n)\sin kx.$$

假如$\nabla_m U_n(f,x)=o(|\triangle^m\rho_0^{(n)}|)$，那么，我们有

$$\lim_{n\to\infty}a_k(g_n)=\lim_{n\to\infty}b_k(g_n)=0 \quad (k=1,2,\cdots)。\tag{2}$$

另一方面，我们见到

$$a_k(g_n)=\frac{\rho_k^{(n)}-1-\sum\limits_{j=1}^{m-1}\dfrac{k^j}{j!}\sum\limits_{q=j}^{m}C_{j,q-j}\Delta^q\rho_0^{(n)}}{\triangle^m\rho_0^{(n)}}a_k=\frac{k^m}{m!}\lambda_k^{(n)}a_k,$$

$$b_k(g_n)=\frac{\rho_k^{(n)}-1-\sum\limits_{j=1}^{m-1}\dfrac{k^j}{j!}\sum\limits_{q=j}^{m}C_{j,q-j}\triangle^q\rho_0^{(n)}}{\triangle^m\rho_0^{(n)}}b_k=\frac{k^m}{m!}\lambda_k^{(n)}b_k$$

由假设，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}a_k(g_n)=\frac{k^m}{m!}a_k, \quad \lim_{n\to\infty}b_k(g_n)=\frac{k^m}{m!}b_k,\tag{3}$$

从而，由(2)，我们得到$a_k=b_k=0(k=1,2,\cdots)$，则$f(x)$是常数。

现在证明2）假如$\nabla_m U_n(f,x)=O(|\triangle^m\rho_0^{(n)}|)$，那么，我们有$g_n(x)\in L_{2\pi}^\infty$，并且$\|g_n(x)\|_{L_{2\pi}^\infty}<M$，由弱*紧性定理，存在一序列$\{g_{n_j}(x)\}$和$g(x)\in L_{2\pi}^\infty$，使得对每一$S(x)\in L_{2\pi}$，成立着

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}g_{n_j}(x)S(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}g(x)S(x)dx$$

取$S(x)=\cos kx$或$\sin kx$，我们就得到

$$\lim_{j\to\infty} a_k(g_{n_j})=a_k(g),\quad \lim_{j\to\infty} b_k(g_{n_j})=b_k(g)\quad (k=1,2,\cdots),$$

这里$a_k(g)$和$b_k(g)$是$g(x)$的富里埃系数。这样，由(3)，我们知道

$$g(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^m}{m!}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$g(x)\in L_{2\pi}^{\infty}$即为$\hat{f}^{(m-1)}(x)\in \mathrm{Lip}\,1$.

现在设$\hat{f}^{m-1}(x)\in \mathrm{Lip}\,1$，我们来证明$\nabla_m U_n(f,x)=O(|\triangle^m\rho_0^{(n)}|)$。由于

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\left[\frac{\rho_k^{(n)}-1-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{k^j}{j!}\sum_{q=j}^{m}C_{j,q-j}\triangle^q\rho_0^{(n)}}{\triangle^m\rho_0^{(n)}}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^m}{m!}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\lambda_k^{(n)},$$

由假设，并注意到这时$f^{(m)}(x)\in L_{2\pi}^{\infty}$，我们得到

$$\|g_n(x)\|=\left\|\frac{1}{m!}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m)}(x+t)\cdot\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right)dt\right\|$$

$$<M\cdot\|f^{(m)}(x)\|_{L_{2\pi}^{\infty}}\cdot\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right|dt=O(1)$$

由是，$\nabla_m U_n(f,x)=O(|\triangle^m\rho_k^{(n)}|)$。证毕.

在〔3〕中，我们建立了以下的两个引理。

引理1 设m是正整数。那么，对于$k=1,2,\cdots,m$，成立着

$$\rho_k^{(n)}=1+\sum_{j=1}^{m}\frac{k^j}{j!}\sum_{q=j}^{m}C_{j,q-j}\triangle^q\rho_0^{(n)}$$

引理2 设m是正整数，那么，对于大于m的正整数k，成立着

$$\rho_k^{(n)}=1+\sum_{j=1}^{m}\frac{k^j}{j!}\sum_{q=j}^{m}C_{j,q-j}\triangle^q\rho_0^{(n)}+\sum_{j=0}^{k-m-1}\triangle^{m+1}\rho_j^{(n)}\frac{(k-j-m)(k-j-m+1)\cdots(k-j-1)}{m!}$$

根据〔3〕的定理2的证明，利用引理1和引理2，我们可以得到

引理3 假如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\triangle^m\rho_k^{(n)}}{\triangle^m\rho_0^{(n)}}=1\qquad (k=1,2,\cdots),$$

并且满足$\sum_{k=0}^{\infty}|\triangle^{m+1}\rho_k^{(n)}|=O(|\triangle^m\rho_0^{(n)}|)$，

那么，成立着$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)}=1$ 和 $\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right|dt=O(1)$

将引理3和定理1相结合，我们就有

定理2 设m是正整数，$f(x)\in C_{2\pi}$，$f^{(m-1)}(x)\in C_{2\pi}$。那么，当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\triangle^m\rho_k^{(n)}}{\triangle^m\rho_0^{(n)}} = 1 \quad (k=1,2,\cdots) \text{和} \sum_{k=0}^{\infty}\left|\triangle^{m+1}\rho_k^{(n)}\right| = \boldsymbol{O}\left(\left|\triangle^m\rho_k^{(n)}\right|\right)$$

时我们有

1）若$\nabla_m U_n(f, x) = 0(\left|\triangle^m\rho_k^{(n)}\right|)$，则$f(x)$是常数。

2）当且仅当$\hat{f}^{(m-1)}(x)$ Lip1 时，$\nabla_m U_n(f, x) = O(\left|\triangle^m\rho_0^{(n)}\right|)$．

Nishishiraho的结果是上述定理$m=1$的特殊情况。

同样地，对核为$u_\rho(t)$（$\rho\in(a, b)$，$\rho\to a$或b）的线性算子$U_\rho(f,x)$也有相应的上述定理成立，容易验证，已知的Abel－Poisson积分，Weierstrass积分，Riemann积分平均的有关的高阶饱和的结果都包含在此相应的定理中。

利用引理1和引理2，类似〔3〕的定理4的证明，我们可以得到

引理4 设$0<a\leqslant 1$。假如n阶三角多项式核$U_n(t)$满足条件：

$$\triangle^q\rho_0^{(n)} = O(n^{-aq}) \quad (q=1,2,\cdots,m+1),$$
$$\triangle^m\rho_0^{(n)} \sim n^{-am}, \qquad \rho_n^{(n)} = O(n^{-a}),$$
$$\sum_{k=1}^{n-m-1}\left|\triangle^{m+1}\rho_k^{(n)}\right| = O(n^{-am}),$$

那么，成立着

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^{(n)} = 1 \quad \text{和} \quad \int_0^\pi\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\cos kt\right|dt = O(1).$$

这样，由引理4和定理1，我们有

定理3 设m是正整数，$f(x)\in C_{2\pi}$，$\hat{f}^{(m-1)}(x)\in C_{2\pi}$，那么，当$n$阶三角多项式核$u_n(t)$满足引理4的条件时，定理1的结论成立。

作用应用，容易验证，be La Vallee－Poussin积分（对于$a=\frac{1}{2}$和m为偶数），Rogosinski算子（对于$a=1$和m为偶数），Fejer－Korovkin算子（对于$a=1$和$m\geqslant 2$）都满足定理3的条件，于是，我们可以得到它们相应的有关高阶饱和的结果。

参 考 文 献

〔1〕Toshihiko Nisishiraho, Saturation of Trigonometric Polynomial Operators, J. Approximation Theory, 24(1978), 208—215.

〔2〕王斯雷，关于三角多项式迫近连续函数的饱和性，杭大学报，8：1（1981），7—13.

〔3〕余祥明，有界卷积型线性算子的渐近展开，待发表。