关于最佳控制贝尔曼方程解的连续可微性*

罗　远　诠

（大连工学院应用数学系）

本文讨论了最佳控制贝尔曼方程

$$\sup_{u\in U}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\omega(x)}{\partial x^\alpha}f^\alpha(x,u)=1$$

的解 $\omega(x)$ 在综合函数 $u(x)$ 的转换曲面上的连续可微性．给出了判别 $\omega(x)$ 在 $u(x)$ 的转换曲面上存在一阶连续偏导数的充分条件．在满足该条件时，贝尔曼方程在转换曲面上仍然成立．

一、引　言

设有微分方程组

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(x^1,x^2,\cdots,x^n,u^1,\cdots,u^r),\ i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

或记为向量的形式

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u) \tag{2}$$

其中 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)\in X$，$u=(u^1,u^2,\cdots,u^r)\in U$，X是 n 维向量空间，U是 r 维向量空间中的一个闭区域．假定 $f(x,u)$ 当 $x\in X$ 及 $u\in U$ 时有定义且有对 x 的连续偏导数．即：

$$f^i(x^1,\cdots,x^n,u^1,\cdots,u^r)\text{ 及 }\frac{\partial f^i(x^1,\cdots,x^n,u^1,\cdots,u^r)}{\partial x^j},\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

在直积 $X\times U$ 上有定义且连续．又假定允许控制函数 $u(t)$ 为分段连续函数．

设有 x_0，$x_1\in X$，又给定控制函数 $u(t)\in U$，$t_0\le t\le t_1$．若方程（1）满足初始条件

$$x(t_0)=x_0 \tag{3}$$

的解 $x(t)$，$t_0\le t\le t_1$，具有 $x(t_1)=x_1$．则称控制函数 $u(t)$ 把相点 x_0 转移到 x_1．$T=t_1-t_0$ 称为转移时间．

最佳快速作用问题的提法如下：给定相点 x_0 及 x_1，在所有把相点从 x_0 转移到 x_1 的控制函数中，求出转移时间最小的控制函数．如果这样的控制函数存在，则称之为最佳控制函数．而它对应的相轨线称为最佳轨线．众所周知，许多更广泛的最佳控制问题都可化为最佳快速作用问题．为简化叙述，今后只讨论最佳快速作用问题．

下面令 x_1 为坐标原点，x_0 为X中任一点 x．于是最佳转移时间 T 只与 x 有关，记为 $T(x)$．引入函数

$$\omega(x)=-T(x) \tag{4}$$

众所周知，当 $\omega(x)$ 连续可微时，用动态规划方法可以证明 $\omega(x)$ 满足著名的贝尔曼方程

* 1984年12月3日收到．

$$\sup_{u\in U}\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial\omega(x)}{\partial x^a}f^a(x,u)=1\ . \qquad (5)$$

但是，在综合函数 $u(x)$ 的间断面上，一般不能保证 $\omega(x)$ 的连续可微性，即不能保证 $\frac{\partial\omega(x)}{\partial x^a}$ 存在．因此，讨论在什么情况下在 $u(x)$ 的间断面上仍保持 $\frac{\partial\omega(x)}{\partial x^a}$ 的连续性是很有意义的．关于这个问题我们给出下面的定理1．Λ．C．庞特里雅金在他的名著〔1〕中（参看〔1〕中64页）对某些例子认为沿 $u(x)$ 的间面上 $\omega(x)$ 均不存在一阶偏导数，应用定定理1可以说明他的这个结论是不正确的．

二、关于ω(x)的连续可微性

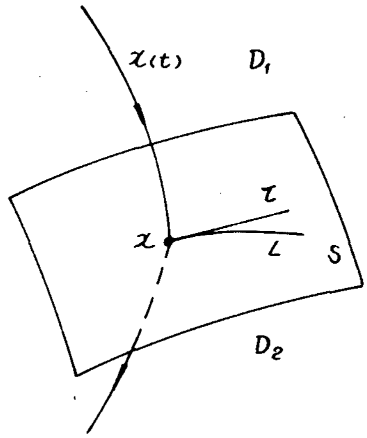
定理1 设有 n 维空间X上的区域 D_1，D_2．S是它们的交界面．假定S是一阶光滑曲面，$\omega(x)$ 分别在 D_1+S 及 D_2+S 上连续可微且满足贝尔曼方程（5）．如果对S上的任一点存在一条最佳轨线 $x(t)$，它从 D_1 穿越该点进入 D_2，且 $x(t)$ 在 D_1，D_2 两侧都不与S相相切，则 $\omega(x)$ 在S上连续可微，即 $\frac{\partial\omega(x)}{\partial x^a}$，$a=1,2,\cdots,n$，在S上存在且连续．

证 设 x 是S上的任一点，由定理假设知 $\omega(x)$ 的梯度分别从 D_1 及 D_2 趋于 x 时极限存在．我们记为 $\text{grad}\,\omega(x)_+$ 及 $\text{grad}\,\omega(x)_-$，

即：

$$\text{grad}\,\omega(x)_+=\lim_{\substack{y\to x\\ y\in D_1}}\text{grad}\,\omega(y),$$

$$\text{grad}\,\omega(x)_-=\lim_{\substack{y\to x\\ y\in D_2}}\text{grad}\,\omega(y)\ .$$



（图一）

又令

$$A=\text{grad}\,\omega(x)_+-\text{grad}\,\omega(x)_-\ .$$

对于任一与S在 x 点相切的 n 维向量 τ，设 τ 在S上的投影为曲线L（图一）．由S的光滑性及 $\omega(x)$ 在 S上的可微性知 $\lim\limits_{\substack{x_1\to x\\ x_1\in L}}\frac{\omega(x_1)-\omega(x)}{x_1-x}$ 存在，记为 $\frac{\partial\omega(x)}{\partial L}$．又因为 $\omega(x)$ 在 D_1+S 及 D_2+S 上连续可微．故

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in D_1}}\tau\cdot\text{grad}\,\omega(y)=\lim_{\substack{y\to x\\ y\in D_1}}\frac{\partial\omega(y)}{\partial\tau}=\frac{\partial\omega(x)}{\partial L},$$

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in D_2}}\tau\cdot\text{grad}\,\omega(y)=\lim_{\substack{y\to x\\ y\in D_2}}\frac{\partial\omega(y)}{\partial\tau}=\frac{\partial\omega(x)}{\partial L}.$$

因此 $\tau\cdot\text{grad}\,\omega(x)_+=\tau\cdot\text{grad}\,\omega(x)_-$， 也即

$$A\cdot\tau=0\ . \qquad (6)$$

（6）式表明向量A垂直于曲面S或者A＝0．又（5）可改写为

$$\sup_{u\in U}\text{grad}\,\omega(x)\cdot f(x,u)=1\ . \qquad (7)$$

设最佳轨线 $x(t)$ 当 $t=t^*$ 时到达 x，即 $x(t^*)=x$．

又记：$u_+ = \lim\limits_{\substack{t\to t^* \\ t<t^*}} u(t)$，　　$u_- = \lim\limits_{\substack{t\to t^* \\ t>t^*}} u(t)$．

则令 t 分别从 t^* 两方趋于 t^* 时，由（7）有：

$$\mathrm{grad}\omega(x)_+ \cdot f(x, u_+) = 1, \tag{8a}$$

$$\mathrm{grad}\omega(x)_+ \cdot f(x, u_-) \leq 1; \tag{8b}$$

以及

$$\mathrm{grad}\omega(x)_- \cdot f(x, u_-) = 1, \tag{8c}$$

$$\mathrm{grad}\omega(x)_- \cdot f(x, u_+) \leq 1. \tag{8d}$$

由（8a）减去（8d）有

$$(\mathrm{grad}\omega(x)_+ - \mathrm{grad}\omega(x)_-) \cdot f(x, u_+) = A \cdot f(x, u_+) \geq 0, \tag{9}$$

由（8b）减去（8c）有

$$(\mathrm{grad}\omega(x)_+ - \mathrm{grad}\omega(x)_-) \cdot f(x, u_-) = A \cdot f(x, u_-) \leq 0. \tag{10}$$

由（2）知 $f(x, u_+)$ 及 $f(x, u_-)$ 分别是通过点 x 的最佳轨线 $x(t)$ 的两方的切线．因 $x(t)$ 不与S相切，故 $f(x, u_+)$ 及 $f(x, u_-)$ 都是指向 D_2 且不与S相切的．又由（6）式知，如果 $A \neq 0$，则 A 必垂直于S．又由（9）说明向量 A 与向量 $f(x, u_+)$ 指向S的同一侧，因已知 $f(x, u_+)$ 指向 D_2 一侧，故 A 也指向 D_2 的一侧．同理，由（10）说明向量 A 指向 D_1 的一侧．矛盾．故只能有 $A = 0$．即：

$$\mathrm{grad}\omega(x)_+ = \mathrm{grad}\omega(x)_- \tag{11}$$

设 n 为任一向量，由（11）均有

$$n \cdot \mathrm{grad}\omega(x)_+ = n \cdot \mathrm{grad}\omega(x)_-.$$

所以

$$\lim_{\substack{y\to x \\ y\in D_1}} n \cdot \mathrm{grad}\omega(y) = \lim_{\substack{y\to x \\ y\in D_2}} n \cdot \mathrm{grad}\omega(y),$$

即

$$\lim_{\substack{y\to x \\ y\in D_1}} \frac{\partial\omega(y)}{\partial n} = \lim_{\substack{y\to x \\ y\in D_2}} \frac{\partial\omega(y)}{\partial n}.$$

上式说明 $\omega(x)$ 在曲面S上两侧的单侧偏导数相等．即在S上 $\omega(x)$ 有连续的偏导数．定理得证．

由于（5）在 D_1 和 D_2 上都成立，$\dfrac{\partial\omega(x)}{\partial x^a}$，$a = 1, 2, \cdots, n$，在S上连续．故在（5）中令 x 从 D_1，D_2 内部趋于交界面S时，（5）仍成立．于是我们得到推论如下：

推论 1．在满足定理1的条件下，贝尔曼方程（5）在综合函数 $u(x)$ 的转换曲面S上仍然成立．

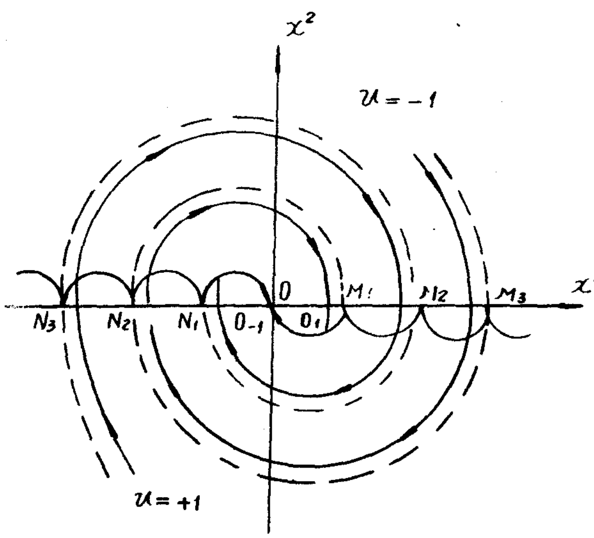
推论1扩大了贝尔曼方程的成立范围．鉴于贝尔曼方程在最佳控制问题中的重要性．推论1在理论上和实用上是有意义的．

众所周知，在 $\omega(x)$ 二阶连续可微的假定下，可以从贝尔曼方程（5）推出庞特里雅金极大值原则[2]．但由于综合函数 $u(x)$ 在转换曲面上是间断的．因此 $\omega(x)$ 一般不是二阶连续可微的．故这样推导在数学上是不合法的．但是，假定 $\omega(x)$ 分块二阶连续可微，在最佳轨线穿过交界面时不与交界面相切，且交界面是光滑的．则利用定理1可以从贝尔曼方程推出出极大值原则．上述关于 $\omega(x)$ 的假定至少在许多控制系统中是满足的．

三、例　　子

下面我们应用定理1讨论〔1〕中§5的例子，说明其中$\omega(x)$在转换曲面上$\frac{\partial \omega(x)}{\partial x^i}$存在且连续．我们只讨论例2，其余例子可类似地进行讨论。该例子如下：

例　$\frac{dx^1}{dt}=x^2$，　$\frac{dx^2}{dt}=-x^1+u$，　$|u|\leq 1$．



（图二）

最佳轨线如图二，在$u(x)$的转换曲面（这里是曲线）$\cdots N_3\ N_2\ N_1\ OM_1\ M_2\ M_3\ \cdots$上，$\overset{\frown}{M_1M_2}$，$\overset{\frown}{M_2M_3}$，…，$\overset{\frown}{N_1N_2}$，$\overset{\frown}{N_2N_3}$，…上均有最佳轨线通过且不与转换曲面相切，这些园弧是光滑的．又根据一阶偏微分方程解的连续性知在这些园弧两侧$\omega(x)$连续可微．故由定理1知$\omega(x)$在其上连续可微．而在$\overset{\frown}{ON_1}$及$\overset{\frown}{OM_1}$上设有最佳轨线通过，又在点N_2，N_3，…，M_2，M_3，…上虽有最佳轨线通过，但转换曲面在此处不光滑．故不能用定理1断定$\omega(x)$在其上连续可微．实际计算表明：$\omega(x)$在园弧$\overset{\frown}{ON_1}$及$\overset{\frown}{OM_1}$上不是连续可微的．另外，由一阶偏微分方程解的间断性按特征线传播的性质知：在过N_2，N_3，…及M_1，M_2，…的最佳轨线上，即图二中的虚线上$\omega(x)$不是连续可微的．事实上，贝尔曼方程在图二中虚线所分割成的个个螺旋状的区域上分别成立．由此可见，函数$\omega(x)$在$u(x)$的间断面上并不都是不连续可微的．相反地，在$u(x)$连续的某些地方（如本例中虚线表示的最佳轨线上）$\omega(x)$却可能是不连续可微的．即〔1〕§9末的结论不正确．

由此产生了这样一个问题：如何判别最佳轨线是否穿越转换曲面和是否与转换曲面相切．对于如下的控制系统

$$\frac{dx}{dt}=f(x)+Bu$$

的快速作用问题．作者和吕洪范同志得到了极值轨线穿越转换曲面及与转换曲面不相切的条件．结果另文叙述．

参 考 文 献

〔1〕A．C．庞特里雅金，最佳过程的数学理论，上海科技出版社，1965年．

〔2〕R．E．Bellman, Applied Dynamic Programming, New Jersey, 1962．