指数分布位置参数和分位点的估计*

王 静 龙
(华东师范大学数学系)

§1 引 言

设随机变量X服从指数分布$E(\mu,\sigma)$，具有密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\sigma^{-1}\cdot\exp\left(-\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right), & x\geq\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

此处$-\infty<\mu<+\infty$，$0<\sigma<+\infty$，μ和σ均未知．设x_1，…，x_n是一组来自上述母体的容量为$n(\geq 2)$的独立样本．众所周知$(x_{(1)},\ \bar{x}-x_{(1)})\triangleq(M,\ G)$是$(\mu,\sigma)$的充分统计量，其中$M=\min(x_1,\cdots,x_n)$服从指数分布$E(\mu,\sigma/n)$，$G=\sum_{i=1}^{n}x_i/n-M$服从$\Gamma(n/\sigma,\ n-1)$分布，$M$和$G$相互独立．

设$\mathscr{A}$是一个仿射变换群：$x\to a\cdot x+b$．其中a，b是实数，且$a>0$．对于平方损失函数$L(\hat{\theta},\theta)=\sigma^{-2}\cdot(\hat{\theta}-\theta)^2$，其中$\hat{\theta}$是被估计的参数$\theta$的一个估计，尺度参数$\sigma$、位置参数$\mu$和分位点$\lambda=\mu+\eta\cdot\sigma$（$\eta>0$是常数）的最佳仿射同变估计分别为$\hat{\sigma}_1=G$，$\hat{\mu}_1=M-G/n$和$\hat{\lambda}_1=M-G/n+\eta\cdot G$．最佳仿射同变估计是否容许，这是一个很有兴趣的问题．1973年Zidek〔1〕，1974年Brewster〔2〕讨论了$\hat{\sigma}_1$的改进．1983年叶慈南〔3〕在定数截尾的情况下，进一步证明了尺度参数σ的最佳仿射同变估计是不容许的．之后叶慈南〔4〕又证明了，在$\eta>n+2+1/n$时，$\hat{\lambda}_1$是非容许的．

本文讨论了位置参数μ的最佳仿射同变估计$\hat{\mu}_1$的改进．并证明了在$\eta>1+1/n$或$\eta<1/n$时，分位点λ的最佳仿射同变估计$\hat{\lambda}_1$是非容许的；在$\eta=1+1/n$或$\eta=1/n$时，$\hat{\lambda}_1$是容许的．至于$1/n<\eta<1+1/n$时，$\hat{\lambda}_1$的容许与否，有待进一步讨论．

§2 $\hat{\mu}_1$的 改 进

考虑$\mathscr{A}$的尺度变换子群$\mathscr{S}$：$x\to a\cdot x\ (a>0)$．在变换群$\mathscr{S}$下μ的同变估计具有形式：$G\cdot T(Y)$，其中$Y=M/G$．那么$\hat{\mu}_1=M-G/n=G\cdot(Y-1/n)$．我们将在这个尺度同变估计类中寻找$\hat{\mu}_1$的改进估计．对于尺度同变估计，其风险仅依赖于$\mu/\sigma$．在比较尺度同变估计类中两个估计的风险时，为便于计算不妨假设$\sigma=1$．此时(G,Y)的联合密度函数为

$$p(g,y)=\begin{cases}c\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}, & g\geq 0,\ gy\geq\mu,\\ 0 & 其它,\end{cases}$$

*1983年4月11日收到．

此处$C=(n/\sigma)^n\cdot\exp(n\mu/\sigma)/(n-2)!$.

在$\mu<0$时尺度同变估计的风险为

$$R(G\cdot T(Y),\ \mu)=C\cdot\{\int_0^\infty\int_0^\infty[g\cdot T(y)-\mu]^2\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}\mathrm{d}g\mathrm{d}y$$

$$+\int_{-\infty}^0\int_0^{\mu/y}[g\cdot T(y)-\mu]^2\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}\mathrm{d}g\mathrm{d}y\},$$

在$y<-1$时$\int_0^{\mu/y}(g\cdot r-\mu)^2\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}\mathrm{d}g$作为$r$的函数是一个二次函数，其$r^2$项的系数大于零，则

$$\psi(y,\mu)=\frac{\mu\cdot\int_0^{\mu/y}g^n\cdot\exp\{-ng(1+y)\}\mathrm{d}g}{\int_0^{\mu/y}g^{n+1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}\mathrm{d}g}$$

是它的最低点．由于

$$\psi(y,\mu)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}[-n(1+y)]^k/k!\cdot(\mu/y)^{n+k+1}\cdot y/(n+k+1)}{\sum_{k=0}^{\infty}[-n(1+y)]^k/k!\cdot(\mu/y)^{n+k+1}\cdot 1/(n+k+2)}>\frac{n+2}{n+1}\cdot y,$$

所以$(n+2)/(n+1)\cdot y$落在最低点的左边．而在最低点的左边，平方项系数大于零的二次函数是单调下降的，为此在$y<-1$时解不等式$y-1/n<(n+2)/(n+1)\cdot y$．当$-(n+1)/n<y<-1$时，$y-1/n$落在$(n+2)/(n+1)\cdot y$的左边，故有如下的

定理2.1 $\hat{\mu}_1=G\cdot(Y-1/n)$在平方损失下作为$\mu$的估计是不容许的，$\hat{\mu}_2=G\cdot T^*(Y)$是它的一个改进估计，其中

$$T^*(y)=\begin{cases}(n+2)/(n+1)\cdot y, & \text{在}-(n+1)/n<y<-1\text{时},\\ y-1/n, & \text{其它}.\end{cases}$$

显然，在$\mu\geq0$时$\hat{\mu}_2$与$\hat{\mu}_1$的风险是相等的，而在$\mu<0$时$\hat{\mu}_2$较μ_1处处有较小的风险．所以在平方损失下，指数分布位置参数的最佳仿射同变估计和尺度参数的最佳仿射同变估计，都是不容许的．

§3 关于$\hat{\lambda}_1$的讨论

在尺度变换群$\mathscr{S}$下，λ的同变估计仍具有形式：$G\cdot T(Y)$，并且λ的最佳仿射同变估计$\hat{\lambda}_1=G\cdot(Y-1/n+\eta)$．在$\mu\geq0$时$G\cdot T(Y)$的风险$R(G\cdot T(V),\ \mu)=c\cdot\int_0^\infty\int_{\mu/y}^\infty[g\cdot T(y)-\mu-\eta]^2\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}\mathrm{d}g\mathrm{d}y$；在$\mu<0$时$G\cdot T(Y)$的风险$R(G\cdot T(Y),\mu)=$

$$=c\cdot\{\int_0^\infty\int_0^\infty[g\cdot T(y)-\mu-\eta]^2\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}\mathrm{d}g\mathrm{d}y+$$

$$+\int_{-\infty}^0\int_0^{\mu/y}[g\cdot T(y)-\mu-\eta]^2\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}\mathrm{d}g\mathrm{d}y.$$

1．$\eta>1+1/n$时，$\hat{\lambda}_1$非容许性的证明．

在$\mu\geq0$时考虑$y>0$时r的二次函数$\int_{\mu/y}^\infty(g\cdot r-\mu-\eta)^2\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}\mathrm{d}g$，其$r^2$项的系数大于零，其最低点$\psi(y,\mu)=\sum_{k=0}^{n+1}a_k\cdot S^k)/(\sum_{k=0}^{n+1}b_k\cdot S^k)$，其中$S=n\mu(1+y)/y>0$；$b_k=(n+1)!/k!$；$a_0=\eta n(1+y)\cdot n!$；$a_k=\eta n(1+y)\cdot n!/k!+n!/(k-1)!\cdot y$，$k=1,\cdots,n$；$a_{n+1}=y$．在$\eta>1+1/n$时，$[\eta n(1+y)+ny]/(n+1)$落在最低点的右边．

在$\mu<0$时，考察$y>0$时r的二次函数$\int_{0}^{\infty}(g\cdot r-\mu-\eta)^2\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}dg$，$[\eta n(1+y)+ny]/(n+1)$仍落在它的最低点的右边．在最低点的右边，平方项系数大于零的二次函数是单调升的．在$\eta>1+1/n$时，我们可以仿§2的方法构造$\hat{\lambda}_1=G\cdot(Y-1/n+\eta)$的改进估计：$\hat{\lambda}_2=G\cdot T^*(Y)$，其中

$$T^*(y)=\begin{cases}[\eta n(1+y)+ny]/(n+1), & \text{在 } 0<y<[\eta-(1+1/n)]/(\eta n-1)\text{时},\\ y-1/n+\eta, & \text{其它}.\end{cases}$$

显然，$\hat{\lambda}_2$较$\hat{\lambda}_1$处处有较小的风险．

2．$\eta<1/n$时，$\hat{\lambda}_1$非容许性的证明．

在$\mu<0$，$y<-1$时考察r的二次函数$\int_{0}^{\mu/y}(g\cdot r-\mu-\eta)^2\cdot g^{n-1}\cdot\exp\{-ng(1+y)\}dg$，其$r^2$项系数大于零，其最低点$\psi(y,\mu)=[-\eta n(1+y)/(n+1)+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot S^{k+1}]/(\sum_{k=0}^{\infty}b_k\cdot S^{k+1})$，其中$S=-\eta n(1+y)/y$；$a_k=y/[k!(n+k+1)]-\eta n(1+y)/[(k+1)!(n+k+2)]$，$b_k=1/[k!(n+k+2)]$．令$p_k=a_k/b_k=(n+k+2)\cdot y/(n+k+1)-\eta n(1+y)/(k+1)$．由于$p_k-p_{k+1}=[(n+k+1)(n+k+2)]^{-1}\cdot\{y+[-\eta n(1+y)]\cdot(n+k+1)\cdot(n+k+2)/[(k+1)(k+2)]$，$(n+k+1)\cdot(n+k+2)/[(k+1)\cdot(k+2)]$随着$K$的增加而严格减少，所以（i）$p_0=\min\{p_k\}$，当且仅当$p_0-p_1\leq 0$，即

$$y+[-\eta n(1+y)]\cdot(n+1)(n+2)/2\leq 0; \tag{3.1}$$

$p_i=\min\{p_k\}$，$(i\geq 1)$，当且仅当$p_i-p_{i+1}\leq 0$，$p_{i-1}-p_i\geq 0$，即

$$\begin{aligned}&y+[-\eta n(1+y)]\cdot(n+i+1)(n+i+2)/[(i+1)(i+2)]\leq 0,\\&y+[-\eta n(1+y)]\cdot(n+i)(n+i+1)/[i(i+1)]\geq 0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

若$p_0=\min\{p_k\}$，则p_0落在上述二次函数最低点的左边．为了对$\hat{\lambda}_1$进行改进，仿前解由（3.1）和

$$y-1/n+\eta<p_0=(n+2)y/(n+1)-\eta n(1+y) \tag{3.3}$$

所构成的不等式组．在$y<-1$时．仅当$0<\eta<[n(n+1)]^{-1}$或$[n(n+1)]^{-1}<\eta<2\cdot[n(n+2)]^{-1}$时，不等式组才有解．

若$p_i=\min\{p_k\}$，$(i\geq 1)$，则p_i落在上述二次函数最低点的左边，为了对$\hat{\lambda}_1$进行改进，仿前解由（3.2）和

$$y-1/n+\eta<p_i=(n+i+2)\cdot y/(n+i+1)-\eta n(1+y)/(i+1) \tag{3.4}$$

所构成的不等式组．在$y<-1$时，仅当$i\cdot[n(n+i)]^{-1}<\eta<(i+1)\cdot[n(n+i+1]^{-1}$或$(i+1)[n(n+i+1)]^{-1}<(i+2)\cdot[n+i+2)]^{-1}$时，不等式组才有解．

由此我们得到了

（i）在$0<\eta<[n(n+1]^{-1}$时，$\hat{\lambda}_1=G\cdot(Y-1/n+\eta)$的改进估计$G\cdot T_0(Y)$，其中

$$T_0(y)=\begin{cases}(n+2)y/(n+1)-\eta n(1+y), & -1-1/n<y<-1,\\ y-1/n+\eta, & \text{其它},\end{cases}$$

（ii）在$i\cdot[n(n+i)]^{-1}<\eta<(i+1)\cdot[n(n+i+1)]^{-1}$时，$\hat{\lambda}_1$的改进估计$G\cdot T_i(Y)$，其中

$$T_i(y)=\begin{cases}(n+i+1)y/(n+i)-\eta n(1+y)/i, \\ \quad -1-1/[\dfrac{n(n+i)(n+i+1)}{i(i+1)}\cdot\eta-1]<y<-1-\dfrac{i}{n}, \\ (n+i+2)y/(n+i+1)-\eta n(1+y)/(i+1), \\ \quad -1-\dfrac{i+1}{n}<y<-1-1/[\dfrac{n(n+i)(n+i+1)}{i(i+1)}\cdot\eta-1], \\ y-1/n+\eta, \qquad \text{其它}.\end{cases}$$

当$\eta=[n(n+1)]^{-1}$时，$p_0=y-1/(n+1)=y-1/n+\eta$. $p_o=\min\{p_k\}$当且仅当$-1-2/n\leq y<-1$时．为使得上述二次函数的最低点$\psi(y,\mu)\geq p_0+\varepsilon(y)$，即

$$-\eta n(1+y)/(n+1)-b_o\cdot\varepsilon(y)\cdot S+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(p_k-p_0-\varepsilon(y))\cdot S^{k+1}\geq 0$$

在$-1-2/n\leq y<-1$时对任对任意正数S皆成立，其中$\varepsilon(y)>0$待定，不难验证$p_1-p_0-\varepsilon(y)>0$，$-\eta n(1+y)/(n+1)-b_0\cdot\varepsilon(y)\geq 0$，$-b_0\cdot\varepsilon(y)+b_1\cdot(p_1-p_0-\varepsilon(y))\geq 0$都成立是它的充分条件．所以在$\eta=[n\cdot(n+1)]^{-1}$时，$\hat{\lambda}_1^*=G\cdot(Y-1/(n+1))$是不容许的，$G\cdot T_0^*(y)$是它的改进估计，其中

$$T_0^*(y)=\begin{cases}y-\dfrac{1}{n+1}+\min\left\{-\dfrac{(n+2)(1+y)}{(n+1)^2},\ \dfrac{ny+n+2}{2(n+1)(2n+5)}\right\}, \\ \quad -1-2/n<y<-1, \\ y-\dfrac{1}{n+1}, \qquad \text{其它}.\end{cases}$$

当$\eta=(i+1)\cdot[n(n+i+1)]^{-1}$时，$p_i=y-1/(n+i+1)=y-1/n+\eta$. $p_i=\min\{p_k\}$当且仅当$-1-(i+2)/n\leq y\leq -1-i/n$. 为使得上述二次函数的最低点$\psi(y,\mu)\geq p_i+\varepsilon(y)$，即

$$-\eta n(1+y)/(n+1)+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(p_k-p_i-\varepsilon(y))\cdot S^{k+1}\geq 0$$

在$-1-(i+2)/n\leq y\leq -1-i/n$时对任意正数$S$皆成立，其中$\varepsilon(y)>0$待定，不难验证$p_{i-1}-p_i-\varepsilon(y)>0$，$p_{i+1}-p_i-\varepsilon(y)>0$，$b_{i-1}(p_{i-1}-p_i-\varepsilon(y))-b_i\cdot\varepsilon(y)\geq 0$，$-b_i\cdot\varepsilon(y)+b_{i+1}\cdot(p_{i+1}-p_i-\varepsilon(y))\geq 0$都成立是它的充分条件．所以在$\eta=(i+1)\cdot[n(n+i+1)]^{-1}$时，$\hat{\lambda}_1=G\cdot(Y-1/(n+i+1))$是不容许的，$G\cdot T_i^*(y)$是它的改进估计，其中

$$T_i^*(y)=\begin{cases}y-1/(n+i+1)+\min\{\varepsilon_1(y),\varepsilon_2(y)\}, & -1-(i+2)/n<y<-1-i/n, \\ y-1/(n+i+1), & \text{其它},\end{cases}$$

其中$\varepsilon_1(y)=-(n+i+2)(ny+n+i)/[(n+i)(n+i+1)(n+3i+1+ni+i^2)]$，$\varepsilon_2(y)=(ny+n+i+2)/[(i+2)(n+i+1)(2n+5i+5+ni+i^2)]$.

综上所述，在$\eta<1/\eta$时，$\hat{\lambda}_1=G\cdot(Y-1/n)$是不容许的，所构造的改进估计较$\hat{\lambda}_1$在$\mu<0$时处处有较小的风险，而在$\mu\geq 0$时风险处处相等．

3．$\eta=1+1/n$或$\eta=1/n$时，$\hat{\lambda}_1$容许性的证明．

(i) 在$\eta=1+1/n$时，$\hat{\lambda}_1=G\cdot(Y-1/n+\eta)=\bar{X}$. 据推广了的Karlin定理[5]，在$x_1$，…，$x_n$是一组来自母体为$E(\mu_0,\sigma)$的独立样本时，$\bar{X}-\mu_0$作为$(n+1)\sigma/n$的估计在平方

损失下是容许的，且由$E_\sigma(\delta-\mu_0-(n+1)\sigma/n)^2\leq E_\sigma(\bar{X}-\mu_0-(n+1)\sigma/n)^2$必推得$\delta=\bar{X}$，a·e〔$E(\mu_0,\sigma)$〕．由$\mu_0$的任意性，推得$\delta=\bar{X}$、a·e〔$L$〕．从而证明了$\bar{X}$作为$\mu+\eta\sigma=\mu+(1+1/n)\sigma$的估计，在平方损失下是容许的．

(ii) 在$\eta=1/n$时，$\hat{\lambda}_1=G\cdot(Y-1/n+\eta)=X_{(1)}$．据Stein定理〔6〕，在$x_1,\cdots,x_n$是一组来自母体为$E(\mu,1)$的独立样本时，$X_{(1)}$作为$\mu+1/n$的估计在平方损失下是容许的，且由$E_\mu(\delta-\mu-1/n)^2\leq E_\mu(x_{(1)}-\mu-1/n)^2$必推得$\delta=x_{(1)}$，a·e〔L〕．从而证明了$x_{(1)}$作为$\mu+\eta\sigma=\mu+\sigma/n$的估计在平方损失下是容许的．

参 考 文 献

〔1〕Zidek, J.V., Ann.Statist, 1(1973), 264—278.
〔2〕Brewster, J.F., Ann.Statist, 2(1974), 553—557.
〔3〕叶慈南，华东师范大学学报（自然科学版），1981, 3, 7—13.
〔4〕叶慈南，华东师范大学学报（自然科学版），1984, 1, 20—25.
〔5〕成平，数学学报，5(1964), 277—299.
〔6〕Stein, C., Ann.Math.Statist, 30(1959), 970—979.