概率2—距离空间*

曾文智

（贵州大学）

§1 引言

近年来，2－距离空间的理论与不动点理论在国内外都有所发展，本文为了推广它的应用，提出了概率2－距离空间的概念，并对该空间的拓扑结构、收敛性等进行了讨论。最后给出了两个不动点定理。

§2 定义与主要结果

以后，我们记$R=(-\infty,\infty)$，$R^+=[0,\infty)$，$Z=\{1,2,\cdots\}$。

定义2.1[1][1] (X,ρ)为一2－距离空间⇔(i) X：抽象集，(ii) 映射ρ：$X\times X\times X\to R^+$满足下列条件：

(1) $\forall a,b\in X$，$a\neq b$，$\exists c\in X$使$\rho(a,b,c)\neq 0$，

(2) $\rho(a,b,c)=0$，当a,b,c中至少有二元相等，

(3) $\rho(a,b,c)=\rho(a,c,b)=\rho(b,c,a)$，

(4) $\rho(a,b,c)\leq\rho(a,b,d)+\rho(a,d,c)+\rho(d,b,c)$，$\forall d\in X$。

(4) 称为三角形面积不等式。

例2.2 设$X=R^2$表示平面，以$\rho(a,b,c)$记作Δabc的面积，$\forall a,b,c\in X$，定义$X\times X\times X\to R^+$，则(X,ρ)为一2－距离空间，即平面上任意三角形的面积就是该空间的2－距离。

定义2.3 映射F：$R\to R^+$称为分布函数，如果它是不减、左连续、$\inf F(t)=0$，$\sup F(t)=1$。

记一切分布函数之集为$\mathscr{D}$，以H记

$$H(t)=\begin{cases}0, & t\leq 0\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

定义2.4 $(X,\mathscr{F})$为一概率2－距离空间（简记为2－PM空间）⇔(i) X：抽象集，(ii) 映射$\mathscr{F}$：$X\times X\times X\to\mathscr{D}$（简记$\mathscr{F}(a,b,c)=F_{abc}$，$F_{abc}(t)$表$F_{abc}$在实数$t$之值）满足下列条件：

(1) $F_{abc}(0)=0$，

(2) $\forall a,b\in X$，$a\neq b$，$\exists c\in X$，$t_0>0$使$F_{abc}(t_0)<1$，

(3) $F_{abc}(t)=1$，$\forall t>0$，当a,b,c中至少有二元相等，

*1983年12月30日收到。

（4） $F_{abc}=F_{acb}=F_{bca}$，

（5） $F_{abd}(t_1)=1$，$F_{adc}(t_2)=1$，$F_{dbc}(t_3)=1\Rightarrow F_{abc}(t_1+t_2+t_3)=1$.

注2.5 $F_{abc}(t)$ 之意义：$F_{abc}(t)$ 被解释为三角形abc的面积小于 t 的概率，从而（5）称为概率三角形面积不等式.

推论2.6 (X,ρ)：2－距离空间$\Rightarrow(X,,\rho)$：2－PM空间.

证 令$F_{xyz}(t)=H(t-\rho(x,y,z))$，极易证得.

今后记$\mathscr{S}_x(X)=\{A;x\in A\subset X,\ A^{=}<\aleph_0\}$，其中$A^{=}$表集A之势，$\aleph_0$表可列集之势.

定义2.7 设$(X,\mathscr{F})$为2－PM空间，$p\in X$，$\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$A\in\mathscr{S}_p(X)$，则称$N_p(\varepsilon,\lambda,A)=\{q;F_{apq}(\varepsilon)>1-\lambda,a\in A\}$为点p的$\varepsilon,\lambda$,A邻域，记为$N_p(\varepsilon,\lambda,A)\in n(p)$（$n(p)$表点p的一切$\varepsilon,\lambda$,A邻域之集）.

引理2.8 $\varepsilon_1\leq\varepsilon_2,\lambda_1\leq\lambda_2,A_1\supset A_2,A_1,A_2\in\mathscr{S}_p(X)\Rightarrow N_p(\varepsilon_1,\lambda_1,A_1)\subset N_p(\varepsilon_2,\lambda_2,A_2)$

证 显然有（1）$\varepsilon_1\leq\varepsilon_2,\lambda_1\leq\lambda_2\Rightarrow N_p(\varepsilon_1,\lambda_1,A_1)\subset N_p(\varepsilon_2,\lambda_2,A_2)$，（2）$A_2\subset A_1\Rightarrow N_p(\varepsilon_2,\lambda_2,A_1)\subset N_p(\varepsilon_2,\lambda_2,A_2)$，于是引理得证.

定义2.9 Δ是一个三角范数$\Leftrightarrow$三元函数，Δ:〔01〕$^3\to$〔0，1〕满足下列条件：

（1） $\Delta(a,1,1)=a,\Delta(0,0,0)=0$，

（2） $\Delta(a_1,b_1,c_1)\leq\Delta(a_2,b_2,c_2)$ 当$a_1\leq a_2,b_1\leq b_2,c_1\leq c_2$，

（3） $\Delta(a,b,c)=\Delta(a,c,b)=\Delta(b,c,a)$，

（4） $\Delta(\Delta(a,b,c),d,e)=\Delta(a,\Delta(b,c,d),e)=\Delta(a,b,\Delta(c,d,e))$.

定义2.10 $(X,\mathscr{F},\Delta)$为一2－Menger空间$\Leftrightarrow$(i)$(X,\mathscr{F})$为一2－PM空间，(ii)Δ为一三角范数，(iii)成立下之广义三角不等式

（5）$_m$ $F_{abc}(t_1+t_2+t_3)\geq\Delta(F_{abd}(t_1),F_{adc}(t_2),F_{dbc}(t_3))$.

定理2.11 设$(X,\mathscr{F},\Delta)$为一具连续三角范数Δ的2－Menger空间，则$(X,\mathscr{F},\Delta)$为－Hansdorff拓扑空间，其拓扑$\mathscr{T}$由ε,λ,A邻域系$\{N_p\}=n(p)$导出.

证 我们只需证明

（A） $\forall p\in X$，$\exists N_p\in n(p)$；$\forall N_p\in n(p)\Rightarrow p\in N_p$，

（B） $N_p^1,N_p^2\in n(p)\Rightarrow\exists N_p^3\in n(p)$ 使$N_p^3\subset N_p^1\cap N_p^2$，

（C） $N_p\in n(p)$，$q\in N_p\Rightarrow\exists N_q\in n(q)$ 使$N_q\subset N_p$，

（D） $\forall p,q\in X$，$p\neq q\Rightarrow\exists N_p\in n(p)$，$N_q\in n(q)$ 使

$$N_p\cap N_q=\phi.$$

（A）（B）之证，仿〔2〕定理7.2即得.

（C）之证：设$N_p\in n(p)$，$N_p=\{q;F_{apq}(\varepsilon_1)>1-\lambda_1,a\in A\}$，$q\in N_p$.

因为$q\in N_p$，则$F_{apq}(\varepsilon_1)>1-\lambda_1$，$\forall a\in A$，由$F_{apq}$在$\varepsilon_1$的左连续性，对$\forall a\in A$，存在$\varepsilon_0^a<\varepsilon_1,\lambda_0^a<\lambda_1$，使

$$F_{apq}(\varepsilon_0^a)>1-\lambda_0^a>1-\lambda_1.$$

令$\varepsilon_0=\max\limits_{a\in A}\varepsilon_0^a$，$\lambda_0=\max\limits_{a\in A}\varepsilon_0^a$，则$\forall a\in A$，有

$$F_{apq}(\varepsilon_0)\geq F_{apq}(\varepsilon_0^a)>1-\lambda_0^a\geq1-\lambda_0=1-\max_{a\in A}\lambda_0^a>1-\lambda_1.$$

作$N_q=\{r;F_{aqr}(\varepsilon_2)>1-\lambda_2,a\in A\}$，此处$0<2\varepsilon_2<\varepsilon_1-\varepsilon_0$，$\lambda_2$可选取使$\Delta(1-\lambda_0,$

$1-\lambda_2, 1-\lambda_2)>1-\lambda_1$，这样选取是合理的，因为$\Delta$连续，$\Delta(b,1,1)=b$和$1-\lambda_0>1-\lambda_1$。

设$s\in N_q$，则$F_{aqs}(\varepsilon_2)>1-\lambda_2$，$\forall a\in A$，特别因$p\in A$，有$F_{pqs}(\varepsilon_2)>1-\lambda_2$，由$F_{pqs}$在$\varepsilon_2$的左连续性，存在$\varepsilon_3<\varepsilon_2$，$\lambda_3<\lambda_2$，使$F_{pqs}(\varepsilon_3)>1-\lambda_3>1-\lambda_2$，于是有

$$\begin{aligned}F_{aps}(\varepsilon_1)&\geq\Delta(F_{apq}(\varepsilon_0),\ F_{aqs}(\varepsilon_2),\ F_{pqs}(\varepsilon_1-\varepsilon_0-\varepsilon_2))\\&\geq\Delta(F_{apq}(\varepsilon_0),\ F_{aqs}(\varepsilon_2),\ F_{pqs}(\varepsilon_3))\\&\geq\Delta(1-\lambda_0,1-\lambda_2,1-\lambda_3)\geq\Delta(1-\lambda_0,1-\lambda_2,1-\lambda_2)>1-\lambda_1.\end{aligned}$$

故$s\in N_p$，即证明了$N_q\subset N_p$。

（D）之证：设$p\neq q$，由定义2.4（2），$\exists a_0\in X$，$t_0>0$，使$F_{a_0pq}(t_0)<1$，令$m=F_{a_0pq}(t_0)$、取定$A\subset X$使$a_0\in A\in\mathscr{S}_p(X)\cap v\mathscr{S}_q(X)$。作

$N_p=\{r: F_{apr}(t_0/3)>b,\ \forall a\in A\}$，$N_q=\{r: F_{aqr}(t_0/3)>b,\ \forall a\in A\}$，此处$b$被选取使$0<b<1$，$\Delta(b,b,b)>m$，这样的$b$存在，因为$\Delta$连续且$\Delta(1,1,1)=1$。

现在设存在$s\in N_p\cap N_q$，使有

$F_{aps}(t_0/s)>b$，$F_{aqs}(t_0/3)>b$，$\forall a\in A$，特别当$a=q$时，有$F_{pqs}(t_0/3)>b$，于是我们有

$$m=F_{a_0pq}(t_0)\geq\Delta(F_{a_0ps}(t_0/3),F_{a_0sq}(t_0/3),F_{spq}(t_0/3))\geq\Delta(b,b,b)>m.$$

此乃矛盾．故$N_p\cap N_q=\phi$．定理于是得证．

定义 2.12 设（X，$\mathscr{F}$，Δ）为一2－Menger空间，$x, x_n\in X$，则

（1）$\{x_n\}$ $\mathscr{T}$－收敛于x（简记为$\{x_n\}\xrightarrow{\mathscr{T}}x$）$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$A\in\mathscr{S}_x(X)$，$\exists M_{(\varepsilon,\lambda,A)}\in Z$使$F_{axx_n}(\varepsilon)>1-\lambda$，$\forall a\in A$，$\forall n\geq M_{(\varepsilon,\lambda,A)}$。

（2）$\{x_n\}$为$\mathscr{T}$－cauchy 列$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$A\in\mathscr{S}_x(X)$，$\exists M_{(\varepsilon,\lambda,A)}\in Z$，使

$F_{ax_mx_n}(\varepsilon)>1-\lambda$，$\forall a\in A$，$\forall m, n\geq N_{(\varepsilon,\lambda,A)}$。

（3）（X，$\mathscr{F}$，Δ）称为$\mathscr{T}$－完备的$\Leftrightarrow$X中每一Cauchy 列均收敛于X中某一点．

仿〔2〕可证下之

引理2.13 $\{x_n\}\xrightarrow{\mathscr{T}}x\Leftrightarrow\lim F_{axx_n}(t)=F_{axx}(t)=H(t)$，$a\in A$．

推论2.14 引理2.13之收敛是一致的（即$M_{(\varepsilon,\lambda,A)}$与$t\in[c,d]$无关，$c>0$）．

为了下节讨论的需要，先引进下面的

定义2.15 设（X，$\mathscr{F}$，Δ）为2－PM空间，$A\subset X$，$a\in X$，则

（i）$D_A^a(t)=\sup\limits_{s<t}\inf\limits_{p,q\in A}F_{apq}(s)$ 称为A关于a的2－概率直径．

（ii）A称为关于a是2－概率有界的$\Leftrightarrow\sup\limits_{t>0}D_A^a(t)=\sup\limits_{t>0}\sup\limits_{s<t}\inf\limits_{p,q\in A}F_{apq}(s)=1$、或$\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{p,q\in A}F_{apq}(t)=1$．

（iii）A称为关于B是2－概率有界的$\Leftrightarrow$A关于B的每一点是2－概率有界的．

注　本节的主要定理2.11是〔2〕中定理7.2在概率2－距离空间的推广．

§3　两个压缩型映射的不动点定理

本节设（X，$\mathscr{F}$，Δ）为一$\mathscr{T}$－完备2－Menger空间，Δ为连续三角范数．

定理3.1 设T为（X，$\mathscr{F}$，Δ）的自映射，设$\forall A\in\mathscr{S}_p(X)$，轨道$O_T(p,0,\infty)=$

$\{T_p^n\}_{n=0}^{\infty}$ 关于A是2－概率有界的，再设$\forall$ p $\in$ X，$\exists$ n(p) $\in$ N使$\forall$ A $\in \mathscr{S}_p$(X)，$\forall q \in$ X，$t>0$，有

$$\text{(i)}\quad F_{aT^{n(p)}pT^{n(p)}q}(t) \geq F_{apq}(\varphi(t)),\ \forall a \in A,$$

其中φ是满足条件（φ_1）的函数：

（φ_1）$\varphi(t)$：$R^+ \to R^+$，$\varphi(0)=0$，对t严格增加，且有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t)=\infty,\quad \forall t>0,$$

其中$\varphi^n(t)$表$\varphi(t)$的第n次迭代函数，则T在X中存在唯一的不动点p_*，而且对$\forall p_0 \in$ X，迭代序列$\{T_{p_0}^n\}$ $\mathscr{T}$－收敛于p_*．

证　注意到概率有界与2－概率有界之间的异同，参照〔3〕中的证法，本定理极易证明，故从略．

定理3.2　设T为（X，$\mathscr{F}$，Δ）的自映射，三角范数Δ连续且有$\Delta(t,t,t)>t$，$\forall t \in$〔0，1〕，再设对$\forall$ p $\in$ X，$\exists$ n(p) $\in$ Z使$\forall$ q $\in$ X，$t \geq 0$，$\forall$ A $\in \mathscr{S}_p$(X)，有

$$\text{(i)}\quad F_{aT^{n(p)}pT^{n(p)}q}(t) \geq F_{apq}(\varphi(t)),\quad \forall a \in A,$$

其中φ满足（φ_1）和（φ_2）：

$$(\varphi_2)\quad \lim_{t\to\infty}(\varphi(t)-2t)=\infty,$$

则定理3.1的结论仍成立．

证　视定理3.1，只需证明$\forall p_0 \in$ X，A $\in \mathscr{S}p_0$(X)，$O_T(p_0,0,\infty)$对A为2－概率有界即可．

一、先证$\forall p_0 \in$ X，$\forall$ A $\in \mathscr{S}p_0$(X)，$\sup\limits_{s>0}\inf\limits_{q\in O_T}\inf\limits_{(p_0,0,\infty)} F_{ap_0q}(s)=1$，$\forall a \in A$．

事实上$\forall p_0 \in$ X，$\lambda \in (0,1)$，由分布函数的性质，$\exists t_\lambda>0$，使对$\forall$ A $\in \mathscr{S}p_0$(X)，有

$$\text{(A)}\quad \min_{0\leq i\leq n_0} F_{ap_0T^i_{p_0}}(\varphi(t))>1-\lambda,\ \forall a \in A,\ n_0=n(p_0),\quad \forall t \geq t_\lambda.$$

对$\forall n>n_0$，$n=mn_0+s$，$m \in Z$，$0 \leq s<n_0$，由条件（i），有

$$\begin{aligned}
\text{(B)}\quad F_{ap_0T^np_0}(\varphi(t)) &= F_{ap_0T^{mn_0+s}p_0}(\varphi(t))\\
&\geq \Delta(F_{ap_0T^{n_0}p_0}(\varphi(t)-2t),\ F_{aT^{n_0}p_0T^{mn_0+s}p_0}(t),\ F_{T^{n_0}p_0p_0T^{mn_0+s}p_0}(\varphi(t)))\\
&\geq \Delta(F_{ap_0T^{n_0}p_0}(\varphi(t)-2t),\ F_{ap_0T^{(m-1)n_0+s}p_0}(\varphi(t)),\ F_{p_0p_0T^{(m-1)n_0+s}p_0}(\varphi(t)))\\
&= \Delta(F_{ap_0T^{n_0}p_0}(\varphi(t)-2t),\ F_{ap_0T^{(m-1)n_0+s}p_0}(\varphi(t)),\ 1)\\
&\geq \min(F_{ap_0T^{n_0}p_0}(\varphi(t)-2t),\ F_{ap_0T^{(m-1)n_0+s}p_0}(\varphi(t)),\ 1)\\
&\geq \cdots \geq \min(F_{ap_0T^{n_0}p_0}(\varphi(t)-2t),\ F_{ap_0T^sp_0}(\varphi(t))),\ \forall a \in A.
\end{aligned}$$

由（φ_2）$\lim\limits_{t\to\infty}(\varphi(t)-2t)=\infty$，对$\varphi(t_\lambda)$，$\exists t_1>0$，当$t \geq t_1$时，有$\varphi(t)-2t \geq \varphi(t_\lambda)$，于是当$t \geq t_*=\max\{t_1,t_\lambda\}$时由（B）知，$\forall n>n_0$，有

$$\text{(C)}\quad F_{ap_0T^n_p}(\varphi(t)) \geq 1-\lambda,\ \forall a \in A.$$

综合（A）式和（C）式，即知当$t \geq t_*$时，$\forall n=0,1,2,\cdots$，有

$$F_{ap_0T^np_0}(\varphi(t)) \geq 1-\lambda,\quad \forall a \in\ .$$

故
$$\inf_{q\in O_T(p_0,0,\infty)} F_{ap_0q}(\varphi(t)) \geq 1-\lambda,\quad \forall t \geq t_*,\quad \forall a \in A.$$

因而得知
$$\sup_{s>0,\ q\in O_T(p_0,0,\infty)}\inf F_{ap_0q}(s) \geq 1-\lambda,\quad \forall a \in A,$$由于上式右端λ的任意性，

即得 $\sup_{s>0}\inf_{q\in O_T(p_0,0,\infty)} F_{ap_0q}(s)=1$, $\forall a\in A$.

二次证 $\sup_{s>0}\inf_{p,q\in O_T(p_0,0,\infty)} F_{p_0pq}(s)=1$：事实上，由分布函数的性质，$\forall p_0\in X$，$\lambda\in(0,1)$ $\exists t_\lambda>0$，有 $\min_{0\le i, j\le n_0} F_{p_0T^ip_0T^jp_0}(\varphi(t))\ge 1-\lambda$，$\forall t\ge t_\lambda$，$n_0=n(p_0)$.

然后仿照一的证法而得到证明.

三最后证明 $\forall A\in\mathscr{S}p_0(X)$，$O_T(p_0,0,\infty)$ 对A为2－概率有界：事实上，$\forall x,y\in O_T(p_0,0,\infty)$，$\forall A\in\mathscr{S}p_0(X)$，有

$$F_{axy}(t)\ge\Delta(F_{axp_0}(t/3),F_{ap_0y}(t/3),F_{p_0xy}(t/3))\ge\Delta(F_{axp_0}(t/3),F_{ap_0y}(t/3),\inf_{x,y\in O_T(p_0,0,\infty)}F_{p_0xy}(t/3))\ge\min(\inf_{x\in O_T(p_0,0,\infty)}F_{ap_0x}(t/3),\inf_{x,y\in O_T(p_0,0,\infty)}F_{p_0xy}(t/3))$$

于是 $\inf_{x,y\in O_T(p_0,0,\infty)}F_{axy}(t)\ge\min\inf_{x\in O_T(p_0,0,\infty)}F_{ap_0x}(t/3)$，$\inf_{x,y\in O_T(p_0,0,\infty)}F_{p_0,x}\quad(t/3)$.

从而 $\sup_{t>0}\inf_{x,y\in O_T(p_0,0,\infty)}F_{axy}(t)\ge\min(\sup_{t>0,x\in O_T(p_0,0,\infty)}\inf F_{ap_0x}(t/3)$，

$\sup_{t>0,x,y\in O_T(p_0,0,\infty)}\inf F_{p_0xy}(t/3))=1$.

这就证明了 $O_T(p_0,0,\infty)$ 对 $\forall A\in\mathscr{S}p_0(X)$ 是2－概率有界的.

注 上面两个定理分别是〔3〕中定理1与定理2在概率2－距离空间的推广.

参 考 文 献

〔1〕B.E.Rhoades, Contraction type mappings on 2－metric space, Math.Nachr.95(1979), 151－155.

〔2〕B.Schweizer and Sklar, Statislical metric space, Pacific J.Math., 10(1960), 313－334.

〔3〕张石生、康世焜，关于Sehgal－Bharnca－Reid－Istlralescu不定点定理的推广，成都科技大学学报，1(1983), 103－109.