1987年5月

数学研究与评论
第七卷　第二期

不分明拓扑学的若干研究方向*

王　国　俊

（陕西师范大学）

自1968年C．L．Chang 提出不分明拓扑空间的概念以来，不分明拓扑学得到了迅速的发展．从近年来发表的有关论文来看，不仅所涉及问题的面在不断扩大，而且对问题的分析讨论也在逐步深化．各个不同方向的研究都得出了一些比较深刻的结果，可以说是各有千秋．本文试图从这些纷繁的研究课题中整理出几个研究方向来，并对各方面的研究工作作一概略的分析．

笔者认为近年来对不分明拓扑学的研究似可划分为三类，即，推广型研究、分析型研究与代数型研究．现分述于下：

推广型研究

我们先对一些最基本的概念作一简短回顾．设X是非空分明集，I是单位区间，则称映射A：$X\to I$为以X为论域的一个不分明集[60]，或者按照〔63〕，以字母F表示“不分明”几个字，简称A为X上的F－集．X上的F－集的全体记作I^X．设$\delta\subset I^X$．如果$0,1\in\delta$且δ对任意并（sup）与有限交（inf）运算关闭，则称δ为X上的F－拓扑，称(X,δ)为F－拓扑空间[2]．设$A\in\delta$，则称A为开集，若$B'=1-B\in\delta$，则称B为闭集．对任一F－集A，以A^-记一切包含A（即$\geq A$）的闭集的交，称为A的闭包．以A°记一切包含于A（即$\leq A$）的开集的并，称为A的内部．容易证明

$$A^-=A'^{\circ\prime},\quad A^\circ=A'^{-\prime},\quad A^{\circ\prime}=A'^{-}.\tag{1}$$

又，在I^X中De Morgan对偶律成立，即

$$(\bigvee_i A_i)'=\bigwedge_i A_i',\qquad(\bigwedge_i A_i)'=\bigvee_i A_i'.\tag{2}$$

设f：$X\to Y$是通常的映射，$\forall A\in I^X$，规定$f(A)\in I^Y$为

$$f(A)(y)=\begin{cases}\sup\{A(x)\mid f(x)=y\}, & f^{-1}(y)\neq\phi,\\ 0, & f^{-1}(y)=\phi,\end{cases}$$

则得一映射（仍记为f）f：$I^X\to I^Y$，称为由f诱导出的F－映射，也叫Zadeh型函数．f的逆f^{-1}：$I^Y\to I^X$定义为

$$f^{-1}(B)(x)=(B\circ f)(x),\quad B\in I^Y.$$

为简便计，Zadeh型函数在记法上与它的诱导函数不加区别，都记作f：$X\to Y$．容易验证f保并，f^{-1}保并、保交、保对合，即

$$\begin{aligned}&f(\bigvee_i A_i)=\bigvee_i f(A_i),\qquad f^{-1}(\bigvee_i B_i)=\bigvee_i f^{-1}(B_i),\\&f^{-1}(\bigwedge_i A_i)=\bigwedge_i f^{-1}(A_i),\qquad f^{-1}(B')=(f^{-1}(B))'.\end{aligned}\tag{3}$$

* 1985年10月1日收到．

并且下列公式成立：

$$f^{-1}f(A)\geq A,\quad ff^{-1}(B)\leq B,\quad f(A)\leq B\text{当且仅当}A\leq f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(B)=\vee\{A\in I^X\mid f(A)\leq B\},\quad f(A)=\wedge\{B\in I^Y\mid A\leq f^{-1}(B)\}. \tag{4}$$

我们注意，以上关于F一拓扑的定义以及公式（1）一（4）正是分明拓扑学中熟知的事实．由此可见，F一拓扑学所面临的基本框架与分明拓扑学有很大的相似．正因如此，分明拓扑学中的几乎全部结果都可以推广到F一拓扑学中来．这里我们说“推广”,是因为只要把一个分明集与它的特征函数等同看待，则分明拓扑空间就是一种特殊的F一拓扑空间．

容易想见，分明拓扑学中那些仅仅基于公式（1）一（4）的概念与命题可以全部推广到F一拓扑学中来．如F一连续映射及其特征刻划定理〔2〕，Kuratowski十四集定理〔42〕,复盖性质及其在连续映射下的不变性〔[illegible]〕等等．这类工作虽然难度不大，但作为建立完整的F一拓扑学理论的总进程来看，是必不可少的组成部分．正象把度量空间中有关开集、闭集、连续映射等基本理论推广到拓扑空间中的相应理论时那样，人们并不因为其简单而对它的重要性有任何的低估．关于这方面的工作，当前的情况是：分明拓扑学中最基本的概念都已推广到了F一拓扑学中（当然，这些推广并不都是成功的），而对那些较专门的理论的推广工作则刚刚开始．比如，象在分明拓扑学中那样，〔1〕称满足条件$A=A^{-\circ}$的F一集为正则开集．设$f: X\to Y$是F一映射，若Y中正则开集在f下的原象是X中的开集，则称f几乎连续．〔1〕中还引入并讨论了半连续映射与弱连续映射等．与此相联系，〔3〕引入了所谓几乎紧性．F一拓扑空间(X,δ)叫几乎紧的，若X的每个开复盖都有一有限子族，其中各开集的闭包复盖X（在分明拓扑学中，若X是T_2空间，则此定义刻划的是T_2一绝对闭性）．象〔1〕与〔3〕这类文章目前还不多，仅仅是将分明拓扑学中较专门理论中极少一部分作了推广．其它如Borel集、半开集、绝对闭性、S一闭性以及各种意义下的近似紧性与近似连续性等那些基本上只涉及公式（1）一（4）的理论（参看〔47〕及其参考文献）看来都是容容易向F一拓扑学中推广的．

然而，更吸引人的似乎是那些能充分体现出F一拓扑学特点的工作．由于F一拓扑空间比分明拓扑空间多了一个层次结构，所以各部分理论比分明拓扑空间中的相应理论远为复杂．这主要是由F一集与分明集的下述重大差别引起的：

（i）在分明集理论中，点是不可再分的基本单位．而在F一集理论中，F一点虽然也是基本单位（即，任何F一集都可表作若干F一点的并），但它还可再分．F一点之间可以有彼此包含的关系．

（ii）在分明集理论中，互补律成立，即$A\cup A'=X$，$A\cap A'=\phi$．但对F一集而言互补律不成立．

（iii）在分明集理论中，对于从属关系而言择一原则成立〔27〕，即，若分明点x属于一族分明集的并，则x必属于其中某一个分明集．但对F一集而言，择一原则不成立．

（iv）在分明集理论中，几个集的乘积的元素定义为各集中元素的有序组，这里没有丢掉任何信息．但在定义F一集的乘积时，只是将其论域相乘，而F一点的高度的决定则采取“就低不就高”的原则，损失了许多信息．确切地说，为使（非空）分明集的乘积相等，必须且只须各因子集相等．但对F一集而言，不同的（非空）因子集相乘有可能得出同一个乘积来．因而F一集的积集与其因子集之间的关系比较松散．

让我们看一个由情况(i)所引起的重大差别的例子．在F—拓扑学初期的推广工作中将F—紧性定义为空间的每个开复盖都有有限子复盖[2]，即，形式上照搬分明拓扑学中的相应定义．利用公式（1）与（2），很容易推出它的一个等价条件是：若一族F—闭集中任意有限个的交都非空，则其全体之交也非空．另一方面，与分明拓扑学中的情形相同．F—拓扑空间为 T_1 空面的充要条件是每个F—点为闭集[42]．由于F—点有高低不同的层次，容易作出一串F—点 $\{x_{\frac{1}{n}} | n=1,2,\cdots\}$，它们的交为空集，但其中任意有限多个的交都非空．这就引出一个病态的结论：凡T_1空间都不能是紧空间！可见〔2〕的F—紧性定义是不能为我们所接受的（当然，这并不妨碍我们把它作为一种复盖性质去进行探讨）．事实上，人们很快就意识到了合理的紧性定义必须考虑层次结构．如文〔22〕通过F—集的边界特征来刻划紧性，笔者则在〔50〕中通过所谓α—网的收敛性引入了良紧理论．此外，象α—紧性、强紧性等都是从层次结构入手来研究F—紧性的[32]进一步的研究成果如〔26〕,〔40〕,〔65〕等充分体现了F—拓扑学研究的特色．

其实，情况（i）带来的新问题远远不限于上面的例子所反映者．从根本上讲，它带来了邻域方法在F—拓扑学中的困难[49]．困难的症结在于：一个F—点的邻域必然也是所有比它小的F—点的邻域．旨在克服这一根本性困难的研究导致了邻近构造方面的革命，其结果是重域方法[42]以及随后的可应用于更广场合的远域方法[48]应运而生．它们取代了传统的的邻域方法，在F—拓扑学研究中获得了成功．

以上我们仅以情况（i）为例说明了F—拓扑学与分明拓扑学的重大差异．再考虑到情况（ii)，(iii)，(iv)的综合影响，就可想见F—拓扑学中是存在着丰富而新颖的研究课题的．已经展开的讨论固然已包含了许多令人鼓舞的成果，然而毕竟还停留在未成熟的阶段．甚至一些最基本的概念的研究，也并非都取得了一致的看法，因而是有待于我们通过进一步的探讨以求达到统一的．事实上，在F—拓扑空间的定义、收敛理论以及对F—同胚的理解诸方面就是如此．

关于F—拓扑空间的概念，目前大多数学者都采用我们在前面介绍的定义．但以R．Lowen为代表的少数人则在此定义之外再加上一条：要求每个常值F—集都是开集[30]．看来加上这一条也不无道理，因为至少对一类重要的F—拓扑空间，即〔31〕中称之为由分明拓扑空间拓扑生成的那类F—拓扑空间而言，所有常值F—集作为下半连续函数自然应是开集．通常我们称这种空间为满层空间[11]．要求F—拓扑空间是满层的有一个明显的缺点，即，它不以分明拓扑空间为特款（除非将取值域I换为一般的F—格L，则当L＝{0，1}时可得到分明拓扑空间）．再者,〔14〕定义连通F—拓扑空间为不含非0非1的既开且闭集的空间，样么凡〔30〕意义下的F—拓扑空间就都不连通了（当然，不能简单地以此来否定〔30〕的定义，因为我们可以认为〔14〕关于连通性的定义不恰当）．此外，〔11〕又将I换成完备布尔代数引入所谓$\mathscr{B}$—F拓扑空间，这可以避免上面情况（ii）造成的不便．那么究竟哪一种F—拓扑空间的定义更合适呢？这就有待于我们在进一步的研究中从它们各自的理论体系是否完整，与经典理论是否相容以及actual实用背景等各个角度去加以鉴定了．

F—拓扑空间中的收敛理论是最基本的研究课题之一．自〔72〕提出的收敛理论失败后，注意到层次结构的影响，文〔33〕、〔42〕与〔48〕中已分别建立起了比较完整的渗透式收敛理论、网式收敛理论以及分子式收敛理论．然而这些理论实际上都是针对F—点（或它的推

广概念—分子）而作的，而一般的F—集的收敛理论似乎更富有实用背景，因为这实际上牵涉到实函数的收敛问题，因而有可能被用来解决F—数的收敛问题．〔60〕中曾对这类问题作过细致的讨论，先后考察了八种收敛定义，不过尚未能与F—数相联系，当前还看不出它们的应用前景．〔35〕中对论域为一致空间的情形讨论了此类问题．在那里首先建立了X上的一种非拓扑生成的F—拓扑，然后从超空间的观点出发借助渗透的收敛理论给出了某种形式下的上述问题的一种解答．然而〔35〕中考虑的对象过于特殊，远非可以通用的收敛理论．因此，如何建立比较完整的，关于一般F—集的收敛理论就是一个值得深入进行研究的课题了．由于这一问题的特例，即，对分明情况而言，实际上是讨论集的收敛问题而不是点的收敛问题，所以看来是应当与超空间理论以及Hausdorff距离等结合起来加以考虑的．

也许更有趣的是那些与以上两个问题相比课题较小同时也更具体的问题．以F—分离公理为例．起初，人们以为只要把分明拓扑学中的分离公理照搬过来就行，但很快人们就发现由于前述情况（i）—（iv）的影响，讨论变得非常复杂．首先是与分明拓扑学中同一分离公理的各种等价形式相对应的F—分离公理变得彼此不再等价，就已经使问题复杂起来．加之层次结构的影响、邻域方法之弊端，都给研究带来了困难．尤其是在处理正规性与正则性分离公理时，需要较之分明拓扑更高的技巧．文〔12〕与〔25〕可视为在这方面取得成功之范例．其它如F—拟一致结构与度量化问题，F—函数空间，F—仿紧性，F—邻近空间以及F—连通性等方面的研究，一方面已经出现了一批重要成果（分别参看〔13〕、〔5〕、〔18〕〔4〕、〔15〕、〔10〕、〔38〕、〔19〕、〔66〕、〔24〕），另一方面它们均属开创性研究而非最终性结果，是有待于进行更深入的研究的．

最后，我们拟就一个带根本性的问题谈一点看法．众所周知，拓扑学研究的主要内容是空间的那些同胚不变性，而度量不变性则应予放弃．但在迄今为至所见到的F—拓扑空间的同胚定义里却都蕴含着度量不变性的要求．事实上，两个F—拓扑空间X与Y叫作同胚的，是指存在一一对应$f: X\to Y$，使f与f^{-1}作为Zadeh型函数都是连续的．根据Zadeh型函数的定义，我们有

$$f(x_\lambda)=(f(x))_\lambda,\qquad f^{-1}(y_\lambda)=(f^{-1}(y))_\lambda.$$

这就是说，在F—同胚变换中F—点的高度保持不变，或者换句话说，在以多一个层次结构为特色的F—拓扑空间的同胚理论中却只在水平方向上体现了同胚，而在竖直方向上则要求度量不变！这显然是不合理的．因此，取代Zadeh型函数，也许我们应当考虑F—拓扑空间之间的序同态（参见〔48〕、〔51〕、〔52〕、〔55〕）．映射$f: I^X\to I^Y$叫序同态，如果$f(0)=0$，f保并且f^{-1}保对合（由此容易推出f^{-1}保并及保交）．可以证明序同态f把X中的F—点映成Y中的F—点，即$f(x_\lambda)=y_\mu$（这里$\mu=\lambda$不必成立），而且f把承点相同的F—点映成承点相同的F—点，即，若$f(x_{\lambda_1})=y_\mu$，$f(x_{\lambda_2})=z_\nu$，则$y=z$〔53〕．可见序同态保持了Zadeh型函数的良好性质．利用序同态概念可将F—同胚概念修正如下：

定义　F—拓扑空间X与Y称作是同胚的，若存在序同态$f: I^X\to I^Y$，f是一一对应，且f与f^{-1}都连续．

这种新的同胚定义由于放弃了纵向的度量不变性，看来比如今流行的那种定义更为合理．而基于这一新的同胚定义，诸如各种可数性，各种阵通性，各种分离性以及各种紧性等一系列性质的拓扑不变性就都需要重新进行审定，而这个审定过程也正是进一步评定各有关定义

的合理性的过程．因而是值得去研究的课题．

分析型研究

近几年来．在F一拓扑学的研究中出现了一个以R．Lowen 等人为代表的新学派，发表了一系列文章，颇有影响．以Lowen自己的话来说，他们感兴趣的是那些“具体的”、“自然的”空间．比如，对于三个点的空间 $\{a, b, c\}$，若规定 $\rho(a, b) = \rho(b, c) = 1$，$\rho(a, c) = 2$，则它成为一个度量空间．又，$n$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 关于通常定义的距离 $\rho(x, y) = [\sum(x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$ 也成为度量空间．他们认为只有后者才是具体的和自然的度量空间．我们之所以把他们称为分析派，是因为他们研究的对象是与诸如实直线 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 上的概率测度，$\mathbf{R}$ 上满足Lipschitz 条件的函数等密切相关的那类课题．让我们看一个例子．在〔37〕中研究了以

$$\mu(\mathbf{R}) = \{P \mid P\text{ 是}\mathbf{R}\text{ 上的概率测度}\}$$

为论域的F一拓扑空间，这里的F一拓扑由下述类型的F一集 δ_A 生成：

$$\delta_A(P) = P(A),\quad P \in \mu(\mathbf{R}),\quad \delta_A \in I^{\mu(\mathbf{R})},$$

此处A是 $\mathbf{R}$ 上的无界开区间（请注意，这里“生成”的含意与通常不同，是再把一切常值F一集添进去后生成的满层空间）．这个F一拓扑空间记作 μ（$\mathbf{R}$），称为F一实直线．〔37〕中证明了这种空间也可用类似于Hutton 的单位区间（参看〔12〕或〔21〕）那种定义方式而得到，不过代替单调下降函数的等价类，考虑的是 $\mathbf{R}$ 上的概率分布函数，即，在0与1之间的单调上升函数．作为 μ（$\mathbf{R}$）的子空间，在〔36〕中又引入并讨论了F一整数以及F一有理数等概念．μ（$\mathbf{R}$）是一个值得注意的空间，它有很强的分析背景．比如，$\mathbf{R}$ 上的全部满足 ε—Lipschitz 条件的函数恰构成 $\mathbf{R}$ 上的一个（满层）F一拓扑。将所得的空间记为 $\mathbf{R}(\varepsilon)$．〔35〕中证明了 $\mathbf{R}(\varepsilon)$ 同胚于 μ（$\mathbf{R}$）的一个子空间．看来这类与分析中的具体对象相联系的研究是有很大发展前途的．

分析派的早期工作里注意一种由分明拓扑诱导出的F一拓扑空间，即所谓可拓扑生成的F一拓扑空间．设（X，$\mathscr{T}$）是分明拓扑空间，以 $\omega(\mathscr{T})$ 表示X上的全部下半连续函数之集，则 $\omega(\mathscr{T})$ 恰构成X上的一个F一拓扑．F一拓扑空间（X，δ）叫可拓扑生成的，是指存在X上的分明拓扑 $\mathscr{T}$ 使 $\delta = \omega(\mathscr{T})$．这类空间由于与分明拓扑空间关系密切，已被研究得相当深入（参见〔46〕）．不过因为它实际上是由分明拓扑空间所完全决定的，所以似乎不足以体现F一拓扑的真正特色．因此近年来分析派学者开始将注意力专向非拓扑生成的F一拓扑空间，简称为“非拓扑的”(nontopological) F一拓扑空间〔31〕〔35〕．〔34〕中证明了这类空间只能是紧 T_2 空间以外的空间，〔35〕中给出了这类空间的具体例子．这是又一值得注意的研究课题．

设 P 是一种拓扑性质，一个拓扑空间X要么具有性质 P，要么不具有性质 P，二者必居其一，也仅居其一．但是分析派提出了一个新观点，即，他们给性质 P 赋以标志其真实程度的实数 $\varepsilon \in [0,1]$．比如，X具有性质 $P(1)$ 表示X真正具有性质 P．X具有性质 $P(0)$ 其实表示X不具有性质 P．X具有性质 $P(\frac{1}{2})$ 则表示X在一定程度上具有性质 P．〔35〕一文正是在这种意义下研究了 $\mathbf{R}$ 上的实函数间的收敛关系的．文〔62〕是最能表现这种观点的合理性的．这里作者们针对F一分离性提出了各种分离参数与分离度的概念．以 T_0 分离公理为例．设（X，δ）为F一拓扑空间，X中任二分明点 x 与 y 之间的 T_0 分离参数被定义为

$$T_0(x, y) = \sup\{A(x) - A(y) \mid A \in \delta\} \vee \sup\{A(y) - A(x) \mid A \in \delta\}.$$

然后定义X的整体T_0分离度为

$$\theta_0=\inf\{T_0(x,y)\mid x\neq y\}.$$

对于分明的T_0空间而言，容易算出其整体T_0分离度恰等于1，而对非T_0的分明拓扑空间，$\theta_0=0$. 这种观点的合理性的进一步说明可参看〔62〕. 类似地,〔62〕中还讨论了与T_1及T_2分离性相关联的分离参数与整体分离度（以及其它一些有关的参数）. 看来沿此道路是有大量的研究工作可作的.

代数型研究

1967年,〔7〕提出了L—F集的概念，用一般的完全分配格L取代了单位区间I. 1977年,〔13〕在提出F—拟一致结构理论时引入并讨论了格L的元素的极小族概念，这些是代数派研究的先声. 1979年，笔者受文〔42〕的启发，为了把重域思想应用于更一般的框架而在一种特殊的格—分子格上建立了拓扑理论[48]，把F—拓扑学的研究纳入了拓扑格理论之中. 1981年,〔23〕对完全分配格上的保并映射的交运算作了深入的研究，得出了诸如

$$(f_1\wedge f_2)(a)=\bigwedge_{a_1\vee a_2=a}[f_1(a_1)\vee f_2(a_2)],$$

与

$$(f\wedge g)\circ(f_1\wedge g_1)\leq(f\circ f_1)\wedge(g\circ g_1)$$

等重要公式，引入并研究了一种算子Ω，为进一步研究F—拟一致结构等理论奠定了代数基础. 至此，一个与格的代数结构的研究紧密相关的新的研究学派逐渐形成.

代数派研究的主要思想在于以分明拓扑学的基本理论为背景，建立一种广泛的完全分配格上的拓扑理论. 当然，一般说来，研究的对象越抽象，研究的框架越广泛，所能得到的具体结果就越少. 然而代数派研究的目的决非重复已有的拓扑格理论[39]，那种理论由于过于广泛而显得内容贫乏. 相反的，我们要建立这样一种拓扑格理论，它既能把分明拓扑学与F—拓扑学作为特例而包含进去，又能充分体现出F—拓扑学层次结构的特点；我们的目的是既保持F—拓扑学丰富的研究内容，又要在较高观点的指导下抽象出纷繁的课题所共有的本质属性，从而加以简洁的处理. 当前，代数派工作的成果表现在对格上映射的深入研究以及格上分子式拓扑理论的建立等方面.

设L_1与L_2是完备格，$g:L_1\to L_2$是一般的映射. 〔29〕中引入了由g诱导的两种映射$\check{g}$与$\acute{g}$：$\acute{g}(b)=\vee\{a\in L_1\mid g(a)\leq b\}$, $b\in L_2$；$\hat{g}(b)=\wedge\{a\in L_1\mid g(a)\geq b\}$, $b\in L_2$. 证明了$g^*=g\vee\wedge$，$(\bigvee_i g_i)^*=\bigvee_i g_i^*$以及$(Q(L_1,L_2),\vee,\wedge^*)$构成完全分配格等许多公式与结构，这里$g^*$表示不超过$g$的最大保并映射，$Q(L_1,L_2)$表示完全分配格$L_1$到$L_2$的保并映射族，且$\bigwedge_i{}^*g_i=(\bigwedge_i g_i)^*$.〔29〕中还给出了“映射$g$保极小族当且仅当$g$保并”等有趣而重要的结论. 以Zadeh型函数为背景，〔10〕引入了所谓双诱导映射$H:L_1^X\to L_2^Y$. 设f: $X\to Y$与$g:L_1\to L_2$是映射，则定义$H(A)=g^f(A)$为

$$H(A)(y)=\sup\{g(A(x))\mid f(x)=y\},$$

（规定$\sup\phi=0$）. 它自然是L—Zadeh型函数$f:L^X\to L^Y$的推广. 另一类完备格之间的映射是所谓序同态理论（与双诱导映射概念互不蕴含. 设L_1与L_2是F—格. 映射$f:L_1\to L_2$叫序同态，是指$f(0)=0$，f保并,且f^{-1}保对合，这里

$$f^{-1}(B)=\vee\{A\in L_1\mid f(A)\leq B\},\ B\in L_2,$$

用〔29〕的记号，也即$f^{-1}=\check{f}$. 序同态概念是 Zadeh 型函数的推广，在一定意义下它甚至可看作是一般映射概念的推广，因而在研究格上拓扑时起着基本的，联系两个对象的态射的作用（参看〔48〕、〔51〕，〔52〕，〔55〕）. 最近，〔28〕又针对F—拓扑学研究的需要，引入并研究了所谓F—序同态理论. 结合拟一致结构的研究，〔64〕中提出了拟一致连续序同态理论，得到了许多有启发性的结果. 设$f: L_1 \to L_2$是序同态，〔64〕中定义映射$f^*: L_2^{L_2} \to L_1^{L_1}$为

$$f^*(g)=f^{-1}\circ g\circ f,\quad g\in L_2^{L_2},$$

称f^*为f的诱导算子，证明了f^*把L_2上的保序、保并以及增值的自映射分别映成L_1上的同类自映射，并证明了$f^*(g_1\wedge g_2)=f^*(g_1)\wedge f^*(g_2)$，等等. 看来对完备格之间的各类映射的研究不仅为建立格上拓扑理论所必需，而且有其代数学的独立的兴趣，同时与多值逻辑的研究也不无联系，因而是值得进一步探讨的一个研究课题.

建立一种以F—拓扑学与分明拓扑学为特例的某类格上的拓扑学的研究已取得相当大的进展. 在〔39〕，〔48〕，〔51〕，〔13〕，〔23〕，〔59〕，〔64〕，〔54〕，〔6〕等工作的基础上，〔56〕中建立起了完全分配格上点式拓扑理论的总体框架. 设L是完全分配格，$\eta\subset L$，$0,1\in\eta$且η对有限并与任意交关闭，则(L,η)称为拓扑分子格. 之所以叫分子格，是因为我们证明了L有一特殊的子集—分子集M，由所有非零并既约元构成，使L的每个元都可表示为分子之并，因而L也常更清楚地记作L（M）. η中的元叫闭元. 对每个分子a，不包含a的闭元叫a的远域，a的远域的全体记作$\eta(a)$，它构成η中的理想（或L中的理想基）. 设D是定向集，则称映射$S: D\to M$为L中的分子网. 利用分子的远域系结构，〔56〕中建立起了分子网的完整的Moore-Smith收敛理论. 这里闭元是核心概念，而联系两个分子格的基本映射是广义序同态[58]. 在这一相当广的框架之下，与〔17〕的各部分内容相对应的理论之中除度量化问题与函数空间理论尚待进一步考虑而外，其余各部分理论均已有了雏形，不过还远不完备. 由于随时要涉及格的代数构造问题，诸如乘积理论，商理论，遗传性理论，拟一致结构理论以及基数不等式理论等方面的研究比较复杂. 目前虽已得到一批研究成果（参看〔67〕，〔43〕，〔44〕，〔70〕，〔71〕），但尚有一系列基本问题等待解决. 如，〔67〕中给出了分子格的乘积理论，而随之而来的各种拓扑性质的可乘性研究则尚未开展. 又如在〔57〕中较强的分离公理尚未引入，因而与〔25〕等相应的工作还有待结合T_3，T_4公理的研究而加以解决，等等.

另外，从大的框架上讲，还有两方面的工作值得注意. 一是〔8〕讨论了I^X的完备子格上的拓扑结构. 由于任一完全分配格都同构于形如I^X的格的一个完备子格，所以〔8〕中的理论具有一般性，只不过各部分理论的讨论尚待继续深化. 另一是〔9〕中提出了一种更为广泛的格上拓扑理论. 这里对“点”的概念放得很宽，同时甚至不要求点的邻近结构形成渗透或理想，同样建立起了一种完整的收敛理论.

最后，值得提出的是，对F—代数拓扑的研究也已开始（参看〔68〕，〔20〕等）. 不过这已经不属于本文的讨论范围了.

参 考 文 献

〔1〕K. K. Azad, On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity, JMAA, 82 (1981), 14—32.

〔2〕C.L.Chang, Fuzzy topological spaces, JMAA, 24(1968), 182—193.
〔3〕A.D.Concilio and G.Gerla, Almost compactness in fuzzy topological spaces, FSS, 13 (1984), 187—192.
〔4〕邓自克, Fuzzy pseudo-metric spaces, JMAA, 86(1982), 74—95.
〔5〕M.A.Erceg, Metric spaces in fuzzy set theory, JMAA, 69(1979), 205—230.
〔6〕G.Gierz et al. A Compendium of Continuous Lattices, Springer-Verlag, 1980.
〔7〕J.A.Goguen, L—fuzzy sets, JMAA, 18(1967), 145—174.
〔8〕P.Hamburg and L.Florescu, Topological structure in fuzzy lattices, JMAA, 101(1984), 475—490.
〔9〕何明，格上拓扑学·一般"点"的邻近构造与拟网收敛理论，全国第二届拓扑年会交流论文.
〔10〕——，L—不分明拓扑中的双诱导映射，科学通报（将发表）.
〔11〕U.Höhle, Compact $\mathcal{G}$—fuzzy topological spaces, FSS, 13(1984), 39—63.
〔12〕B.Hutton, Normality in fuzzy topological spaces, JMAA, 50(1975), 74—79.
〔13〕———, Uniformities on fuzzy topological spaces, JMAA, 58(1977), 559—571
〔14〕———, Products of fuzzy topological spaces, Top. Appl., 11(1980), 59—67.
〔15〕胡诚明，Fuzzy 拓扑空间的一个度量化定理，自然杂志，7(1981)，554.
〔16〕金长泽，不分明拓扑空间中的局部良紧性，科学通报，28(1983)，252.
〔17〕J.L.Kelley, General Topology, New York, 1955.
〔18〕梁基华，关于不分明度量空间的几个问题，科学通报，28(1983)，644—646.
〔19〕刘旺金，Fuzzy proximity Spaces redefined, FSS, 15(1985), 241—248.
〔20〕刘旺金，郑崇友，Singular homology groups of fuzzy topological spaces, FSS, 15(1985), 199—208.
〔21〕刘应明，关于不分明单位区间紧性的一点注记，科学通报，25(1980)，数学物理专辑，33—35.
〔22〕———，不分明拓扑空间中的紧性与 Tychonoff 乘积定理，数学学报，24(1981)，260—268.
〔23〕———，Intersection operation on union preserving mappings in completely distributive lattice, JMAA, 84(1981), 249—255.
〔24〕———，Inverse operation on union preserving mappings in lattices and its applications to fuzzy uniform spaces, Proc. 12th International Symposium on Multiple-valued Logic, 280—288.
〔25〕———，不分明拓扑空间中完全正则性的点式刻划与嵌入定理，中国科学，A辑，8(1982)，675—682.
〔26〕———，不分明 Stone Čech 紧化，数学学报，26(1983)，507—512.
〔27〕———，Fuzzy 集论中邻属关系的分析，数学年刊，5(1984)，461—466.
〔28〕———，Fuzzy 序同态，四川大学学报（自然科学版），1985年第4期.
〔29〕刘应明，何明，Induced mappings on completely distributive lattices, Proc. 15th International Symposium on Multiple valued logic.
〔30〕R.Lowen, Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, JMAA, 56(1976), 621—633.
〔31〕———, Initial and final topologies and the Tychonoff theorem, JMAA, 58(1977), 11—21.
〔32〕———, A comparison of different compactness in fuzzy topological spaces, JMAA, 64 (1978), 446—454.
〔33〕———, Convergence in fuzzy topological spaces, Top. Appl., 10(1979), 147—160.
〔34〕———, Compact Hausdorff fuzzy topological spaces are topological, Top. Appl., 12(1981), 65—75.
〔35〕———, I^X, The hyperspaces of fuzzy sets, A natural nontopological fuzzy topological spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 278(1983), 547—564.
〔36〕———, Fuzzy integers, fuzzy rationals and other subspaces o the fuzzy real line, FSS,

14 (1984), 231 —236.
[37] ——, The order aspect of the fuzzy real line, Manuscripta Math., 39 (1985), 293 —309.
[38] 罗懋康, 关于 Fuzzy 仿紧性和 Fuzzy 度量性的一个注记, 四川大学学报, 自然科学版, 1985年第4期.
[39] G. Nöbeling, Grundlagen der analytischen Topologie, Springer-verlag, 1954.
[40] 彭育威, 不分明函数空间的拓扑结构——点态收敛拓扑和紧开拓扑, 科学通报, 28 (1983), 836 —838.
[41] 蒲保明, 不分明拓扑学的进展, 1978年全国拓扑年会上的报告.
[42] 蒲保明, 刘应明, Fuzzy topology I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, JMAA, 76 (1980), 571 —599.
[43] 孙国正, 子拓扑分子格与商拓扑分子格(待发表).
[44] 孙叔豪, 完全分配格上的拟一致结构, 陕西师大学报(自然科学版), 1985, 3:9 —15.
[45] ——, Fuzzy 仿紧性 (good extension), 上海机械学院学报 (将发表).
[46] 王戈平, 不分明集的一个分解定理及其在不分明拓扑中的应用, 科学通报, 26 (1981), 259 —262.
[47] 王国俊, 半拓扑空间(I), (II), 陕西师大学报(自然科学版), 1977—1978.
[48] ——, 拓扑分子格(I), 陕西师大学报(自然科学版), 1979, 1 —15. 简报见科学通报, 28 (1983), 1089—1091.
[49] ——, 邻域方法在 Fuzzy 拓扑学中的困难, 模糊数学, 1982, 4:113 —116.
[50] ——, A new fuzzy compactness defined by fuzzy nets, JMAA, 94 (1983), 1 —23.
[51] ——, 广义拓扑分子格, 中国科学, A辑, 1983, 12:1063—1072.
[52] ——, Order homomorphisms on fuzzes, FSS, 12 (1984), 281 —288.
[53] ——, Fuzz 函数成为 Zadeh 型函数的充要条件, 自然杂志, 7 (1984), 553.
[54] ——, 论 Fuzzy 格之构造, 科学通报, 29 (1984), 1083.
[55] ——, 关于序同态的若干特征定理, 科学通报, 30 (1985), 241 —243.
[56] ——, 完全分配格上的点式拓扑(I), 陕西师大学报(自然科学版), 1985, 1:1 —17.
[57] ——, 完全分配格上的点式拓扑(II), 陕西师大学报(自然科学版), 1985, 2:1 —15.
[58] ——, 广义序同态理论, 东北数学, 1985, 2:141 —152.
[59] 王国俊, 杨忠强, 完全分配格中的极大族理论及其应用, 工程数学学报, 1984, 创刊号, 63—68.
[60] 汪培庄, 北京师范大学学报(自然科学版), 1984, 2:19—34.
[61] C. K. Wong, Covering properties of fuzzy topological spaces, JMAA, 43 (1973), 697 —704
[62] P. Wuyts and R. Lowen, On local and global measures of separation in fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 19 (1986), 1:51—80.
[63] 张文修, 模糊数学基础, 西安交通大学出版社, 1984.
[64] 赵东升, Fuzz 上的拟一致连续序同态, 陕西师大学报(自然科学版), 1984, 2:9 —18.
[65] ——, Generalization of N compactness in L—fuzzy topological spaces, JMAA(将发表).
[66] 赵东升, 王国俊, 一种新的 Fuzzy 连通性, 模糊数学, 1984, 4:15—22.
[67] 樊太和, 分子格范畴中的积运算, 科学通报, 1986, 4:244 —247.
[68] 郑崇友, Fuzzy path and fuzzy connectedness, FSS, 14 (1984), 273 —280.
[69] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8 (1965), 338 —353.
[70] 刘晓石, 格上点式拓扑的基数函数, 数学研究与评论, Vol.6, No.3, 5 —11.
[71] ——, 格上的离散度(待发表).
[72] C. K. Wong, Fuzzy points and local properties of fuzzy topology, JMAA, 46 (1974), 316 —328.