关于方程 $Dx^2 \pm 1 = y^p, xy \neq 0$

曹　珍　富

（哈尔滨工业大学）

对于Diophantus方程

$$Dx^2 + 1 = y^p,\ xy \neq 0,\quad p > \varepsilon\text{是素数}, \tag{1}$$

当$D = 2$时，它仅有整数解$x = \pm 11$，$y = 3$（$p = 5$）（参阅〔1〕）．而当$D > 2$无平方因子时，Nagell[2]证明了：设$p \nmid h(-D)$，这里$h(-D)$表示虚二次域$Q(\sqrt{-D})$的类数，则方程（1）给出$2 \mid y$．

1984年，我们[3]证明了$D = 7$时（1）无整数解．随后，我们[4]一般性地证明了：设D不含$2mp + 1$形的素因子，则除$2(\pm 11)^2 + 1 = 3^5$外，方程（1）如有整数解，必有$2p \mid x$．结合Nagell的结果，我们可将〔4〕中得到的这一结果写成如下的引理．

引理　设$D > 2$不含$2mp + 1$形素因子，且$p \nmid h(-D)$，这里$h(-D)$表示虚二次域$Q(\sqrt{-D})$的类数，则方程（1）无整数解．

最近，孙琦[5]证明了$D = 15$和23时方程（1）无解．本文将给出在$2 < D < 100$时方程（1）的全部整数解．同时，我们还用两种不同的方法完全解决了Diophantus方程

$$Dy^2 = (Dx^2 - 1)^k + 1,\ k > 1\text{是整数}. \tag{2}$$

它的一个极为特殊的情形$2y^2 = 7^k + 1\ (k > 1)$，是Inkeri[6]在1979年得到的．

定理 1　在$2 < D < 100$时，方程（1）除开$D = 31$，$x = \pm 1$，$y = 2$，$p = 5$外，无其他的整数解．

定理 2　方程（2）除$D = 2$时仅有解$(x, y, k) = (1, 1, k), (2, 5, 2)$外，无其他的正整数解．

定理 2 的两种证明中，有一种证明是初等而简洁的，避开了Liunggren关于方程$\dfrac{x^p - 1}{x - 1} = y^2$的结果．

参　考　文　献

〔1〕Cao Zhenfu, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 98, No. 1（1986）, 11—16.

〔2〕Nagell, T., Norsk Mat. Forenings Skrifter, Ser. I, Nr. 13, Oslo（1923）.

〔3〕曹珍富，西南师范学院学报（自然科学版），2（1985），69—73.

〔4〕曹珍富，东北数学，2（1986），219—227.

〔5〕孙琦，四川大学学报（自然科学版），1（1987），19—23.

〔6〕Inkeri, K., Elem. Math., 34（1979），119—121.

* 1987年 2 月27日收到．中国科学院青年奖励研究基金资助的课题．