某些近于凸函数子类的极值点*

申大维
（北京工业学院）

§1 引 言

熟知在内闭匀敛的拓扑意义下，单位圆盘$D=\{|z|<1\}$上的解析函数空间$\mathscr{A}$是一个局部凸的线性拓扑空间.[3] 对于空间$\mathscr{A}$中的任意一个非空子集F，以$\overline{co}F$表示其闭凸包，$\overline{co}F$的极值点（extreme point，见〔1,p.92〕）的全体记作$\mathscr{E}\overline{co}F$.

以S表示$\mathscr{A}$中满足$f(0)=f'(0)-1=0$的标准化单叶函数f的全体，$St(\beta)$和$K(\beta)$分别表示β-阶星形函数和β-阶凸函数类,[2] $0\leqslant\beta<1$．本文考虑如下的两个函数类:

若$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathscr{A}$，且存在函数$g\in St(\beta)$及模为1的复数$b$，使得

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{bg(z)}>0,\qquad z\in D,\tag{1}$$

则称$f\in C(\beta)$；$C(0)$即为熟知的近于凸函数类C；

若$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathscr{A}$且存在函数$g\in St(\beta)$及模为1的复数$b$，使得

$$\mathrm{Re}\frac{[zf'(z)]'}{bg'(z)}>0,\qquad z\in D\tag{2}$$

则称$f\in C^*(\beta)$.

不难得出：对于$0\leqslant\beta<1$，$C(\beta)$和$C^*(\beta)$都是$\mathscr{A}$的紧子集.

由〔5〕中的引理A，我们有$C^*(\beta)\subset C(\beta)$，因而这两类函数都是近于凸函数类$C=C(0)$的 类.

本文首先给出$C(\beta)$类和$C^*(\frac{1}{2})$类的闭凸包和极值点，在此基础上得到这两类函数的一些精确估计式，我们还进而研究了本文引入的近于凸子类同〔5〕中引入的近于凸子类C_1，C_2，C_3（见§4）及吴卓人〔4〕中C'类（见§4）函数的关系，得到

$$\overline{co}C_1=\overline{co}C(\tfrac{1}{2}),\qquad \mathscr{E}\overline{co}C_1=\mathscr{E}\overline{co}C(\tfrac{1}{2});$$

$$\overline{co}C_2=\overline{co}C^*(\tfrac{1}{2}),\qquad \mathscr{E}\overline{co}C_2=\mathscr{E}\overline{co}C^*(\tfrac{1}{2});$$

$$\overline{co}C'=\overline{co}C,\qquad \mathscr{E}\overline{co}C'=\mathscr{E}\overline{co}C.$$

* 1984年6月12日收到．本文是在杨维奇副教授指导下完成的，作者谨致谢意.

以及关于$C^*(0)$类函数的模与系数的精确估计.

§2 $C(\beta)$类与$C^*(\beta)$类的闭凸包和极值点

设$X=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{C},|x|=|y|=1\}$，P是X上的概率测度$\mu$的全体．命

$$k(z,x,y)=\frac{z-\frac{1}{2}(x+y)z^2}{(1-xz)^2}\ ,\qquad (x,y)\in X,\ z\in D\ , \tag{3}$$

$$\mathscr{F}=\{f_\mu\mid f_\mu(z)=\int_X k(z,x,y)\mathrm{d}\mu(x,y),\ \mu\in P\}\ . \tag{4}$$

〔1〕证明了：

$$\overline{\mathrm{co}}C=\mathscr{F},\ \mathscr{E}\,\overline{\mathrm{co}}C=\{k(z,x,y)\mid(x,y)\in X,\ x\neq y\}\ .$$

$C(\beta)$类的闭凸包和极值点具有不易预料的形式．命

$$k_\beta(z,x,y)=\begin{cases}\dfrac{A_\beta-\dfrac{\bar{x}y}{1-2\beta}z}{(1-xz)^{2(1-\beta)}}-A_\beta\ , & \beta\neq\dfrac{1}{2}\ ,\\[2ex] (1-\bar{x}y)\dfrac{z}{1-xz}+\bar{x}^2y\log\dfrac{1}{1-xz}\ , & \beta=\dfrac{1}{2}\ ,\end{cases} \tag{5}$$

其中$(x,y)\in X$，$z\in D$

$$A_\beta=\frac{(1-2\beta)\bar{x}+\bar{x}^2y}{2(1-\beta)(1-2\beta)}\ ;$$

记

$$\mathscr{F}_\beta=\{f_\mu\mid f_\mu(z)=\int_X k_\beta(z,x,y)\mathrm{d}\mu(x,y),\quad \mu\in P\}\ . \tag{6}$$

我们有

定理1 对于$0<\beta<1$，有

$$\overline{\mathrm{co}}C(\beta)=\mathscr{F}_\beta\ , \tag{7}$$

$$\mathscr{E}\,\overline{\mathrm{co}}C(\beta)=\{k_\beta(z,x,y)\mid(x,y)\in X,\ x\neq y\}\ . \tag{8}$$

证明（i）设$f\in C(\beta)$，则存在$g\in St(\beta)$及模为1的复数b，使函数

$$p(z)=\frac{zf'(z)}{bg(z)}\ ,\qquad z\in D$$

具有正实部，$p(0)=\bar{b}$．由Herglotz公式，存在∂D上的概率测度α，使得

$$p(z)=\int_{\partial D}\frac{\bar{b}u+bz}{u-z}\mathrm{d}\alpha(u)\ .$$

又由〔2〕，存在∂D上的概率测度γ，使得

$$\frac{g(z)}{z}=\int_{\partial D}\frac{1}{(1-vz)^{2(1-\beta)}}\mathrm{d}\gamma(v) \tag{10}$$

从而有

$$f'(z)=bp(z)\frac{g(z)}{z}=\int_X\frac{1+b^2\bar{u}z}{(1-vz)^{2(1-\beta)}(1-\bar{u}z)}\mathrm{d}\alpha(u)\mathrm{d}\gamma(v) \tag{11}$$

由〔2〕中的定理1，上式的被积函数可表成

$$\frac{1+b^2\bar{u}z}{(1-vz)^{2(1-\beta)}(1-\bar{u}z)}=\int_{\partial D}\frac{1+b^2\bar{u}z}{(1-wz)^{3-2\beta}}\,dv(w) \tag{12}$$

其中$v(w)$是∂D上的某个概率测度．由（5）式经直接计算，有

$$\frac{d}{dz}k_\beta(z,w,-b^2\bar{u})=\frac{1+b^2\bar{u}z}{(1-wz)^{3-2\beta}} \quad . \tag{13}$$

以$\mathscr{F}'_\beta$表示$\mathscr{F}_\beta$中函数的导函数作成的集合，显然（13）式中的函数属于$\mathscr{F}'_\beta$．又由〔1〕中的定理1，$\mathscr{F}_\beta$是闭凸集，从而$\mathscr{F}'_\beta$也是闭凸集．于是由（12）式及（11）式，我们推出$f'\in\mathscr{F}'_\beta$．因此$f\in\mathscr{F}_\beta$．于是我们得到$\overline{\mathrm{co}}\mathrm{C}(\beta)\subset\overline{\mathrm{co}}\,\mathscr{F}_\beta=\mathscr{F}_\beta$．

另一方面，函数

$$g(z)=\frac{z}{(1-xy)^{2-2\beta}}\in \mathrm{St}(\beta),\quad 0<\beta<1 \quad .$$

同时，函数

$$\frac{z}{g(z)}\ \frac{d}{dz}k_\beta(z,x,y)=\frac{1-yz}{1-xz}\ ,\quad (x,y)\in \mathrm{X}$$

将单位圆盘变成一个不含原点的半平面，故有$k_\beta(z,x,y)\in\mathrm{C}(\beta)$，从而由（6）式得到$\mathscr{F}_\beta\subset\overline{\mathrm{co}}\mathrm{C}(\beta)$．这就证明了（7）式．

（ii）由〔1〕中的定理1,（7）式意味着

$$\mathscr{E}\,\overline{\mathrm{co}}\mathrm{C}(\beta)\subset\{k_\beta(z,x,y)\,|\,(x,y)\in\mathrm{X}\} \quad .$$

由〔2〕知$k_\beta(z,x,x)$不是$\overline{\mathrm{co}}\mathrm{St}(\beta)$的极值点，而显然有$\overline{\mathrm{co}}\mathrm{St}(\beta)\subset\overline{\mathrm{co}}\mathrm{C}(\beta)$,故$k_\beta(z,x,x)$也不是$\overline{\mathrm{co}}\mathrm{C}(\beta)$的极值点．类似于〔1〕中定理6的证明过程，可以证明：当$x\neq y$时，$k_\beta(z,x,y)$都是极值点，即（18）式成立．证毕．

在定理1中取$\beta=0$，就得到〔1〕中定理6的结果．

用完全类似的方法，可以证明：若命

$$h(z,x,y)=\frac{1-\bar{x}y}{2}\ \frac{z}{1-xz}+\frac{1+\bar{x}y}{2}\ \bar{x}\log\frac{1}{1-xz}\quad , \tag{14}$$

$$\mathrm{G}=\{f_\mu\,|\,f_\mu(z)=\int_{\mathrm{X}}h(z,x,y)\,d\mu(x,y),\quad \mu\in\mathrm{P}\}\quad , \tag{15}$$

则有

定理2 对于$\mathrm{C}^*(\frac{1}{2})$类函数有

$$\overline{\mathrm{co}}\mathrm{C}^*(\tfrac{1}{2})=\mathrm{G}\,, \tag{16}$$

$$\mathscr{E}\,\overline{\mathrm{co}}\mathrm{C}^*(\tfrac{1}{2})=\{h(z,x,y)\,|\,(x,y)\in\mathrm{X},\ \ x\neq y\}\,.$$

本文未能给出当$\beta\neq\frac{1}{2}$时$\mathrm{C}^*(\beta)$类的闭凸包和极值点，这是一个有待研究的问题．

§3 一些精确的估计式

由定理1和定理2，我们立即可以得到这些函数类的系数估计和偏差估计．命

$$\binom{t}{k}=\frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!},\qquad \binom{t}{0}=1,$$

其中 k 是自然数.

定理 3 设 $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in C(\beta)$, $0\leqslant\beta<1$, 则对 $|z|=r<1$,

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{n}\left(\binom{n+1-2\beta}{n-1}+\binom{n-2\beta}{n-2}\right),\quad n=2,3,\cdots \tag{18}$$

$$\frac{\dfrac{(1-\beta)r+\beta}{(1+r)^{2-2\beta}}-\beta}{(1-\beta)(1-2\beta)}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{\dfrac{(1-\beta)r-\beta}{(1-r)^{2-2\beta}}+\beta}{(1-\beta)(1-2\beta)},\qquad \beta\neq\frac{1}{2}, \tag{19}$$

$$\frac{2r}{1+r}-\log(1+r)\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{2r}{1-r}+\log(1-r),\qquad \beta=\frac{1}{2}, \tag{20}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^{3-2\beta}}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+r}{(1-r)^{3-2\beta}}\quad. \tag{21}$$

这些估计式都是精确的.

证明 由〔6〕, 只需对$\overline{\mathrm{co}}C(\beta)$的极值点证明上述不等式. 因

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}k_\beta(z,x,y)=\frac{1-yz}{(1-xz)^{3-2\beta}}=(1-yz)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2-2\beta}{n}x^nz^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{n+2-2\beta}{n}x^n-\binom{n+1-2\beta}{n-1}x^{n-1}y\right]z^n \tag{22}$$

故 (18) 式成立, 并且$k_\beta(z,1,-1)$使等号成立.

(21) 式亦可由 (22) 式直接推出, 并且$k_\beta(z,-1,1)$使等号成立. 由 (21) 式经积分可推出 (19) 式和 (20) 式, 等号同样可由$k_\beta(z,-1,1)$达到. 证毕.

完全类似地可证明如下定理:

定理 4 设 $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in C^*(\frac{1}{2})$, 则对 $|z|=r<1$,

$$|a_n|\leqslant 1,\quad n=1,2,\cdots \tag{23}$$

$$\frac{r}{1+r}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{r}{1-r}\quad, \tag{24}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-r)^2} \tag{25}$$

并且函数$f(z)=\dfrac{z}{1-z}$使等号成立.

§ 4　与一些函数类的关系

吴卓人在文〔4〕中引进了函数类C': 称$f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathscr{A}$为$C'$中的函数, 如果存

在$g\in St(\frac{1}{2})$ 及$b\in \mathbb{C}$, $|b|=1$，使得

$$\operatorname{Re}\frac{f'(z)}{bg'(z)}>0,\quad z\in D\ .$$

C'类比近于凸函数类C广泛，但系数满足$|a_n|<n$，从而引起人们的兴趣．显然C'是$\mathscr{A}$的紧子集且

$$f\in C^*(\frac{1}{2})\Longleftrightarrow zf'\in C'\ . \tag{26}$$

由这一简单关系可导出如下的结果：

定理 5 $\mathscr{E}\overline{co}C'=\mathscr{E}\overline{co}C$，$\overline{co}C'=\overline{co}C$ ．

证明 以$\mathscr{A}_0$表示$\mathscr{A}$中满足$f(0)=0$的函数f组成的子空间．线性算子

$$L: f\longrightarrow L(f)=zf',\qquad f\in\mathscr{A}_0$$

是$\mathscr{A}_0$的一个线性自同胚．

(26) 式可写成$L(C^*(\frac{1}{2}))=C'$．由算子L的性质推出

$$L(\mathscr{E}\overline{co}C^*(\frac{1}{2}))=\mathscr{E}\overline{co}C',\qquad L(\overline{co}C^*(\frac{1}{2}))=\overline{co}C'\ .$$

由本文定理 1 及定理 2，对于$h\in\mathscr{E}\overline{co}C^*(\frac{1}{2})$,

$$L(h)=L\left(\frac{1-\bar{x}y}{2}\frac{z}{1-xz}+\frac{1+\bar{x}y}{2}\bar{x}\log\frac{1}{1-xz}\right)=\frac{z-\frac{1}{2}(x+y)z^2}{(1-xz)^2}\in\mathscr{E}\overline{co}C\ . \tag{27}$$

这就推出$\mathscr{E}\overline{co}C'=\mathscr{E}\overline{co}C$，再由Krein-Milman定理[7]，得到$\overline{co}C'=\overline{co}C$。证毕．

作为定理的一个直接推论，我们得到：对于$\mathscr{A}$的每个实值线性连续泛函Φ，有

$$\max_{f\in C'}\Phi[f]=\max_{f\in C}\Phi[f]\ . \tag{28}$$

Silverman和Telage在〔5〕中考虑了近于凸函数类C中分别满足

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{bg(z)}>0,\qquad z\in D \tag{29}$$

$$\operatorname{Re}\frac{[zf'(z)]'}{bg'(z)}>0,\qquad z\in D \tag{30}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{[z(zf')']'}{b(zg')'}\right\}>0,\qquad z\in D \tag{31}$$

的三个子类C_1，C_2和C_3．此处$g\in K=K(0)$，b是模为 1 的复数．

由于$K\subset St(\frac{1}{2})$，故有$C_1\subset C(\frac{1}{2})$，$C_2\subset C^*(\frac{1}{2})$．由〔5〕及本文定理 1 和定理 2 以及Krein-Milman定理，有

$$\mathscr{E}\overline{co}C_1=\mathscr{E}\overline{co}C(\frac{1}{2}),\quad \overline{co}C_1=\overline{co}C(\frac{1}{2}),$$

$$\mathscr{E}\overline{co}C_2=\mathscr{E}coC^*(\frac{1}{2}),\quad \overline{co}C_2=\overline{co}C^*(\frac{1}{2})\ .$$

由于$g\in K$当且仅当$zg'\in St(0)$，因此

$$f\in C_3 \Longleftrightarrow zf'\in C^*(0)\ .$$

于是由〔5〕中关于C_3类函数的估计式可得到$C^*(0)$类函数的如下精确估计：

定理 6 设$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in C^*(0)$，则对$|z|=r<1$，

$$|a_n|<\frac{2n^2+1}{3n},\quad n=1,2,\cdots.$$

$$\frac{2}{3}\frac{r}{(1+r)^2}+\frac{1}{3}\log(1+r)<|f(z)|<\frac{2}{3}\frac{r}{(1-r)^2}-\frac{1}{3}\log(1-r)\ .$$

函数$f(z)=\frac{2}{3}\frac{z}{(1-z)^2}+\frac{1}{3}\log\frac{1}{1-z}$使等号成立.

参 考 文 献

〔1〕Brickman, L., MacGregor, T.H. and Wilken, D.R., Trans. Amer. Math. Soc., 156(1971), 91–107.

〔2〕Brickman, L.; Hallenbeck, D.J.; MacGregor, T.H. and Wilken, D.R., Trans. Amer. Math. Soc., 185(1973), 413–428.

〔3〕Taylor, A.E., Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York, 1958, p150.

〔4〕吴卓人：解析函数的单叶半径，复旦学报（自然科学版），vol.21(1982), no.1, 71–76.

〔5〕Silverman, H. and Telage, D.N., Proc. Amer. Math. Soc., 74(1979), 59–65.

〔6〕Mac Gregor, T.H., Michigan Math. J., 19(1972), 361–376.

〔7〕Dunford, N. and Schwartz, J.T., Linear Operators, Part I, Interscience, New York, 1958, p. 110

On Extreme Points of Some Subclasses of Close-to-Convex Functions

Shen Dawei

Abstract

Let $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ be analytic in $D=\{|z|<1\}$. Let $0\le\beta<1$. A function f is said to be in $C(\beta)$ if there exist a function $g\in St(\beta)$, the normalized starlike functions of order β, and $b\in\mathbb{C}$ with $|b|=1$ such that

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{bg(z)}>0\qquad(z\in D).$$

If there exist such a g and b satisfying

$$\operatorname{Re}\frac{(zf')'}{bg'}>0\qquad(z\in D)$$

then f is said to be in $C^*(\beta)$.

In this paper the closed convex hulls and extreme points are determined for $C(\beta)$ and $C^*(\frac{1}{2})$. Then we determine coefficient bounds and distortion theorems for these classes. All results are sharp. Finally, we discuss the relationships between these classes and known classes of functions.