有限重位移*

郑德超
(四川大学)

文献［5］，［6］回答了Abrahamse问题2（见［1］）［7］，［8］给出了有限重亚正规加权单向位移酉价等价于Toeplirz算子的充分必要条件。那么，什么情况下有限重的加权位移酉等价于Toeplirz算子？这是一个十分有趣的问题．它对研究Toeplirz算子的结构是重要的．本文部分回答了这个问题．用∂D表示复平面上的单位圆周，H^2为Hardy空间． 符号为$\psi\in L^\infty(\partial D)$的Toeplirz算子定义为：$T_\varphi(f)=P(\varphi f)$，（$f\in H^2$ 这里P为$L^2(\partial D)$到H^2上的正交投影）．设$\{a_n\}_0^\infty$为一列有界序列，$\{e_n\}$为Hilbert空间H上的标准正交基；k重加权单向位移定义为：$Te_n=a_ne_{n+k}$，$\{a_n\}$称为T的权序列．

我们的主要结论：

定理 若k重加权单向位移T的权序列的模$\{|a_n|\}_0^\infty$是收敛的，则T酉等价于Toeplirz算子的充分必要条件是它的权满足$(1-|a_n|^2)=(1-|a_0|^2)(1-|a_{n-k}|^2)$．$n\geqslant k$，且$|a_0|=|a_1|=\cdots=|a_{k-1}|$．这里假设$\|T\|=1$．

不失一般性，下面，我们假设算子T的范数$\|T\|=1$．带权位移的权序为实数．为了证明上述定理，需要下列引理．

引理1．若k重加权单向位移T的权序列$\{a_n\}$是收敛的．T酉等价于Toeplirz算子T_φ则$\{a_n\}$收敛于1且$|\varphi(t)|=1$，$a.e.$，$t\in\partial D$．

证明：由于$\{a_n\}_0^\infty$收敛于a，则T的本质谱$\sigma_e(T)=\{\lambda|\,|\lambda|=a\}$（见（4）），因而$a=1$又因$T_\varphi\cong T$，$T_\varphi$的本质谱$\sigma_e(T_\varphi)=\{\lambda|\,|\lambda|=1\}$．由推论7.14（［3］．$p181$），$\varphi$的本质值域$R(\varphi)\subset\sigma_e(T_\varphi)$．所以$|\varphi(t)|=1$，$a.e.$，$t\in\partial D$．

引理2．设T满足引理1的条件，且权序列$\{a_n\}^\infty$．为：$0<a_n<1$．令$N_i=\{j|a_j=a_i\}$则N_i是有限的，且存在$|N_i|\times|N_i|$阶的酉矩阵A使得：

$$\varphi(e_j)_{j\in N_i}=a_i(e_{j+k})_{j\in N_i}+(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}A_i\left(\frac{\bar{e}_j}{t}\right)_{j\in N_i}.$$

$$\bar{\varphi}(e_{j+k})_{j\in N_i}=a_i(e_j)_{j\in N_i}-(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}A_i\left(\frac{\bar{e}_{j+k}}{t}\right)_{j\in N_i}.\quad \text{这里}\bar{A}_i=A_i^*.$$

证明：由定义存在H^2的标准正交基$\{e_n\}$及H^2的单位向量组$\{\xi_i\}$，$\{\eta_j\}$使得：

$$\varphi e_n=a_ne_{n+k}+(1-a_n^2)^{\frac{1}{2}}\xi_n,\quad \bar{\varphi}e_{n+k}=a_ne_n+(1-a_n^2)^{\frac{1}{2}}\eta_n.$$

由$\langle\varphi e_i,\varphi e_j\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}.i,j\geqslant0$．知$\langle\xi_l,\xi_k\rangle=\langle\eta_l,\eta_k\rangle=\begin{cases}0 & l\neq k\\1 & l=k\end{cases}$，

*1984年6月29日收到．国家自然科学基金资助项目．

$l,k\geqslant 0$.

令$\mathbf{N}_i=\{j\,|a_j=a_i\}$．设$a_{i_0}=\inf\limits_j a_j$，则$\mathbf{N}_{i_0}$是有限的，而$i$ 0 时：

$$\varphi\frac{\overline{\xi_i}}{t}=\frac{1}{(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\overline{e_i}}{t}-a_i f\frac{\overline{e_{i+k}}}{t}\right]=-a_i\frac{\overline{\eta_i}}{t}+(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\overline{e_i}}{t};$$

所以 $T_\varphi\frac{\overline{\xi_i}}{t}=-a_i\frac{\overline{\eta_i}}{t}$.

当$i\in\mathbf{N}_{i_0}$时，$\|T_\varphi\frac{\overline{\xi_i}}{t}\|=\inf\limits_{\|x\|=1}\|T_\varphi x\|$，我们断言 $\frac{\overline{\xi_i}}{t}\in\{x\,|\,\|T_\varphi x\|=\inf\limits_{\|y\|=1}\|T_\varphi y\|,\ \|x\|=1\},\forall i\in\mathbf{N}_{i_0}$

从而 $\frac{\overline{\xi_i}}{t}=\sum\limits_{j\in\mathbf{N}_{i_0}}a_{ij}e_j$; $\frac{\overline{\eta_i}}{t}=-\sum\limits_{j\in\mathbf{N}_{i_0}}a_{ij}e_{j+k}$.

令$A_{i_0}=(\overline{a}_{ij})_{i,j\in\mathbf{N}_{i_0}}$则

$$\begin{cases}\varphi(e_j)_{j\in\mathbf{N}_{i_0}}=a_{i_0}(e_{j+k})_{j\in\mathbf{N}_{i_0}}+(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}A_{i_0}\left(\frac{\overline{e_i}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_{i_0}},\\ \overline{\varphi(e_{j+k})}_{j\in\mathbf{N}_{i_0}}=a_{i_0}(e_j)_{j\in\mathbf{N}_{i_0}}-(1-a_{i_0}^2)^{\frac{1}{2}}A_{i_0}\left(\frac{\overline{e_{j+k}}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_{i_0}}.\end{cases}$$

令$a_{i_1}=\inf\limits_{j\overline{\in}\mathbf{N}_{i_0}}a_j$，则利用$\{\xi_i\}$的正交性，类似地可以得到，存在酉矩阵$A_{i_1}$使得：

$$\varphi(e_j)_{j\in\mathbf{N}_{i_1}}=a_{i_1}(e_{j+k})_{j\in\mathbf{N}_{i_1}}+(1-a_{i_1}^2)^{\frac{1}{2}}A_{i_1}\left(\frac{\overline{e_{j+k}}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_{i_1}},$$

$$\overline{\varphi(e_{j+k})}_{j\in\mathbf{N}_{i_1}}=a_{i_1}(e)_{j\in\mathbf{N}_{i_1}}-(1-a_{i_1}^2)^{\frac{1}{2}}A_{i_1}\left(\frac{\overline{e_{j+k}}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_{i_1}}.$$

如此下去，就可以得到所需的结论．现在只剩下证明$\overline{A_i}=A_i^*$．由第一式有：

$$\overline{\varphi}\left(\frac{\overline{e_j}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_i}=a_i\left(\frac{\overline{e_{j+k}}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_i}+(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}\overline{A_i}(e_j)_{j\in\mathbf{N}_i}.$$

由第二式有 $(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{\overline{e_{j+k}}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_i}=A_i^*[a_i f(e_j)_{j\in\mathbf{N}_i}-(e_{j+k})_{j\in\mathbf{N}_i}]$，

从而 $$\left(\frac{\overline{e_j}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_i}=a_i\varphi\left(\frac{\overline{e_{j+k}}}{t}\right)+(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}\overline{A_i}f(e_j)_{j\in\mathbf{N}_i}=\frac{a_i}{(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}A_i^*[a_i\varphi(e_j)_{j\in\mathbf{N}_i}-(e_{j+k})_{j\in\mathbf{N}_i}]$$
$$+(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}\overline{A_i}\left[a_i(e_{j+k})_{j\in\mathbf{N}_i}+(1-a_i^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\overline{e_j}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_i}\right],$$

所以 $\left(\frac{\overline{e_j}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_i}=a_i^2A_i^*A_i\left(\frac{\overline{e_j}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_i}+(1-a_i^2)\left(\frac{\overline{e_j}}{t}\right)_{j\in\mathbf{N}_i}$.

由于$A_i^*A_i=1$，以及e_j，的正交性，知$\overline{A_i}=A_i^*$．于是我们完全证明了引理2．

下面这个引理是本文中主要与本质的．

引理 3．设T是满足引理 2 的加权单向位移，若T酉等价于Toeplitz 算子，

则$\mathbf{N}_i \subset \{ j | 0 \le j \le k-1 \} \forall i \le k-1$.

证明：由引理2，存在$|\mathbf{N}_i| \times |\mathbf{N}_i|$阶的酉矩阵$A_i$满足

$$\varphi(e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} = a_i (e_{j+k})_{j\in \mathbf{N}_i} + (1-a_i^2)^{\frac{1}{2}} A_i (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} \qquad (1)$$

且$A_i^* = \overline{A_i}$．这里我们假设$T \cong T_\varphi$，$\{e_j\}_{j=0}^{\infty}$是H^2的一组正交基．

我们用u_l表示A_i对应于特征值λ_l的特征向量．即满足$u_l A_i = \lambda_l u_l$．由$\overline{A_i} = A^*_i$，$\overline{\lambda_l} = \lambda_l^{-1}$，所以$\overline{u_l} A_i = \lambda_l \overline{u_l}$．由（1）式

$$\begin{cases} \varphi u_l (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} - (1-a_i^2)^{\frac{1}{2}} \lambda_l u_l (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} \in \mathrm{H}^2 \\ \varphi \overline{u_l} (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} - (1-a_i^2)^{\frac{1}{2}} \lambda_l \overline{u_l} (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} \in \mathrm{H}^2 \end{cases} \quad l = 1, \cdots |N_i| \qquad (2)$$

联立(2)式
$$\begin{cases} \lambda_l u_l (\frac{\overline{e}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} \overline{u}_\mu (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} - \lambda_\mu \overline{u}_\mu (\frac{\overline{e_j}}{t}) u_l (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} \in \mathrm{H}^1 \\ \lambda_l \overline{u}_l (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} u_\mu (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} - \lambda_\mu u_\mu (\frac{\overline{e_j}}{t}) \overline{u}_l (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} \in \mathrm{H}^1 \end{cases} \qquad (3)$$

而
$$\overline{\lambda_l u_l (\overline{e_j})_{j\in \mathbf{N}_i} \overline{u}_\mu (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} - \lambda \overline{u}_\mu (\overline{e_j})_{j\in \mathbf{N}_i} u_l (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i}}$$
$$= -\lambda_\mu \lambda_l [\lambda_l \overline{u}_l (\overline{e_j}) u_\mu (e_j) - \lambda_\mu \overline{u}_l (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} u_\mu (\overline{e_j})] \in \mathrm{H}^1 ,$$

所以
$$\lambda_l u_l (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} \overline{u}_\mu (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} - \lambda_\mu \overline{u}_\mu (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} u_l (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} \equiv 0 . \qquad (4)$$

而存在常数c_l 使得 $\frac{\overline{e_i}}{t} = \sum_{l\in \mathbf{N}} c_l u_l (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i}$． （5）

由（4）式、及（5）式

$$\frac{\overline{e_j}}{t} \overline{u}_\mu (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} = \sum_{l\in \mathbf{N}_i} c_l [u_l (\frac{\overline{e_j}}{t})] \overline{u}_\mu (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i}$$

$$= \sum_{l\in \mathbf{N}_i} c_l [\overline{\lambda}_l \lambda_\mu \overline{u}_\mu (\frac{\overline{e_j}}{t}) u_l (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i}] = [\sum_{l\in \mathbf{N}_i} c_l \overline{\lambda}_l u_l (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i}] \lambda_\mu u_\mu (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i}, \qquad (6)$$

而$\varphi \frac{\overline{e_i}}{t} \in \mathrm{H}^2$．令$F = \sum_{l\in \mathbf{N}_i} c_l \overline{\lambda}_l u_l (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i}$，由（6）式

$$\lambda_\mu \varphi F u_\mu (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} = \varphi \frac{\overline{e_i}}{t} \overline{u}_\mu (e_j)_{j\in \mathbf{N}_i} \in \mathrm{H}^1 .$$

令$\mathrm{M} = \{ x \in \mathrm{H}^2 | \varphi u_\mu (\frac{\overline{e}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} x \in \mathrm{H}^1 \}$，容易验证M是$T_z$的不变子空间，由Beurling定理知存在内函数$\theta$．使得$\mathrm{M} = \theta \mathrm{H}^2$．但$F \in \mathrm{M}$．所以$\theta | \mathrm{Inn} F$．故（$\mathrm{Inn} F$）$\varphi u_\mu (\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} \in \mathrm{H}^2$．

由引理2中的第二式，知 $(\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} = \overline{\varphi} (G_j)_{j\in \mathbf{N}_i} + (K_j)_{j\in \mathbf{N}_i}$ （7）

K_j，$G_j \in \mathrm{H}^2$，从而 $[\mathrm{Inn} F] \varphi (K_j)_{j\in \mathbf{N}_i}$的每个分量$\in \mathrm{H}^2$但$\varphi$不是有界型的，所以$(K_j)_{j\in \mathbf{N}_i} \equiv 0$．由（7）式，我们得到：$(\frac{\overline{e_j}}{t})_{j\in \mathbf{N}_i} = \overline{\varphi} (G_j)_{j\in \mathbf{N}_i}$．

所以$\varphi\frac{\overline{e_j}}{t}\in\ker T^*_\varphi$. $\forall j\in N_i$，而$\ker T^*_\varphi=\bigvee_{j\leqslant k-1}\varphi\frac{\overline{e_j}}{t}$.于是：$N_i\subset\{j\mid 0\leqslant j\leqslant k-1\}$.

至此我们完全证明了引理3．

定理的证明：必要性．设T酉等价于T，则存在H^2上的正交基使得$T_\varphi e_n=a_ne_{n+k}$．

1° 若存在$a_{i_0}=1$，则$\varphi e_{i_0}=\lambda a_{i_0}e_{i_0+k}$，从而$\varphi$是有界型的，即存在互素的内函数$\varphi=$ $\varphi=\frac{x}{x_1}$.因为$\ker T^*_\varphi=\bigvee_{i\leqslant k-1}\varphi\frac{\overline{e_i}}{t}$，所以$T^*_x e_i=0$，$i\leqslant k-1$．用引理2的证明方法，不难证明若$a_i<1$．则$T^*_1e_i=0$．由$x,x_1$的互素性，$a_i=1$，$i\leqslant k-1$．

设（$\theta=(\mathrm{Inn}\,e_0,\cdots,\mathrm{Inn}\,e_n)$．则$\overline{\theta}e_i\in\ker T^*_\rho\ \forall i\leqslant k-1$．而$\ker T^*_\rho=\bigvee_{i\leqslant k-1}e_i$，所以$\ker T^*_\rho$关于$T^*_\theta$是不变的．由$e_i$的正交性，知$\overline{\theta}e_i$仍是$\ker T^*_\rho$的一组基，所以$\ker T^*_\varphi$关于$T_\theta$是不变的，但$\ker T^*_\varphi$是$k$维的，不可能是$T_\theta$的约化子空间，除非$T_\theta$为常数，于是$\ker T^*_\varphi$有外函数$e$．而$\frac{x}{x_1}e=e'\in H^2$．所以$x_1|x$．从而$x_1$为常数．由此$a_i=1$，$i\geqslant 0$．

2°．若$\forall i\geqslant 0$，$0<a_i<1$．由引理3，存在$k\times k$阶矩阵A使得：

$$\varphi\begin{pmatrix}e_0\\ \vdots\\ e_{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0e_k\\ \vdots\\ a_{k-1}e_{2k-1}\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}\frac{\overline{e_0}}{t}\\ \vdots\\ \frac{\overline{e_{k-1}}}{t}\end{pmatrix}$$

而$\varphi\frac{\overline{e_i}}{t}\in\ker T^*_\varphi\ \forall i\leqslant k-1$．所以存在$k\times k$阶矩阵$B$，使得

$$\begin{pmatrix}\frac{\overline{e_0}}{t}\\ \vdots\\ \frac{\overline{e_{k-1}}}{t}\end{pmatrix}=\overline{\varphi}B\begin{pmatrix}e_0\\ \vdots\\ e_{k-1}\end{pmatrix}.\quad 令C=AB，于是\varphi\begin{pmatrix}e_0\\ \vdots\\ e_{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0e_k\\ \vdots\\ a_ke_{2k-1}\end{pmatrix}+\overline{\varphi}C\begin{pmatrix}e_0\\ \vdots\\ e_{k-1}\end{pmatrix}.$$

用［8］的定理中的证明方法容易得到$\varphi-(1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}\overline{\varphi}\in H^\infty$．由引理2，$n\geqslant k$

$$(\varphi-(1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}\overline{\varphi})e_n=a_ne_n+(1-a_n^2)^{\frac{1}{2}}\xi_n-(1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}a_{n-k}e_{n-k}-(1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}(1-a_{n-k}^2)^{\frac{1}{2}}\eta_n.$$

由此，$(1-a_n^2)^{\frac{1}{2}}\xi_n-(1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}(1-a_{n-k}^2)^{\frac{1}{2}}\eta_n=0$，所以$(1-a_n^2)=(1-a_0^2)(1-a_{n-k}^2)$．

当$n\leqslant k-1$时有

$$(\varphi-(1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}\overline{\varphi})e_n=a_ne_n+(1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}\xi_n-(1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}\overline{\varphi}e_n$$

而$\overline{\varphi}e_n\in H^2$所以$(1-a_n^2)^{\frac{1}{2}}\xi_n=(1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}\overline{\varphi}e_n$，即$a_n=a_0$，$n\leqslant k-1$．必要性证毕．

充分性．若令$b_n=a_{i+kn}$．$i\leqslant k-1$，则由［6］．以$\{b_n\}$为权序列的单向加权位移T_1酉等价于某个Toeplitz算子T_f．而$T\cong\sum_k T_1\cong\sum_k\oplus T_f$．由［2］$\sum_k\oplus T_f\cong T_{f\circ x}$ x为某个k阶内函数。所以$T_{f\circ x}\cong T$．

本文在孙顺华老师的指导下完成的，作者在此深表谢意．

参 考 文 献

[1] M.B.Abrahamase ,Subnormal Toeplitz Operators and Function of Bounded Type, Duke. Math.J.43 (1976), 597-604 .

[2] C.C.Cowen,On Equivalence of Toeplitz Operators,J.Operator Theory,7 (1982),167-172.

[3] R.G.Douglas , Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press,1972.

[4] A.L.Shielols, Weighted Shifl Operator and Analytic Functlcn Theory,Topic in Operator Theory (edited by C.Pear).

[5] Shun hua Sun, On Hyponormal Weighteel Shift , Chinese Annals.of Math., 5B:1 (1984) 71-78.

[6] Shun-hua Sun,On Hyponormal weighted Shifl II, Ibid.6B(1985),359-361.

[7] 郑德超，二重加权位移，科学通报，1985年第4期，241-248.

[8] De chau Zheng ,On Hyponormal weighted Unilateral Shift of Multiplicity K . Acta Mathematica Sinica, New Series, 3(1987),77-81.

Shiff of Finite MultipLicify

Zheng Dechau

Abstract

It is shown in this paper that a weighted unilateral Shift T of multiplicity k $(0<k<+\infty)$ with weights $\{a_n\}_0^\infty$ which $\{|a_n|\}$ converge, is unitarily equi-alent to a Toeplitz operator if and only if $(1-|a_n|^2)=(1-|a_0|^2)(1-|a_{n-k}|^2)$ $(n\geq k)$ and $|a_0|=|a_1|=\cdots=|a_{k-1}|$ wheve we assume $\|T\|=1$.

****

（接590页）

其中$p=qk+1$.

应用引理5，6及数学归纳法得

定理1 $T^*_{k+1}(qk+1,\ q)=\dfrac{(qk+1)!(qk+1)^{q-2}}{(k!)^q}$ $(k>0)$.

定理2 $T_{k+1}(qk+1,\ q)=\dfrac{1}{q!}T^*_{k+1}(qk+1,\ q)=\dfrac{(qk+1)!(qk+1)^{q-2}}{q!(k!)^q}$.

又若以$T^*(p,q)$和$T(p,q)$分别表边有标号和边无标号的p阶q边无环超树数．又得

定理3 $T^*(p,q)=p^{q-1}q!S_2(p-1,\ q)$，其中$S_2(m,n)$是第二类Stirling数．

定理4 $T(p,q)=\dfrac{1}{q!}T^*(p,q)=p^{q-1}S_2(p-1,\ q)$.

参 考 文 献

[1] 毛经中，关于超图中的树—超树，华中师院学报，专刊(1982).