1987年11月

数学研究与评论
第七卷　第四期

矩阵张量积不可约性的表征*

逄明贤　　孙玉祥

（吉林师范学院）

设$A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in C^{s\times t}$，则称

$$C=(c_{ij})_{ms\times nt}=\begin{pmatrix} a_{11}B\cdots a_{1n}B \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}B\cdots a_{mn}B \end{pmatrix}$$

为矩阵A与B的张量积，记为$C=A\otimes B$.

定义1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, $B=(b_{ij})\in C^{m\times m}$. 若$A$在某位置$(f,f)$之非零元素链中有一个含$r_1$个$A$中的非零元：$A(f,f)=a_{fe_1}a_{e_1e_2}\cdots a_{e_{r_1-1}f}$，$B$在某位置$(t,t)$之非零元素链中有一个含$r_2$个$B$中的非零元：$B(t,t)=b_{ts_1}b_{s_1s_2}\cdots b_{s_{r_2-1}t}$，且$(r_1,r_2)=1$, $1\le f\le n$, $1\le t\le m$，则称A, B满足弱链条件.

定义2 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若存在一$n$阶置换阵$P$使得

$$PAP^{T}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

这里A_{ii} $(i=1,2)$为非空方阵，则称A为可约阵，否则A为不可约阵，且记为$A\in \mathrm{I}$，进而，若存在置换阵P、Q使PAQ具有（1）之形式，则称A为局部可约阵，否则A为完全不可约阵，且记为$A\in \mathrm{I}_0$.

佟文廷在文〔1〕中首先讨论了矩阵张量积的不可约性，证明了满足链条件的矩阵张量积必为不可约，给出了若干充分条件，我们在本文给出了两个矩阵张量积不可约性的等价表征及一个充分条件，讨论了矩阵张量积完全不可约的充要条件.

定理1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}\cap \mathrm{I}$, $B=(b_{ij})\in C^{m\times m}\cap \mathrm{I}$，则$A\otimes B\in \mathrm{I}$当且仅当$A$，$B$满足弱链条件.

证　记$C=(c_{ij})=A\otimes B$，设$c_{ij}=a_{ef}b_{st}$, $1\le i,j\le mn$, $i\ne j$. 由$A\in \mathrm{I}$ $B\in \mathrm{I}$知有非零元素链$A(e,f)=a_{ee_1}a_{e_1e_2}\cdots a_{e_{r_1}f}\ne 0$, $B(s,t)=b_{ss_1}b_{s_1s_2}\cdots b_{s_{r_2}t}\ne 0$. 若$r_1=r_2$，则有$C$中相应元素$c_{ii_1}=a_{ee_1}b_{ss_1}$, $c_{i_1i_2}=a_{e_1e_2}b_{s_1s_2}$, $\cdots$, $c_{i_rj}=a_{e_{r_1}f}b_{s_{r_2}t}$ $(r=r_1=r_2)$使$C(i,j)=c_{ii_1}c_{i_1i_2}\cdots c_{i_rj}\ne 0$，由$i\ne j$之任意性即知$A\otimes B\in \mathrm{I}$.

若$r_1\ne r_2$，不妨设$r_1>r_2$，由A，B满足弱链条件，知存在A之某位置(p,p)，其包含r_1'个A中非零元组成之非零元素链$A(p,p)$，同时存在B之某位置(q,q)，其包含r_2'个B中非零元组成之非零元素链$B(q,q)$，且$(r_1',r_2')=1$. 又由$A\in \mathrm{I}$应有$A(f,p)=a_{ff_1}a_{f_1f_2}\cdots a_{f_{\alpha-1}p}\ne 0$ $A(p,f)=a_{pp_1}a_{p_1p_2}\cdots a_{p_{\beta-1}f}\ne 0$，进而有$A(f,f)=a_{ff_1}a_{ff_2}\cdots a_{f_{\alpha-1}p}a_{pp_1}a_{p_1p_2}\cdots a_{p_{\beta-1}f}\ne 0$. 同

* 1984年9月18日收到.

同理由 $B\in$ I 有 $B(t,q)=b_{tt_1}b_{t_1t_2}\cdots b_{t_{x-1}q}\neq 0$，$B(q,t)=b_{qq_1}b_{q_1q_2}\cdots b_{q_{y-1}t}\neq 0$．进而有 $B(t,t)=b_{tt_1}b_{t_1t_2}\cdots b_{t_{x-1}q}b_{qq_1}b_{q_1q_2}\cdots b_{q_{y-1}t}\neq 0$．于是得非零元素链

$$A(e,f)=a_{ee_1}a_{e_1e_2}\cdots a_{e_{r_1}f}a_{ff_1}a_{f_1f_2}\cdots a_{f_{\alpha-1}p}a_{pp_1}a_{p_1p_2}\cdots a_{p_{\beta-1}f}\neq 0, \qquad (\text{Ⅰ})$$

$$B(s,t)=b_{ss_1}b_{s_1s_2}\cdots b_{s_{r_2}t}b_{tt_1}b_{t_1t_2}\cdots b_{t_{x-1}q}b_{qq_1}b_{q_1q_2}\cdots b_{q_{y-1}t}\neq 0, \qquad (\text{Ⅱ})$$

若 $r_1+1+\alpha+\beta=r_2+1+x+y$，则结论显然成立．否则不妨设 $k=(r_1+\alpha+\beta)-(r_2+x+y)>0$，则由 $(r_1',r_2')=1$ 知有 u、v $(uv<0)$ 使得 $r_1'u+r_2'v=1$．进而得 $r_1'uk+r_2'vk=k$．这样一来，若在（Ⅰ）中间插入 $|u|k$ 个上述的 $A(p,p)$，在（Ⅱ）中间插入 $|v|k$ 个上述的 $B(q,q)$，则得两个等长（元素个数相等）的非零元素链 $A(e,f)$ 与 $B(s,t)$：

$$A(e,f)=a_{ee_1}a_{e_1e_2}\cdots a_{e_{r_1}f}a_{ff_1}a_{f_1f_2}\cdots a_{f_{\alpha-1}p}\overbrace{A(p,p)\cdots A(p,p)}^{|u|k\text{个}}a_{pp_1}a_{p_1p_2}\cdots a_{p_{\beta-1}f}\neq 0,$$

$$B(s,t)=b_{ss_1}b_{s_1s_2}\cdots b_{s_{r_2}t}b_{tt_1}b_{t_1t_2}\cdots b_{t_{x-1}q}\overbrace{B(q,q)\cdots B(q,q)}^{|v|k\text{个}}b_{qq_1}b_{q_1q_2}\cdots b_{q_{y-1}t}\neq 0$$

将此两等长非零元素链中对应元素相乘，即得 C 中一连接 i 与 j 之非零元素链：$c_{ii_1}=a_{ee_1}b_{ss_1}$，$c_{i_1i_2}=a_{e_1e_2}b_{s_1s_2}$，…，$c_{i_lj}=a_{p_{\beta-1}f}b_{q_{y-1}t}$．由 i、j 之任意性知 $C=A\otimes B\in$ I．充分性得证．

反之，设 $C=A\otimes B\in$ I，且不妨假定 $n\geq 2$．由 $A\in$ I 知对任意 $\alpha\in \mathrm{N}=\{1,2,\cdots,n\}$ 总有 $\beta\in\mathrm{N}$，$\beta\neq\alpha$ 使 $a_{\alpha\beta}\neq 0$ 且存在非零元素链 $A(\beta,\alpha)=a_{\beta\beta_1}a_{\beta_1\beta_2}\cdots a_{\beta_{r_1}\alpha}\neq 0$ $(r_1\geq 1)$．又由 B $\in$ I 知对任意 $s\in\mathrm{M}=\{1,2,\cdots,m\}$ 应存在非零元素链 $B(s,s)=b_{ss_1}b_{s_1s_2}\cdots b_{s_{r_2}s}\neq 0$ $(r_2\geq 1)$．现令 $c_{xy}=a_{\beta\beta_1}b_{ss_1}$，$c_{pq}=a_{\beta_{r_1}\alpha}b_{s_{r_2}s}$ 由 $C\in$ I 知有非零元素链连接 y，p：$C(y,p)=c_{yy_1}c_{y_1y_2}\cdots c_{y_rp}\neq 0$ $(r\geq 1)$．进而记 $c_{yy_1}=a_{\beta_1l_1}b_{s_1t_1}$，$c_{y_1y_2}=a_{l_1l_2}b_{t_1t_2}$，…，$c_{y_rp}=a_{l_k\beta_{r_1}}b_{t_ks_{r_2}}$．于是得 c 之非零元素链 $C(x,q)=c_{xy}C(y,p)c_{pq}=a_{\beta\beta_1}b_{ss_1}a_{\beta_1l_1}b_{s_1t_1}a_{l_1l_2}b_{t_1t_2}\cdots a_{l_k\beta_{r_1}}b_{t_ks_{r_2}}a_{\beta_{r_1}\alpha}b_{s_{r_2}s}\neq 0$．这样一来，我们便分别得到 A 之非零元素链 $A(\beta,\alpha)=a_{\beta\beta_1}a_{\beta_1l_1}a_{l_1l_2}\cdots a_{l_k\beta_{r_1}}a_{\beta_{r_1}\alpha}\neq 0$ 及B之非零元素链 $B(s,s)=b_{ss_1}b_{s_1t_1}b_{t_1t_2}\cdots b_{t_ks_{r_2}}b_{s_{r_2}s}\neq 0$，它们都有长度 $k+3$．进而得到 A 之一长度为 $k+4$ 的非零元素链 $A(\alpha,\alpha)=a_{\alpha\beta}A(\beta,\alpha)=a_{\alpha\beta}a_{\beta\beta_1}a_{\beta_1l_1}a_{l_1l_2}\cdots a_{l_k\beta_{r_1}}a_{\beta_{r_1}\alpha}\neq 0$．由 $(k+3,k+4)=1$，立得必要性．

推论1　设 $A=(a_{ij})\in \mathrm{C}^{n\times n}\cap$ I，$B=(b_{ij})\in\mathrm{C}^{m\times m}\cap$ I．若有一 $i\in\mathrm{N}=\{1,2,\cdots,n\}$ 使 $a_{ii}\neq 0$（或有一 $j\in\mathrm{M}=\{1,2,\cdots,m\}$ 使 $b_{jj}\neq 0$），则 $A\otimes B\in$ I．

证　因 $B\in$ I，故对某一 $j_0\in\mathrm{M}$ 应有 $B(j_0,j_0)=b_{j_0j_1}b_{j_1j_2}\cdots b_{j_rj_0}\neq 0$，$r\geq 1$，再注意到 $A(i,i)=a_{ii}\neq 0$，由 $(r+1,1)=1$ 即知 $A\otimes B\in$ I．

定理2　设 $A=(a_{ij})\in\mathrm{C}^{n\times n}\cap$ I，$B=(b_{ij})\in\mathrm{C}^{m\times m}\cap$ I，则 $A\otimes B\in$ I 当且仅当存在正整数 r_1,r_2 使 $(r_1,r_2)=1$ 且 $|A|^{r_1}$ 与 $|B|^{r_2}$ 之对角元不全为零，这里 $|A|=(|a_{ij}|)_{n\times n}$，$|B|=(|b_{ij}|)_{m\times m}$．

证　设 $|A|^{r_1}$ 与 $|B|^{r_2}$ 之非零主对角元分别为 $a_{ss}^{(r_1)}$ 及 $b_{tt}^{(r_2)}$．由矩阵乘法定义知 $|A|$ 中必在 (s,s) 位置上有一个含 r_1 个非零元的非零元素链 $|A|(s,s)=|a_{ss_1}||a_{s_1s_2}|\cdots|a_{s_{r_1-1}s}|\neq 0$，而在 $|B|$ 中必在位置 (t,t) 上有一个含 r_2 个非零元的非零元素链 $|B|(t,t)=|b_{tt_1}||b_{t_1t_2}|\cdots$

$|b_{t_{r_2-1}t}|\neq 0$，且 $(r_1, r_2)=1$。由此知 $|A|$，$|B|$ 满足弱链条件，从而 $|A|\otimes|B|$ 也即 $A\otimes B\in \mathrm{I}$．充分性得证．

反之，设 $|A|(f,f)=|a_{ff_1}||a_{f_1f_2}|\cdots|_{f_{r-1}f}|\neq 0$，$|B|(k,k)=|b_{kk_1}||b_{k_1k_2}|\cdots$ $|b_{k_{r_2-1}k}|\neq 0$，$(r_1, r_2)=1$．记 $|A|^{r_1}=(a_{ij}^{(r_1)})_{n\times n}$，$|B|^{r_2}=(b_{ij}^{(r_2)})_{m\times m}$ 则由矩阵乘法知 $a_{ff}^{(r_1)}=|a_{ff_1}||a_{f_1f_2}|\cdots|a_{f_{r-1}f}|+a$，由 $A\geqslant 0$ 知 $a\geqslant 0$，故 $a_{ff}^{(r_1)}>0$．同理知 $b_{kk}^{(r_2)}>0$．

定理3 设 $A=(a_{ij})\in \mathrm{C}^{n\times n}, B=(b_{ij})\in \mathrm{C}^{m\times m}$．则 $A\otimes B\in \mathrm{I}_0$ 当且仅当 $A\in \mathrm{I}_0, B\in \mathrm{I}_0$．

证 由 $A\in \mathrm{I}_0, B\in \mathrm{I}_0$ 知（〔2〕）有置换阵 P_1，P_2 使 $P_1A\in \mathrm{I}$，$P_2B\in \mathrm{I}$ 且皆具有非零主对角元，由推论1知 $P_1A\otimes P_2B=(P_1\otimes P_2)(A\otimes B)\in \mathrm{I}$ 且具有非零主对角元．注意 $P_1\otimes P_2$ 为 mn 阶置换阵由〔2〕知 $A\otimes B\in \mathrm{I}_0$，充分性得证．

反之，若 $A\otimes B\in \mathrm{I}_0$ 而 $A\overline{\in}\mathrm{I}_0$，则有 n 阶置换阵 P，Q 使 $PAQ\overline{\in}\mathrm{I}$，于是便推出 $PAQ\otimes B=(P\otimes \mathrm{I}_2)(A\otimes B)(Q\otimes \mathrm{I}_2)\overline{\in}\mathrm{I}$，注意 $P\otimes I_2$ 与 $Q\otimes I_2$ 皆为 mn 阶置换阵，知矛盾于 $A\otimes B\in \mathrm{I}_0$．

参 考 文 献

〔1〕佟文廷，"矩阵张量积的阔盘理论"，《南京大学学报（数学专刊）》（1980），92—107．

〔2〕Brualdi R.A, Parter S.V.and Schneider H., The diagonal equivalent of a nonnegative matrix to a stochastic matrix , J.Math.Anal.Appl.16(1966) ,31—50.

Representations of the Irreducibility for Tensor Product of Matrices

Pang Mingxian and Sun Yuxiang

Abstract

In this paper, we have given two epuivalent representations of the irreducibility for tensor product of matrices and a sufficiesnt condition, proved sufficient and necessary condition of full irreducibility for tensor product of matrices.