值分布论中的一个极值问题*

张　在　利
（山东大学，济南）

一、引言

设$f(z)$是z面上的半纯函数，本文将采用大家熟知的R. Nevanlinna理论中的经典记号及其意义，如

$$\log^+|f(re^{i\theta})|,\ m(r,f),\ N(r,f),\ T(r,f),\ \cdots.$$

在半纯函数值分布论中Nevanlinna猜想是一个引人注目的问题．对半纯函数$f(z)$，其阶λ是有限数，置（以下总这样表示）．

$$K(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,f)+N(r,\frac{1}{f})}{T(r,f)},\ k(\lambda)=\inf_f K(f).$$

这里下确界是对f遍取所有z面上阶为λ的半纯函数而言的，则Nevanlinna猜想指出$k(\lambda)$的精确值是

$$k(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{|\sin\pi\lambda|}{q+|\sin\pi\lambda|}, & q\leqslant\lambda\leqslant q+\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{|\sin\pi\lambda|}{q+1}, & q+\dfrac{1}{2}<\lambda<q+1,\end{cases}\tag{1}$$

其中$q=[\lambda]$表示不超过λ的最大整数．

对于此问题$\lambda\leqslant1$的情况已由Edrei和Fuchs[1]完全解决，至于$\lambda>1$的情况还有待解决．Edrei和Fuchs[2]曾对$\lambda>1$给出$k(\lambda)$的下述估计：

$$k(\lambda)\geqslant\frac{|\sin\pi\lambda|}{(2.2)\lambda+\frac{1}{2}|\sin\pi\lambda|}\tag{2}$$

1960年S. Hellerstein和J. Williamson[3]得出猜想对整函数具有负零点的情况之正确性．后来1973年J. Miles和D. F. Shea[4]改进了（2）得出：

$$k(\lambda)\geqslant(0.9)\frac{|\sin\pi\lambda|}{\lambda+1}$$

本文围绕此问题做了些探讨．

二、结论的叙述

本文将证明下述三定理：

定理1　设$f(z)$是z面上的阶为λ（$0\leqslant\lambda<+\infty$）的半纯函数，其零点和极点全在一条

* 1985年3月14日收到．

由原点出发的半射线上，且对任意的$r(>0)$有：

(2.1) $$n(r,0)\geqslant a\cdot n(r,\infty).\quad (a是常数，a>1)$$

或都有

(2.2) $$n(r,\infty)\geqslant a\cdot n(r,0).\quad (a(>1)是常数).$$

则若记$q=[\lambda]$，有：

(2.3) $$k(f)\geqslant\begin{cases}\dfrac{|\sin\pi\lambda|}{q+(1+\dfrac{1}{1+a})|\sin\pi\lambda|} & q\leqslant\lambda\leqslant q+\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{|\sin\pi\lambda|}{q+1+\dfrac{1}{1+a}|\sin\pi\lambda|} & q+\dfrac{1}{2}<\lambda\leqslant q+1\end{cases}.$$

推论 若$f(z)$是$\lambda(<+\infty)$阶整函数且仅有负零点，则

(2.4) $$k(f)\geqslant\begin{cases}\dfrac{|\sin\pi\lambda|}{q+|\sin\pi\lambda|}, & q\leqslant\lambda\leqslant q+\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{|\sin\pi\lambda|}{q+1}, & q+\dfrac{1}{2}<\lambda\leqslant q+1\end{cases}$$

定理 2 i) 若$f(z)$为$\lambda(1>\lambda<+\infty)$阶半纯函数，仅有正极点和负零点，且两者关于原点对称，则(2.4)成立；

ii) 若$f(z)$为$\lambda(1<\lambda<+\infty)$阶整函数，仅有实零点且关于原点对称，则(2.4)成立.

定理2 i)中函数的其它性质可参看[5]、[6].

定理 3 设$f(z)$是阶及下阶分别为$\lambda(<+\infty$，且不为整数)和μ的半纯函数，其极点和零点分别在正、负实轴上，则对任何ρ，$\mu\leqslant\rho\leqslant\lambda$，有：

(2.5) $$\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,\frac{1}{f})}{T(r,f)}\leqslant\begin{cases}\dfrac{2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}{K-1+2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}, & K-1\leqslant\rho\leqslant K,\\ \dfrac{2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}{K+1}, & K<\rho\leqslant K+1,\end{cases}$$

其中$K=2[(q+1)/2]$，$q=[\lambda]$.

三、几个引理

引理 1 设$g(z)$是格数为q的仅有正极点和负零点的半纯函数，其形如：

$$g(z)=\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\equiv\frac{\prod_\mu E(\frac{-z}{a_\mu},\ q)}{\prod_\nu E(\frac{z}{b_\nu},\ q)}\quad (a_\mu,\ b_\nu 全为正数),$$

且$n(r,0)\geqslant a\cdot n(r,\infty)$对任易$r>0$成立，其中$a\geqslant1$为常数. 若置：

$$C(r)=\{\theta\in[0,\pi]:\ \log|g(re^{i\theta})|\geqslant0\},$$

则存在$\alpha_1=\alpha_1(r)$，$\alpha_2=\alpha_2(r)$，…，$\alpha_{q+1}=\alpha_{q+1}(r)$，

(3.1) $$\frac{2j-1}{2(q+1)}\pi<\alpha_j<\frac{2j-1}{2q}\pi,\ j=1,2,\cdots,q,\ \frac{2q+1}{2(q+1)}\pi<\alpha_{q+1}\leqslant\pi,$$

使得：

(3.2) $$C(r)=\bigcup_{i=1}^{(q+1)/2}[a_{2i-1},a_{2i}],\qquad \text{当}q\text{为奇数},$$

(3.3) $$C(r)=\bigcup_{i=0}^{q/2}[a_{2i},a_{2i+1}],\ a_0=0,\qquad \text{当}q\text{为偶数}.$$

证明 由[7]知:

$$\log|g_1(re^{i\theta})|=(-1)^q\int_0^\infty\frac{n(sr,\frac{1}{g_1})}{s^{q+1}}\frac{s\cos(q+1)\theta+\cos q\theta}{s^2+2s\cos\theta+1}ds,$$

$$\log|g_2(re^{i\theta})|=(-1)^q\int_0^\infty\frac{n(sr,\frac{1}{g_2})}{s^{q+1}}\frac{s\cos(q+1)\theta+\cos q\theta}{s^2+2s\cos\theta+1}ds.$$

由此可得 $$\log|g(re^{i\theta})|=(-1)^q\int_0^\infty\frac{n(sr,0)-n(sr,\infty)}{s^{q+1}}\frac{s\cos(q+1)\theta+\cos q\theta}{s^2+2s\cos\theta+1}ds,$$

与[3]类似地讨论可得出引理1.

引理2[3] 设$G(t)$是一个实值、连续非减的无界函数,$(t\geqslant t_0>0)$,其阶为λ,具有有限下阶μ,那么对每一有限数ρ,$(\mu\leqslant\rho\leqslant\lambda)$,都存在阶为$\rho$的第一类Pólya峰序列.

引理3[8] 设$g(z)$是一个整函数,仅有负零点且格数是q的无穷或有穷典乘积,如果

(3.4) $$K_q(t,r,\beta)=\frac{(-1)^q}{\pi}\left(\frac{r}{t}\right)^{q+1}\frac{r\sin q\beta+t\sin(q+1)\beta}{t^2+2tr\cos\beta+r^2},$$

其中 $q\geqslant0$,$|\beta|<\pi$,则

(3.5) $$\frac{1}{\pi}\int_0^\beta\log|g(re^{i\theta})|d\theta=\int_0^\infty N(t,0)\,K_q(t,r,\beta)dt,$$

(3.6) $$\lim_{\beta\to\pi^-}\int_0^\infty N(t,0)K_q(t,r,\beta)dt=N(t,0),$$

(3.7) $$(-1)^qK_q(t,r,\theta)\geqslant0,\ \text{当}\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{q+1},$$

且

(3.8) $$\int_0^\infty s^\rho K_q(s,1,\beta)ds=\frac{\sin\beta\rho}{\pi\rho}\quad(q<\rho<q+1,\ |\beta|<\pi).$$

引理4[3] 设$K_q(t,r,a)$由(3.4)确定$(|a|<\pi)$,且$K_q(t,r,\pi)=0$.置

(3.9) $$H_q(t,r,a_1,a_2,\cdots,a_{q+1})=\sum_{j=0}^{[(q+1)/2]}\{K_q(t,r,a_{2j+1})-K_q(t,r,a_{2j})\}.$$

如果

(3.10) i) $\frac{2j-1}{2(q+1)}\pi\leqslant a_j\leqslant\frac{2j-1}{2q}\pi$; $j=1,2,\cdots,q$,

ii) $\frac{2q+1}{2(q+1)}\pi\leqslant a_{q+1}\leqslant\pi$, iii) $a_0=a_{q+2}=0$,

则对任意的$r(>0)$,$t(>0)$有

(3.11) $$(-1)^qH_q(t,r,a_1,\cdots,a_{q+1})\geqslant0.$$

引理5 设$f(z)$为格数是$q(>0)$的,零点和极点全在负实轴上的半纯函数,且可重表为:

$$f(z)=\frac{\prod\limits_{\nu}E\left(-\frac{z}{a_\mu},q\right)}{\prod\limits_{\nu}E\left(-\frac{z}{b_\nu},q\right)}$$

同时$n(r,f)\geqslant a\,n(r,\infty)$ （$a(>1)$是常数），则有$r^q=o\,T(r,f))$.

证明 由Valiron[7,P237]有

$$\log|f(re^{i\theta})|=(-1)^q r^{q+1}\int_0^{\infty}\frac{n(x,0)-n(x,\infty)}{x^{q+1}}\,\frac{x\cos(q+1)\theta+r\cos q\theta}{x^2+2xr\cos\theta+r^2}\,dx.$$

先设q为奇数，考查由下面的式子决定的$[\frac{q}{4}]+1$个区间：

$$\frac{2k\pi}{q+1}+\frac{1}{4(q+1)}\leqslant\theta\leqslant\frac{2k\pi}{q+1}+\frac{\pi}{3(q+1)},\quad k=0,1,2,\cdots,\ [\frac{q}{4}],$$

其总长大于$\frac{\pi q}{48(q+1)}$，且于每一个区间上$\cos(q+1)\theta\geqslant\frac{1}{2}$。同时

$$2k\pi+\frac{\pi}{4}\frac{q-8k}{q+1}\leqslant q\theta<2k\pi+\frac{\pi}{3}\qquad(k=0,1,2,\cdots,[\frac{q}{4}]),$$

由于$q-8k\geqslant -q$，知$\cos q\theta\geqslant\frac{1}{2}$. 所以

$$\log\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}\geqslant\frac{r^{q+1}}{2}\int_0^{\infty}\frac{n(x,0)-n(x,\infty)}{x^{q+1}}\,\frac{x+r}{x^2+r^2+2xr}\,dx\ .$$

由于这些区间的总长大于$\frac{\pi}{100}$,可知

$$m(r,\frac{1}{f})\geqslant\frac{r^{q+1}}{400}\int_0^{\infty}\frac{n(x,0)-n(x,\infty)}{x^{q+1}}\,\frac{dx}{x+r}\ . \tag{3.12}$$

当q为正偶数时，考查$[\frac{q-2}{6}]+1$个区间，它们由下列式子确定：

$$\frac{2\pi k}{q+1}+\frac{\pi}{q+1}\leqslant\theta\leqslant\frac{2k\pi}{q+1}+\frac{5\pi}{4(q+1)},\ (k=0,1,2,\cdots,[\frac{q-2}{6}]),$$

其总长大于$\frac{\pi}{100}$. 在这些区间上，

$$2k\pi+\pi\frac{q-2k}{q+1}\leqslant q\theta<2k\pi+\frac{5}{4}\pi.$$

由于 $k\leqslant[(q-2)/6]$，知$\frac{q-2k}{q+1}\geqslant\frac{2}{3}$. 故有

$$-\cos q\theta\geqslant\frac{1}{2},\quad -\cos(q+1)\geqslant\frac{1}{2}\ .$$

下面完全用q为偶数时的证明也可得（3.12）. 故无论q为奇数偶数总有

$$c\cdot r^{q+1}\int_0^{\infty}\frac{n(x,0)-n(x,\infty)}{x^{q+1}}\,\frac{dx}{x+r}\leqslant T(r,f),$$

其中c为适当的正常数. 由[9,PP51—52]知$\int_0^{\infty}\frac{n(x,0)}{x^{q+1}}dx=+\infty$， 这是因为由条件$n(r,0)\geqslant a\,n(r,\infty)$,知$\prod\limits_{\mu}E(\frac{-z}{a_\mu},q)$是格数为$q$的典乘积.

由 $c\cdot r^{q+1}\int_0^{r}\frac{n(x,0)-n(x,\infty)}{x^{q+1}}\,\frac{dx}{2r}\leqslant T(r,f)$， 而

$n(x,0)-n(x,\infty)\geqslant(1-\frac{1}{a})\,n(x,0)$，故 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{r^q}{T(r,f)}=0$. 引理5得证.

引理6[6] 设$f(z)$为z平面上的半纯函数，其阶及下阶分别为λ及μ，$\lambda<+\infty$且λ不为

整数．$f(z)$ 的极点与零点分别在正、负实轴上，且关于原点对称，则对任何ρ，$\mu\leqslant\rho\leqslant\lambda$，我们有

$$(3.13)\quad \varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,0)}{T(r,f)}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,\infty)}{T(r,f)}\leqslant\begin{cases}\dfrac{|\cos(\frac{\pi}{2})\rho)|}{2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|+K-1}, & K-1\leqslant\rho\leqslant K,\\ \dfrac{|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}{K+1}, & K<\rho\leqslant K+1,\end{cases}$$

其中 $K=2\cdot[\frac{q+1}{2}]$，$q=[\lambda]$．

四、定理 1 的证明

由于对任意的θ有：

$$T(r,f(ze^{i\theta}))=T(r,f(z)),\quad N(r,f(ze^{i\theta}))=N(r,f(z)).$$

故无妨设此半直线为负实轴，由于λ为整数时结论不证自明，故下设λ为非整数．我们仅对于$n(r,0)\geqslant a\cdot n(r,\infty)$的情况证明结论．另一种情况类似可证．由半纯函数分解定理，可设

$$f(z)=e^{Q(z)}\cdot z^{k}\cdot\frac{\prod_{\nu}E(\frac{-z}{a_\mu},q)}{\prod_{\nu}E(\frac{z}{-b_\nu},q)}\equiv e^{Q(z)}z^{k}\cdot g(z),$$

其中$Q(z)$为多项式，其次数不超过λ，由引理 5，我们只须考虑函数$g(z)$即可．

由引理 1 知

$$(4.1)\qquad T(r,g)=N(r,g)+m(r,g)=N(r,g)+\frac{1}{\pi}\int_{C(r)}\log|g(re^{i\theta})|d\theta$$

由Edrei 和Fuchs[1]的引理知

$$(4.2)\qquad \log|g(re^{i\theta})|\leqslant\log|\prod_{a_\mu\leq R}E(-\frac{z}{a_\mu},q)|-\log|\prod_{b_\nu\leq R}E(\frac{z}{-b_\nu},q)|$$
$$+O(r^{q})+14\{\frac{r}{R}\}^{q+1}T(2R,g),$$

其中 $\qquad 0<r=|z|\leqslant\frac{R}{2}.$

由(4.1)及(4.2)知：

$$T(r,g)\leqslant N(r,f)+\int_{C(r)}\log|\prod_{a_\mu\leq R}E(-\frac{re^{i\theta}}{a_\mu},q)|d\theta$$
$$-\int_{C(r)}\log|\prod_{b_\nu\leq R}E(\frac{re^{i\theta}}{b_\nu},q)|d\theta+O(r^{q})+14(\frac{r}{R})^{q+1}T(2R,g).$$

设 $\qquad P_R(z)=\prod_{a_\mu\leq R}E(-\frac{z}{a_\mu},q),\quad Q_R=\prod_{b_\nu\leq R}E(-\frac{z}{b_\nu},q),$

$$N_R(t,0)=N(t,\frac{1}{P_R}),\quad N_R(t,\infty)=N(t,\frac{1}{Q_R}),$$

则由引理 3 及(3.1)，(3.2)，(3.3)和(3.9)中H_q的定义有

$$\frac{1}{\pi}\int_{C(r)}\log|\frac{P_R(re^{i\theta})}{Q_R(re^{i\theta})}|\cdot d\theta=\chi(r)[N_R(r,0)-N_R(r,\infty)]+$$

$$+(-1)^q\int_0^{\infty}[N_R(t,0)-N_R(t,\infty)]H_q(t,r,a_1,\cdots,a_{q+1})\,dt,$$

其中 $\chi(r)=\begin{cases}1 & 当\ a_{q+1}=\pi,\\ 0 & 当\ a_{q+1}<\pi,\end{cases}$ 且$a_i=a_i(r)\quad i=1,2,\cdots,q+1$.

又此时

$$N_R(t,0)=\begin{cases}N(t,0)=N(t,\frac{1}{g}) & 当 t\leqslant R,\\ N(R,0)+n(R,0)\cdot\log\frac{t}{R} & 当 t>R,\end{cases}$$

$$N_R(t,\infty)=\begin{cases}N(t,\infty)=N(t,g) & 当 t\leqslant R,\\ N(R,\infty)+n(R,\infty)\log\frac{t}{R} & 当 t>R,\end{cases}$$

由此知 $T(r,g)\geqslant N(r,g)+\chi(r)[N(r,0)-N(r,\infty)]+$

$$+(-1)^q\int_0^R N(t,0)H_q(t,r,a_1,\cdots,a_{q+1})\,dt+O(r^q)+A(\frac{r}{R})^{q+1}T(2R,g),$$

其中$A(>0)$是一绝对常数.

现设 $\sigma_1=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{N(t,\infty)}{T(t,g)}$, $\sigma_2=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{N(t,0)-N(t,\infty)}{T(r,g)}$, $\sigma=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{N(t,0)+N(t,\infty)}{T(t,g)}$,

则任给$\varepsilon>0$, 存在t_0, 使$t>t_0$ 时 $N(t,\infty)<(\sigma_1+\varepsilon)T(t,g)$, $N(t,0)-N(t,\infty)<(\sigma_2+\varepsilon)T(t,g)$, 且有

(4.3) $$\sigma\geqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{(a+1)N(t,\infty)}{T(t,g)}=(a+1)\sigma_1,$$

(4.4) $$\sigma\geqslant\sigma_2.$$

以下的证明同[3]中定理1的证明,可以得出,如果$q<\rho\leqslant q+\frac{1}{2}$, 则

(4.5) $$1\leqslant\sigma_1+\sigma_2\{\frac{q}{|\sin\pi\lambda|}+1\},$$

当$q+\frac{1}{2}<\lambda<q+1$时

(4.6) $$1\leqslant\sigma_1+\sigma_2\{\frac{q+1}{|\sin\pi\lambda|}\}.$$

结合(4.3)(4.4)(4.5), (4.6)知定理1得证.

用类似的方法可以证明若存在a及β使 $1<a<\beta<+\infty$. 且 $\beta n(r,\infty)\geqslant n(r,0)\geqslant\geqslant a n(r,\infty)$, 则(4.4)可用更好的结果代替, 即

(4.7) $$\sigma_2\leqslant(\beta-1)\sigma_1\leqslant\frac{\beta-1}{1+a}\sigma.$$

这时(4.5), (4.6)仍成立, 结合(4.3), (4.5), (4.6), (4.7)知:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{N(t,g)+N(t,\frac{1}{g})}{T(t,g)}\geqslant D(\lambda),\quad D(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{(1+a)|\sin\pi\lambda|}{(\beta-1)q+\beta|\sin\pi\lambda|} & q<\lambda\leqslant q+\frac{1}{2},\\[2ex] \dfrac{(1+a)|\sin\pi\lambda|}{(\beta-1)(q-1)+|\sin\pi\lambda|} & q+\frac{1}{2}<\lambda<q+1.\end{cases}$$

推论的证明 由于$f(z)$为整函数, 故$N(r,f)=0$. 从而知a可取得任意大, 从而由定理1知(2.4)成立.

五、定理 2 的证明

i) 设$f(z)$可以重新表示为 $f(z)=e^{P(z)}\cdot\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$，其中$f_1(z)$，$f_2(z)$分别为由$f(z)$的零点和极点造成的典乘积．由条件知 $f_2(z)=f_1(-z)$，且$f_1(z)$仅有负零点．当$f(z)$的阶为整数时，结论不证自明．下设$f(z)$的阶为非整数，从而$f_1(z)$的阶等于$f(z)$的阶．由于$P(z)$为次数不过λ的多项式，故可令 $Q(z)=e^{P(z)}\cdot f_1(z)$，其右边为典乘积．由引理 5 知 $T(r\cdot e^{P(z)})=o(T(r,f_1))$， $r\to\infty$． 而由 $T(r,f)\leqslant T(r\cdot e^{P(z)})+2T(r,f_1)=$
$=2T(r,f_1)(1+o(1))$，故

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,\frac{1}{f})+N(r,f)}{T(r,f)}\geqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{2N(r,\frac{1}{f_1})}{2T(r,f_1)(1+o(1))}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,\frac{1}{f_1})}{T(r,f_1)}.$$

由定理 1 的推论知(2.4)成立．则i)得证．

用类似的方法可证明ii)也成立．从而定理 2 得证．

六、定理 3 的证明

设 $\dfrac{f(z)}{f(-z)}=g(z)$，则$g(z)$是零点和极点分别在负、正实轴上的半纯函数且其零点和极点点关于原点对称，易见$g(z)$的阶与$f(z)$的阶相等．由于此时

(6.1) $$T(r,g)\leqslant 2T(r,f)$$

可知$g(z)$的下阶$\mu_1\leqslant f(z)$的下阶μ．

对于$g(z)$，因满足引理 6 的条件，故对任何ρ，$\mu_1\leqslant\rho\leqslant\lambda$，有

(6.2) $$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,\frac{1}{g})}{T(r,g)}=\lim_{r\to\infty}\frac{N(r\ g)}{T(r,g)}\leqslant\begin{cases}\dfrac{|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}{K-1+2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|} & K-1\leqslant\rho\leqslant K,\\ \dfrac{|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}{K+1} & K<\rho\leqslant K+1,)\end{cases}$$

其中$K=2[(q+1)/2]$，$q=[\lambda]$．

由(6.1)、(6.2)及$\mu_1\leqslant\mu$知，对任何ρ，如果$\mu_1\leqslant\mu\leqslant\rho\leqslant\lambda$则恒有

(6.3) $$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,\frac{1}{f})}{T(r,f)}\leqslant\lim_{r\to\infty}\frac{2N(r,g)}{T(r,g)}\leqslant\begin{cases}\dfrac{2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}{K-1+2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|} & K-1\leqslant\rho\leqslant K,\\ \dfrac{2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}{K+1} & K<\rho\leqslant K+1.,\end{cases}$$

其中 $K=2[(q+1)/2]$，$q=[\lambda]$．(6.3)就是所要证的(2.5)，从而定理 3 得证．

易见定理 3 包含引理 6 在其中．

本文的完成得到莫叶教授的支持，谨表谢意．

参 考 文 献

[1] A. Edrei and W. H. J. Fuchs, Duke Math. J., 27(1960), 233—250.

[2] A. Edrei and W. H. J. Fuchs, Trans. Ames. Math. Soc., 93(1959), 292—328.

[3] S. Hellerstein and J. Williamson, J. Analyse Math., 22(1969), 233—267.

[4] J. Miles and D. F. Shea, Quart. J. Math. Oxford. (2), 24(1973), 377—383.

[5] O. Teichmüller, Deutsch Math., 4(1939), 163—90.

[6] J. Williamson, Paci. J. Math., 42(1972), 795—810.

[7] G. Valiron, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 5(3)(1913), 117—257.

[8] D. F. Shea, Trans. Amer. Math. Soc., 124(1966), 201—227.

[9] G. Valiron, Lectures on the General Theory of Integral Functions, Toulouse (1923).

An extreme problem in value distribution theory

Zhang Zaili

(Shandong University)

Abstract

In this paper two maine theorems are proved.

Theorem 1 Assume that $f(z)$ is a meromorphic function of order λ $(<+\infty)$. The zeros and poles of $f(z)$ lie on a ray shooting from origin and for any $r>0$, $n(r,0)\geqslant a\cdot n(r,\infty)$, where $a(>1)$ is a constant. Then

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f)+N(r,\frac{1}{f})}{T(r,f)}\geqslant\begin{cases}\dfrac{|\sin\pi\lambda|}{q+(1+\frac{1}{1+a})|\sin\pi\lambda|}, & q\leqslant\lambda\leqslant q+\frac{1}{2},\\[2ex] \dfrac{|\sin\pi\lambda|}{q+1+\frac{1}{1+a}|\sin\pi\lambda|}, & q+\frac{1}{2}<\lambda\leqslant q+1,\end{cases}$$

where $q=[\lambda]$, the greatest integer not exceeding λ.

Theorem 2 If $f(z)$ is a meromorphic function of order λ $(\lambda<+\infty)$ and lower order μ, which has only negative zeros and positive poles, then, for each ρ, $\mu\leqslant\rho\leqslant\lambda$, we have

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{N(r,\frac{1}{f})+N(r,f)}{T(r,f)}\leqslant\begin{cases}\dfrac{2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}{K-1+2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}, & K-1\leqslant\rho\leqslant K,\\[2ex] \dfrac{2|\cos(\frac{\pi}{2}\rho)|}{K+1}, & K<\rho\leqslant K+1,\end{cases}$$

where $K=2[(q+1)/2]$, $q=[\lambda]$.