第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

Heisenberg群上一类左不变LPDO的局部基本解及局部可解性*

崔 尚 斌

(兰州大学数学系，兰州)

自七十年代以来，人们对Heisenberg群乃至一般幂零李群上左(右)不变微分算子的局部可解性、亚椭圆性等性质做了大量研究[1]—[2].在亚椭圆性方面，目前最好的结果是由B.Helffer和J.Nourrigat所得到的一个充分条件，这个条件在算子为齐次的情形下也是必要的[4].在局部可解性方面，文献[5]—[9]分别给出了Heisenberg群及一般幂零Lie群上用酉表示来判别的一些充分条件，文献[16]给出了幂零Lie群上一个关于齐次算子局部可解的必要条件．文献[10]—[12]构造了在生成方向上为椭圆型的右不变算子的局部基本解．所有这些结果都还没有完满地解答局部可解性与亚椭圆性问题，尤其是局部可解性问题．另外，如何把有关局部可解性的抽象结果落实到具体的算子上以得到其系数所应满足的条件也是一个需要进一步探讨的问题(在亚椭圆性方面，相应的问题解答比较明显)．

本文讨论Heisenberg群上一类具特定形式的左不变微分算子的局部可解性．我们首先建立一个保证局部基本解存在的一般结果，并给出了局部基本解借助于酉表示的表达式，然后将这个结果运用于具体的左不变LPDO．

§1 几个引理

关于Heisenberg群H_n，其上左不变向量场X_j，$Y_j(j=1,2,\cdots,n)$和T，其上的伸缩群(dilation Group)$\{\delta_r|r>0\}$，H_n上函数、分布的卷积以及H_n的酉表示$\Pi_\lambda(\lambda\in\mathbf{R}^*=\mathbf{R}-\{0\})$等概念请参看文献[1]—[3]．文献[2]对一般幂零Lie群的酉表示理论有一个简明清晰的阐述．但[2]对H_n的定义与[1]略有差异．我们将如通常采用[1]对H_n的定义及其它相应概念，而运用[2]的结论．

对每个$\lambda\in\mathbf{R}^*$，令V_λ为$L^2(\mathbf{R}^n)$上如下定义的酉算子．

$$(V_\lambda f)(\xi)=2^{-n/2}|\lambda|^{-n/4}f(\frac{1}{2}|\lambda|^{-1/2}\xi),\quad \forall f(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n).$$

再令$\widetilde{\Pi}_\lambda=V_\lambda\Pi_\lambda V_\lambda^{-1}$(即对每个$f\in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\widetilde{\Pi}_\lambda(f)=V_\lambda\Pi_\lambda(f)V_\lambda^{-1}$)．$\widetilde{\Pi}_\lambda$即是[2]引理2.13所引出的酉表示，因而满足[2]定理2.7的全部结论，特别使Plancherel恒等式成立．此外，

* 1987年10月13日收到．

$$\widetilde{\Pi}_\lambda\circ\delta_r=\widetilde{\Pi}_{\delta_r\lambda},\quad \forall\lambda\in\mathbf{R}^*,\quad \forall r>0$$

其中$\delta_r\lambda=r^2\lambda$．因此对任意$\lambda\in\mathbf{R}^*$，$\widetilde{\Pi}_\lambda$可以用$\Pi_1$和$\Pi_{-1}$(注意$\widetilde{\Pi}_{\pm1}=\Pi_{\pm1}$)表示为

$$\widetilde{\Pi}_\lambda=\Pi_{\operatorname{sgn}\lambda}\circ\delta_{|\lambda|^{1/2}}$$

由此可算出$\widetilde{\Pi}_\lambda$的具体表达式为：

$$(\widetilde{\Pi}_\lambda(x,y,t)f)(\xi)=e^{i\lambda(t+2|\lambda|^{1/2}y\xi-2xy)}f(\xi-2|\lambda|^{1/2}x),$$

$$\forall(x,y,t)\in\mathbf{H}_n,\quad \forall f(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n),\quad \forall\lambda\in\mathbf{R}^*$$

以及由它所导出的左不变微分算子代数的表示(仍记作$\widetilde{\Pi}_\lambda$而不用记号$\mathrm{d}\widetilde{\Pi}_\lambda$)对生成元作用的表达式

$$\widetilde{\Pi}_\lambda(\mathbf{X}_j)=-2|\lambda|^{1/2}\frac{\partial}{\partial\xi_j},\quad \widetilde{\Pi}_\lambda(\mathbf{Y}_j)=2i(\operatorname{sgn}\lambda)|\lambda|^{1/2}\xi_j,\quad (j=1,2,\cdots,n);\ \widetilde{\Pi}_\lambda(\mathbf{T})=i\lambda.$$

由$\widetilde{\Pi}_\lambda$诱导出的卷积代数$L^1(\mathbf{H}_n)$的表示(均用$\widetilde{\Pi}_\lambda$记之)可类似算出，在此从略．只是提到公式

$$\operatorname{tr}\widetilde{\Pi}_\lambda(\varphi)=(2\pi)^{n+1}|\lambda|^{-n}\hat{\varphi}(0,0,\lambda),\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{H}_n),\quad \forall\lambda\in\mathbf{R}^* \tag{1.1}$$

仍然成立．其中$\hat{\varphi}$表示$\varphi(x,y,t)$关于变量t的部分逆Fourier变换：

$$\hat{\varphi}(x,y,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y,t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t\ .$$

定义1　设$\{B_\lambda|\lambda\in\Gamma\}$是$L^2(\mathbf{R}^n)$上一族有界线性算子，$\Gamma$是$\mathbf{R}$的可测子集．如果对任意$f$, $g\in L^2(\mathbf{R}^n)$，函数$\lambda\mapsto(B_\lambda f,g)$是$\Gamma$上的可测函数，则称$B_\lambda$可测地依赖于$\lambda\in\Gamma$．

关于Hilbert-Schmidt 算子的概念请参看[17]．当B是Hilbert-Schmidt 算子时，用$\|B\|_{\mathrm{HS}}$表示其Hilbert-Schmidt 范数：$\|B\|_{\mathrm{HS}}^2=\operatorname{tr}(B^*B)$．

引理1　设$\{B_\lambda|\lambda\in\Gamma\}$是$L^2(\mathbf{R}^n)$上的一族Hilbert-Schmidt 算子，$\Gamma$是$\mathbf{R}^*$的可测子集．如果$B_\lambda$可测地依赖于$\lambda\in\Gamma$，则对任意$u\in L^1(\mathbf{H}_n)\cap L^2(\mathbf{H}_n)$，函数$\lambda\mapsto\operatorname{tr}(\widetilde{\Pi}_\lambda(u)B_\lambda)$是$\Gamma$上的可测函数．

证　对任意$u\in L^1(\mathbf{H}_n)\cap L^2(\mathbf{H}_n)$，由[2]定理2.7知对几乎所有的$\lambda\in\Gamma$，$\widetilde{\Pi}_\lambda(u)$是Hilbert-Schmidt算子，因而对几乎所有的$\lambda\in\Gamma$，$\operatorname{tr}(\widetilde{\Pi}_\lambda(u)B_\lambda)$有定义．定义函数$u^{\#}$如下：

$$u^{\#}(\sigma)=\overline{u(\sigma^{-1})},\qquad \forall\sigma\in\mathbf{H}_n$$

则$u^{\#}\in L^1(\mathbf{H}_n)\cap L^2(\mathbf{H}_n)$，从而由[2]定理2.7知对任意$f,g\in L^2(\mathbf{R}^n)$，$(\widetilde{\Pi}_\lambda(u^{\#})f,g)$是$\lambda$的连续函数($\lambda\in\mathbf{R}^*$)，自然可测．今取$L^2(\mathbf{R}^n)$的一组完备的规范正交基底$\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$．则对任意$f,g\in L^2(\mathbf{R}^n)$，成立收敛的和式

$$(B_\lambda f,\widetilde{\Pi}_\lambda(u^{\#})g)=\sum_{j=1}^\infty(B_\lambda f,\varphi_j)\overline{(\widetilde{\Pi}_\lambda(u^{\#})g,\varphi_j)},\quad \forall\lambda\in\Gamma\ .$$

此式右端每一项是λ的可测函数，故$(B_\lambda f,\widetilde{\Pi}_\lambda(u^{\#})g)$是$\lambda$的可测函数．再由收敛的和式

$$\operatorname{tr}(\widetilde{\Pi}_\lambda(u)B_\lambda)=\sum_{j=1}^\infty(\widetilde{\Pi}_\lambda(u)B_\lambda\varphi_j,\varphi_j)$$

$$=\sum_{j=1}^\infty(B_\lambda\varphi_j,\widetilde{\Pi}_\lambda(u)^*\varphi_j)=\sum_{j=1}^\infty(B_\lambda\varphi_j,\widetilde{\Pi}_\lambda(u^{\#})\varphi_j)$$

即知函数$\lambda\mapsto\operatorname{tr}(\widetilde{\Pi}_\lambda(u)B_\lambda)$是$\Gamma$上的可测函数．

引理2　在引理1的假定下，如果还存在常数$s\in\mathbf{R}$和$C\geqslant0$, 使

$$\|B_\lambda\|_{\mathrm{HS}}\leqslant C|\lambda|^s,\quad \lambda\ a.e.\Gamma\ .$$

则对任意在$\lambda=0$附近恒取1值的函数$\psi(\lambda)\in C_0^{\infty}(-\infty, +\infty)$和任意满足$r<-s-\frac{1}{2}(n+1)$的实数$r\in\mathbf{R}$，存在唯一的函数$v\in L^2(\mathrm{H}_n)$，使

$$\langle v,u\rangle\equiv\int_{\mathrm{H}_n}v(\sigma)u(\sigma)\mathrm{d}\sigma=(2\pi)^{-(n+1)}\int_{\Gamma}(1-\psi(\lambda))|\lambda|^r\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)B_\lambda)\mathrm{d}\mu$$

$$\forall u\in L^2(\mathrm{H}_n)\cap L^1(\mathrm{H}_n) \qquad (1.2)$$

其中$\mathrm{d}\mu=2^n|\lambda|^n\mathrm{d}\lambda$为$\mathrm{H}_n$的Plancherel测度．

证　由关于Hilbert-Schmidt内积$(A,B)=$（AB^*）（A, B为Hilbert-Schmidt算子）的Cauchy-Schwartz不等式$|(A,B)|\leqslant\|A\|_{\mathrm{HS}}\|B\|_{\mathrm{HS}}$得

$$|\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)B_\lambda)|\leqslant\|\widetilde{\prod}_\lambda(u)\|_{\mathrm{HS}}\|B_\lambda^*\|_{\mathrm{HS}}=\|B_\lambda\|_{\mathrm{HS}}\|\widetilde{\prod}_\lambda(u)\|_{\mathrm{HS}}\leqslant C|\lambda|^s\|\widetilde{\prod}_\lambda(u)\|_{\mathrm{HS}}$$

$$\forall u\in L^1(\mathrm{H}_n)\cap L^2(\mathrm{H}_n).$$

故

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\int_{\Gamma}|1-\psi(\lambda)||\lambda|^r|\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)B_\lambda)|\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}C\int_{\Gamma}|1-\psi(\lambda)||\lambda|^{r+s+\frac{n}{2}}\|\widetilde{\prod}_\lambda(u)\|_{\mathrm{HS}}|\lambda|^{n/2}\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}C\left(\int_{\Gamma}|1-\psi(\lambda)|^2|\lambda|^{2r+2s+n}\mathrm{d}\lambda\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbf{R}^*}\|\widetilde{\prod}_\lambda(u)\|^2_{\mathrm{HS}}\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C'\|u\|^2_{L^2(\mathrm{H}_n)}, \qquad \forall u\in L^1(\mathrm{H}_n)\cap L^2(\mathrm{H}_n)$$

其中用到Plancherel恒等式$\left(\int_{\mathbf{R}^*}\|\widetilde{\prod}_\lambda(u)\|^2_{\mathrm{HS}}\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}=(2\pi)^{+(n+1)}\|u\|^2_{L^2}$．

因为$L^1(H_n)\cap L^2(\mathrm{H}_n)$在$L^2(\mathbf{R}^n)$中稠密，所以按

$$V(u)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\int_{\Gamma}(1-\psi(\lambda))|\lambda|^r\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)B_\lambda)\mathrm{d}\mu,\quad \forall u\in L^1(\mathrm{H}_n)\cap L^2(\mathrm{H}_n)$$

定义了$L^2(\mathrm{H}_n)$上唯一的连续线性泛函V．根据Riesz表现定理，存在唯一的$v\in L^2(\mathrm{H}_n)$，使

$$V(u)=\langle v,u\rangle,\quad \forall u\in L^1(\mathrm{H}_n)\cap L^2(\mathrm{H}_n).$$

对$j=1,2,\cdots,n$，记$\mathrm{X}_{n+j}=\mathrm{Y}_j$，再记$\mathbf{Z}_{2n}=\{1,2,\cdots,2n\}$，$\mathscr{A}_0=\{\mathrm{I}\}$（I表示$\mathscr{S}'(\mathrm{H}_n)$上的恒等算子），$\mathscr{A}_m=\{\mathrm{I}\}\cup\{\mathrm{X}_{j_1}\mathrm{X}_{j_2}\cdots\mathrm{X}_{j_k}|j_1,j_2,\cdots,j_k\in\mathbf{Z}_{2n},1\leqslant k\leqslant m\}$，$m=1,2,\cdots$．对$m\in\mathbf{Z}_+$，我们用$\mathscr{W}^m(\mathrm{H}_n)$表示满足下列条件的缓增分布$u\in\mathscr{S}'(\mathrm{H}_n)$组成的Hilbert空间：对任意$L\in\mathscr{A}_m$有$Lu\in L^2(\mathrm{H}_n)$．$\mathscr{W}^m(\mathrm{H}_n)$与[1]中的空间$\mathrm{S}^2_m$一致．$\mathscr{W}^m(\mathrm{H}_n)$的内积为

$$(u,v)_{\mathrm{W}^m}=\sum_{L\in\mathscr{A}_m}(Lu,Lv),\quad \forall u,v\in\mathrm{W}^m.$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示$L^2(\mathrm{H}_n)$的内积．

引理 3　设$m\in\mathbf{Z}_+$．在引理1的假定下，如果对$\mathbf{R}^n$上任意形如$P=\sum_{|\alpha+\beta|\leq m}a_{\alpha\beta}\xi^\alpha D_\xi^\beta$（$a_{\alpha\beta}$是复常数，$\alpha,\beta$是$\mathbf{Z}_+^n$中的重指标）的算子$P$，复合算子$P\circ B_\lambda$是$L^2(\mathbf{R}^n)$上的Hilbert-Schmidt算子，且存在与$P$无关的常数$s\in\mathbf{R}$（但与$m$有关）和　有关的常数$C_P\geqslant0$，使

$$\|P\circ B_\lambda\|_{\mathrm{HS}}\leqslant C_P|\lambda|^s,\quad \lambda\ a.e.\ \Gamma.$$

则对任意在$\lambda=0$附近恒取1值的函数$\psi(\lambda)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$和任意满足$r<-\frac{m}{2}-s-\frac{1}{2}(n+1)$的实数$r$，　由(1.2)所确定的函数$v\in\mathrm{W}^m(\mathrm{H}_n)$．

证　我们用$|L|$表示左不变偏微分算子L的阶数．由于当$L\in\mathscr{A}_m$时，$\prod_{\pm1}(L)$是形如$\sum_{|\alpha+\beta|\leq m}a_{\alpha\beta}\xi^\alpha D_\xi^\beta$的算子，并且$r+\frac{1}{2}|L|\leqslant r+\frac{m}{2}<-s-\frac{1}{2}(n+1)$，所以由引理2知对每个

$L\in\mathscr{A}_m$，存在$v_L\in L^2(\mathrm{H}_n)$使

$$\langle v_L, u\rangle=(2\pi)^{-(n+1)}\int_\Gamma(1-\psi(\lambda))|\lambda|^{r+\frac{1}{2}|L|}\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)\prod_{\mathrm{sgn}\,\lambda}(L)B_\lambda)\mathrm{d}\mu,$$
$$\forall u\in L^1(\mathrm{H}_n)\cap L^2(\mathrm{H}_n).$$

于是由

$$\langle Lv,u\rangle=\langle v,L'u\rangle=(\frac{1}{2\pi})^{n+1}\int_\Gamma(1-\psi(\lambda))|\lambda|^r\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(L'uB_\lambda)\mathrm{d}\mu$$
$$=(\frac{1}{2\pi})^{n+1}\int_\Gamma(1-\psi(\lambda))|\lambda|^r\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)\widetilde{\prod}_\lambda(L)B_\lambda)\mathrm{d}\mu$$
$$=(\frac{1}{2\pi})^{n+1}\int_\Gamma(1-\psi(\lambda))|\lambda|^{r+\frac{1}{2}|L|}\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)\prod_{\mathrm{sgn}\,\lambda}(L)B_\lambda)\mathrm{d}\mu$$
$$=\langle v_L,u\rangle\quad,\quad\forall u\in\mathscr{S}(\mathrm{H}_n)$$

知$Lv=v_L\in L^2(\mathrm{H}_n)$，因此$v\in\mathrm{W}^m(\mathrm{H}_n)$.

引理 4 设$\omega(t)\in\mathscr{S}(-\infty,+\infty)$. 则对任意$t_0\in(-\infty,+\infty)$，存在$t_0$的邻域$\Omega_0=(t_0-\delta,t_0+\delta)$ $(\delta>0)$，使对任意$f(t)\in E'(-\infty,+\infty)$，存在$h(t)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$使函数$g(t)=f(t)+h(t)$在$\Omega_0$上满足卷积方程

$$g(t)-\frac{1}{2\pi}\omega(t)*g(t)=f(t)\qquad(1.3)$$

证 取$\theta(t)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$使在$t_0$点的某邻域$\Omega_0=(t_0-\delta,t_0+\delta)(\delta>0)$上恒取1值，

且使
$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\theta(t)|^2\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega(t)|^2\mathrm{d}t<1.$$

考察方程

$$g(t)-\frac{1}{2\pi}\theta(t)[\omega(t)*g(t)]=f(t)\qquad(1.4)$$

定义算子$A:L^2(-\infty,+\infty)\to L^2(-\infty,+\infty)$如下：

$$(Ag)(t)=\frac{1}{2\pi}\theta(t)[\omega(t)*g(t)],\quad\forall g\in L^2(-\infty,+\infty)$$

显然A是$L^2(-\infty,+\infty)$上的有界线性算子，且

$$\|A\|^2\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\frac{1}{2\pi}\theta(t)\omega(t-s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t<1,$$

因此算子$I-A$（I表示恒等算子）有逆算子. 故对任意$f(t)\in L^2(-\infty,+\infty)$，(1.4)有唯一的解$g(t)=(I-A)^{-1}f(t)\in L^2(-\infty,+\infty)$. 因算子$A$的值域含于$C_0^\infty(-\infty,+\infty)$，所以$g(t)$是$f(t)$与$C_0^\infty$函数的和.

今对任意$f(t)\in E'(-\infty,+\infty)$，因为函数$\frac{1}{2\pi}\theta(t)[\omega(t)*f(t)]\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$，所以应用已得结论知存在唯一的函数$h(t)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$，使

$$h(t)-\frac{1}{2\pi}\theta(t)[\omega(t)*h(t)]=\frac{1}{2\pi}\theta(t)[\omega(t)*f(t)]$$

令$g(t)=f(t)+h(t)$，则易见$g(t)$满足方程(1.4). 由于在Ω_0上(1.4)与(1.3)一致，所以$g(t)$在Ω_0上满足方程(1.3).

§2 一个一般结果

我们用$\varphi_\alpha(\xi)$表示定义于$\mathbf{R}^n$上的指标为$\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$的Hermite函数[13]. 根据B.Simon的论证，

任意缓增分布$f(\xi)\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$可以唯一地表示成在$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$中收敛的和式$f(\xi)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbf{Z}_+^n}\overline{a_\alpha}\varphi_\alpha(\xi)$，其中$a_\alpha=(f(\xi),\varphi_\alpha(\xi))\equiv\int_{\mathbf{R}^n}\overline{f(\xi)}\varphi_\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi$，$\forall\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$，而且存在常数$p\in\mathbf{R}$和$C\geqslant 0$使

$$|a_\alpha|\leqslant C(1+|\alpha|)^p,\quad \forall\alpha\in\mathbf{Z}_+^n, \tag{2.1}$$

此外，$f(\xi)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$的充要条件是对任意$p\in\mathbf{R}$存在常数$C=C_p\geqslant 0$使(2.1)成立．当$f(\xi)\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，$g(\xi)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$时，$f(\xi)$对$g(\xi)$的作用为

$$(f(\xi),g(\xi))=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+^n}(f(\xi),\varphi_\alpha(\xi))\overline{(g(\xi),\varphi_\alpha(\xi))}, \tag{2.2}$$

据此，对任意$s\in\mathbf{R}$，定义空间$x^s(\mathbf{R}^n)$如下：

$$x^s(\mathbf{R}^n)=\{f(\xi)\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)\ \big|\ \|f\|_{x^s}^2=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+^n}(1+|\alpha|)^s\left|(f,\varphi_\alpha)\right|^2<+\infty\}$$

[14]详细讨论了函数空间$x^s(\mathbf{R}^n)$的性质，证明了$x^s(\mathbf{R}^n)$按内积

$$(f,g)_{x^s}=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+^n}(1+|\alpha|)^s(f,\varphi_\alpha)\overline{(g,\varphi_\alpha)},\quad \forall f,g\in x^s(\mathbf{R}^n).$$

构成Hilbert空间，而且$x^s(\mathbf{R}^n)$与$x^{-s}(\mathbf{R}^m)$按对偶积(2.2)互为对偶．当$m\in\mathbf{Z}_+$时，$x^m(\mathbf{R}^m)$恰由所有满足条件

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta f(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n),\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbf{Z}_+^n(|\alpha+\beta|\leqslant m)$$

的函数$f(\xi)$组成，而且范数$\|\cdot\|_{x^m}$与

$$\|f\|'_{x^m}=(\sum_{|\alpha+\beta|\leq m}\|\xi^\alpha D_\xi^\beta f(\xi)\|_{L^2}^2)^{1/2},\quad \forall f\in x^m(\mathbf{R}^n)$$

等价．因此由对偶性知对缓增分布$f\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，$f\in x^{-m}(\mathbf{R}^n)(m\in\mathbf{Z}_+)$的充要条件是对任意满足$|\alpha+\beta|\leqslant m$的指标$\alpha,\beta\in\mathbf{Z}_+^n$，存在$f_{\alpha\beta}\in L^2(\mathbf{R}^n)$使

$$f(\xi)=\sum_{|\alpha+\beta|\leq m}\xi^\alpha D_\xi^\beta f_{\alpha\beta}(\xi).$$

对任意$s\in\mathbf{R}$，定义算子Λ^s如下：

$$(\Lambda^s f)(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_+^n}(1+|\alpha|)^{s/2}\overline{(f(\xi),\varphi_\alpha(\xi))}\varphi_\alpha(\xi),\quad \forall f(\xi)\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$$

Λ^s是$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$到$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$的连续线性算子，而且对任意$r\in\mathbf{R}$，$\Lambda^s$在$x^r(\mathbf{R}^n)$上的限制是$x^r(\mathbf{R}^n)$到$x^{r-s}(\mathbf{R}^n)$上的等距同构，且

$$\Lambda^0=I,\ \Lambda^r\circ\Lambda^s=\Lambda^s\circ\Lambda^r=\Lambda^{r+s},\quad \forall r,s\in\mathbf{R}.$$

如果$m\in\mathbf{Z}_+$，那么对任意满足$|\alpha+\beta|\leqslant m$的$\alpha,\beta\in\mathbf{Z}_+^n$，存在$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$到$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$的连续线性算子$A_{m\alpha\beta}$和$B_{m\alpha\beta}$,使对每个$r\in\mathbf{R}$,它们在$x^r(\mathbf{R}^n)$上的限制是$x^r(\mathbf{R}^n)$到$x^r(\mathbf{R}^n)$的有界线性算子,且使

$$\Lambda^m=\sum_{|\alpha+\beta|\leq m}\xi^\alpha D_\xi^\beta\circ A_{m\alpha\beta}=\sum_{|\alpha+\beta|\leq m}B_{m\alpha\beta}\circ\xi^\alpha D_\xi^\beta$$

若m是偶数，则当$|\alpha+\beta|$为奇数时$A_{m\alpha\beta}=B_{m\alpha\beta}=0$[14].

现在对任意$r\in\mathbf{R}$，定义算子集

$\mathbf{M}^r=\{B\in B(x^0,x^r)\,|\,\Lambda^r\circ B$是$x^0(\mathbf{R}^n)=L^2(\mathbf{R}^n)$上的Hilbert-Schmidt算子$\}$

其中$B(x^0,x^r)$表示由x^0到x^r的全体有界线性算子组成的集合．又若Γ是$\mathbf{R}$的可测子集，对任意$r,s\in\mathbf{R}$，定义算子族的集合

$\mathbf{V}^s(\Gamma,\mathbf{M}^r)=\{\{B_\lambda|\lambda\in\Gamma\}\,|$对几乎所有的$\lambda\in\Gamma$，$B_\lambda\in\mathbf{M}^r$，$\Lambda^r\circ B_\lambda$可测地依赖于$\lambda\in\Gamma$，且$\|\Lambda^r\circ B_\lambda\|_{\mathrm{HS}}\leqslant C|\lambda|^s\}$．

我们还需引进负指数空间$W^{-m}(H_n)(m\in Z_+)$．对任意$m\in Z_+$，由于$\mathscr{S}(H_n)$在$W^m(H_n)$中稠密，所以用$W^{-m}(H_n)$表示由所有可以延拓成$\mathscr{W}^m(H_n)$上的连续线性泛函的缓增分布$u\in\mathscr{S}'(H_n)$组成的线性空间．换言之，对缓增分布$u\in\mathscr{S}'(H_n)$，$u\in\mathscr{W}^{-m}(H_n)$的充要条件是：存在常数$C>0$使

$$|(u,v)|\leqslant C\|v\|_{\mathscr{W}^m},\quad \forall v\in\mathscr{S}(H_n).$$

$\mathscr{W}^{-m}(H_n)$中的范数为

$$\|u\|_{\mathscr{W}^{-m}}=\sup_{v\in\mathscr{S}(H_n)}|(u,v)|/\|v\|_{\mathscr{W}^m},\quad \forall u\in\mathscr{W}^{-m}(H_n)$$

容易证明$\mathscr{W}^{-m}(H_n)$是Hilbert空间．而且对$u\in\mathscr{S}'(H_n)$，$u\in\mathscr{W}^{-m}(H_n)$的充要条件是：对每个$L\in\mathscr{A}_m$，存在$u_L\in L^2(H_n)$，使 $u=\sum\limits_{L\in\mathscr{A}_m}Lu_L$．

定义 2 设A是$\mathbf{R}^n$上具多项式系数的线性偏微分算子，B是$L^2(\mathbf{R}^n)$到$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$的线性算子．如果把$A$看作$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$到$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$的线性算子时成立$A\circ B=I$（$I$表示$L^2(\mathbf{R}^n)$到$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$的嵌入算子），则称$B$为$A$的右逆．

对任意实数$R\geqslant 0$，记

$$\Gamma_R^+=(R,+\infty),\quad \Gamma_R^-=(-\infty,-R),\quad \Gamma_R=\Gamma_R^+\cup\Gamma_R^-.$$

定理 1 设L是H_n上的左不变线性偏微分算子．如果存在实数$R\geqslant 0$，实数r和s以及算子族$\{B_\lambda|\lambda\in\Gamma_R\}\in V^s(\Gamma_R,M^r)$，使对几乎所有的$\lambda\in\Gamma_R$，$B_\lambda$是$\widetilde{\prod}_\lambda(L)$的右逆，则存在分布E，使在原点的某邻域内成立

$$LE=\delta\quad(\delta\text{即 Dirac-}\delta\text{ 函数})$$

且对$m=\min([r],-[2s]-n-2)$，当 $m\geqslant 0$或为负偶数时$E\in\mathscr{W}^m(H_n)$，否则$E\in W^{m-1}(H_n)$．

证 分两种情形讨论：

一、设$m\geqslant 0$，取$\psi(\lambda)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$使在$[-R,R]$上$\psi(\lambda)\equiv 1$．因$r\geqslant m$，所以对任意形如$P=\sum\limits_{|\alpha+\beta|\leqslant m}a_{\alpha\beta}\xi^\alpha D_\xi^\beta$的微分算子$P$，复合算子$P\circ\Lambda^{-r}$是$L^2(\mathbf{R}^n)$到$L^2(\mathbf{R}^n)$的有界线性算子，从而$P\circ B_\lambda=(P\circ\Lambda^{-r})\circ(\Lambda^r\circ B_\lambda)$是$L^2(\mathbf{R}^n)$上的Hilbert-Schmidt算子，且

$$\|P\circ B_\lambda\|_{HS}\leqslant\|P\circ\Lambda^{-r}\|\cdot\|\Lambda^r\circ B_\lambda\|_{HS}\leqslant C|\lambda|^s,\quad \lambda\ a.e.\ \Gamma_R.$$

又因 $0<-\frac{m}{2}-s-\frac{1}{2}(n+1)$，所以由引理2，引理3知存在$E_0\in\mathscr{W}^m(H_n)$，使

$$\langle E_0,u\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\int_{\Gamma_R}(1-\psi(\lambda))\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)B_\lambda)\mathrm{d}\mu,\quad \forall u\in\mathscr{S}(H_n).$$

对任意$u\in\mathscr{S}(H_n)$，有

$$\langle LE_0,u\rangle=\langle E_0,L'u\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\int_{\Gamma_R}(1-\psi(\lambda))\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(L'u)B_\lambda)\mathrm{d}\mu$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\int_{\Gamma_R}(1-\psi(\lambda))\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)\widetilde{\prod}_\lambda(L)B_\lambda)\mathrm{d}\mu=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\int_{\Gamma_R}(1-\psi(\lambda))\,\mathrm{tr}\,\widetilde{\prod}_\lambda(u)\mathrm{d}\mu$$

$$=\int_{\mathbf{R}^*}(1-\psi(\lambda))\hat{u}(0,0,\lambda)\mathrm{d}\lambda=(\delta,u)-\int_{\mathbf{R}}\psi(\lambda)\hat{u}(0,0,\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

以$\omega(t)$表示$\psi(\lambda)$的Fourier变换，则$\omega(t)\in\mathscr{S}(-\infty,+\infty)$，且据Parseval恒等式，成立

$$\int_{\mathbf{R}}\psi(\lambda)\hat{u}(0,0,\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\omega(t)u(0,0,t)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{2\pi}\delta(x,y)\otimes\omega(t),u(x,y,t)\right).$$

因此

$$LE_0=\delta(x,y,t)-\frac{1}{2\pi}\delta(x,y)\otimes\omega(t) \tag{2.3}$$

根据引理 4，可取 $h(t)\in C_0^\infty(-\infty,+\infty)$ 使在 $t=0$ 的某邻域 Ω_0 内，函数 $g(t)=\delta(t)+h(t)$ 满足卷积方程

$$g(t)-\frac{1}{2\pi}\omega(t)*g(t)=\delta(t) \tag{2.4}$$

令 $\mathrm{E}(x,y,t)=\delta(x,y)\otimes g(t)*\mathrm{E}_0(x,y,t)$，则易知 $\mathrm{E}(x,y,t)\in\mathscr{W}^m(\mathrm{H}_n)$．而由 (2.3)，(2.4) 及算子 L 的左不变性，知在 $\mathbf{R}^{2n}\times\Omega_0$ 上成立．

$$LE=\delta(x,y)\otimes g(t)*LE_0=\delta(x,y,t);$$

二、设 $m<0$．记 $k=-[\frac{1}{2}m]$．取 $\psi(\lambda)$ 如前，并设 $A_{\alpha\beta}$ 是使下式成立的 L^2 有界线性算子:

$$\Lambda^{2k}=\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq 2k\\ |\alpha+\beta|\,\text{偶}}}\xi^\alpha D_\xi^\beta\circ A_{\alpha\beta} \tag{2.5}$$

由 $-2k\leqslant m\leqslant r$ 知算子 Λ^{-2k-r} 是 L^2 有界线性算子，于是对每个算子 $A_{\alpha\beta}$，$A_{\alpha\beta}\circ\Lambda^{-2k}\circ B_\lambda=(A_{\alpha\beta}\circ\Lambda^{-2k-r})\circ(\Lambda^r\circ B_\lambda)$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上的Hilbert-Schmidt 算子，且

$$\|A_{\alpha\beta}\circ\Lambda^{-2k}\circ B_\lambda\|_{\mathrm{HS}}\leqslant\|A_{\alpha\beta}\circ\Lambda^{-2k-r}\|\cdot\|\Lambda^r\circ B_\lambda\|_{\mathrm{HS}}\leqslant C_{\alpha\beta}|\lambda|^s,\quad \lambda\, a.e.\,\Gamma_R\,.$$

又因 $-k\leqslant\frac{1}{2}m\leqslant -s-\frac{1}{2}(n+1)$，所以由引理 2 知存在函数 $\mathrm{E}^+_{\alpha\beta}$，$\mathrm{E}^-_{\alpha\beta}\in L^2(\mathrm{H}_n)$，使

$$\langle\mathrm{E}^+_{\alpha\beta},u\rangle=(\frac{1}{2\pi})^{n+1}\int_{\Gamma_R^+}(1-\psi(\lambda))\,|\lambda|^{-k}\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)A_{\alpha\beta}\Lambda^{-2k}B_\lambda)\mathrm{d}\mu$$

$$\langle\mathrm{E}^-_{\alpha\beta},u\rangle=(\frac{1}{2\pi})^{n+1}\int_{\Gamma_R^-}(L-\psi(\lambda))\,|\lambda|^{-k}\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)A_{\alpha\beta}\Lambda^{-2k}B_\lambda)\mathrm{d}\mu,\quad \forall u\in\mathscr{S}(\mathrm{H}_n).$$

对 $\varepsilon=\pm1$，记 $L^\varepsilon_{\alpha\beta}$ 为 $2k$ 阶齐次左不变算子

$$L^\varepsilon_{\alpha\beta}=2^{-|\alpha+\beta|}(-i\varepsilon)^{k+\frac{1}{2}|\alpha+\beta|}\varepsilon^{|\beta|}\mathbf{Y}^\alpha\mathbf{X}^\beta\mathbf{T}^{k-\frac{1}{2}|\alpha+\beta|},\quad(\text{当 }|\alpha+\beta|=\text{偶数})$$

再令

$$\mathrm{E}_0=\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq 2k\\ |\alpha+\beta|\,\text{偶}}}(L^+_{\alpha\beta}\mathrm{E}^+_{\alpha\beta}+L^-_{\alpha\beta}\mathrm{E}^-_{\alpha\beta})$$

因 $\mathrm{T}=\frac{1}{4}(\mathrm{Y}_1\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_1)$，所以 $\mathrm{E}_0\in\mathscr{W}^{-2k}(\mathrm{H}_n)$．由于

$$\prod_\varepsilon(L^\varepsilon_{\alpha\beta})=\xi^\alpha D_\xi^\beta\ .$$

与前类似可验证(需利用 (2.5) 式)

$$\langle LE_0,u\rangle=(\frac{1}{2\pi})^{n+1}\int_{\Gamma_R}(1-\psi(\lambda))\,|\lambda|^{-k}\mathrm{tr}(\widetilde{\prod}_\lambda(u)\,|\lambda|^k\Lambda^{2k}\Lambda^{-2k}B_\lambda)\mathrm{d}\mu$$

$$=(\delta,u)-(\frac{1}{2\pi}\delta(x,y)\omega(t),u(x,y,t)),\quad \forall u\in\mathscr{S}(\mathrm{H}_n).$$

故若令 $\mathrm{E}(x,y,t)=\delta(x,y)\otimes g(t)*\mathrm{E}_0(x,y,t)$，其中 $g(t)$ 如前，则在原点的某邻域内，

$$LE=\delta(x,y)g(t)*LE_0=\delta(x,y,t)$$

而且易知 $\mathrm{E}\in\mathscr{W}^{-2k}(\mathrm{H}_0)$．注意到 $-2k=\begin{cases}m, & \text{当 } m \text{ 为偶数},\\ m-1, & \text{当 } m \text{ 为奇数},\end{cases}$

因而定理得证．

注：因L是左不变的，所以对任意$\sigma\in\mathrm{H}_n$，若记l_σ为左平移算子：$\tau\mapsto\sigma\tau(\forall\tau\in\mathrm{H}_n)$，则在$\sigma$的某邻域内成立

$$L(l_\sigma^*\mathrm{E})=l_\sigma^*\delta=\delta_\sigma(\delta_\sigma\text{表示集中作用于 }\sigma\text{ 点的Dirac分布})$$

即$l_\sigma^*\mathrm{E}$是算子L在σ点的某邻域内的局部基本解．又因空间$\mathrm{W}^m(\mathrm{H}_n)$是左平移不变的，所以若$\mathrm{E}\in\mathscr{W}^m(\mathrm{H}_n)$，则$l_\sigma^*\mathrm{E}\in\mathscr{W}^m(\mathrm{H}_n)$．

§ 3　一类左不变偏微分算子

考虑H_n上形如

$$L(\mathrm{W},\mathrm{T})=\sum_{|a|+k\leq m}a_{ak}\mathrm{W}^a\mathrm{T}^k \tag{3.1}$$

的左不变偏微分算子，其中a_{ak}为复数，算子T如前，$\mathrm{W}=(\mathrm{W}_1,\mathrm{W}_2,\cdots,\mathrm{W}_n)$，

$$\mathrm{W}^a=\mathrm{W}_1^{a_1}\mathrm{W}_2^{a_2}\cdots\mathrm{W}_n^{a_n},\quad a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{Z}_+^n$$

而

$$\mathrm{W}_j=\frac{1}{4}(\mathrm{X}_j^2+\mathrm{Y}_j^2),\quad j=1,2,\cdots,n.$$

容易看出，

$$\widetilde{\prod}_\lambda(L)=L(-|\lambda|(2N+e),i\lambda),\quad\forall\lambda\in\mathbf{R}^* \tag{3.2}$$

其中

$$N=(N_1,N_2,\cdots,N_n),$$

$$N_j=\frac{1}{2}(D_{\xi_j}^2+\xi_j^2-1),\quad j=1,2,\cdots,n$$

而

$$e=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{Z}_+^n.$$

由于成立[14]

$$N^\beta\varphi_a=a^\beta\varphi_a,\quad\forall a,\beta\in\mathbf{Z}_+^n\quad, \tag{3.3}$$

利用定理1可以证明：

定理2　设左不变偏微分算子L具形(3.1)．如果存在$R>0$，$r,s\in\mathbf{R}$，使当$|\lambda|\geqslant R$时成立

$$C_\lambda=\inf_{a\in\mathbf{Z}_+^n}|(1+|a|)^rL(-|\lambda|(2a+e),i\lambda)|>0, \tag{3.4}$$

而且

$$C_\lambda\geqslant C|\lambda|^s\quad(C>0),\quad\forall|\lambda|\geqslant R \tag{3.5}$$

则存在缓增分布$\mathrm{E}\in\mathscr{S}'(\mathrm{H}_n)$使在原点的某邻域内成立

$$L\mathrm{E}=\delta$$

而且对$k=\min(-[2r]-n-2,-[-2s]-n-2)$，当$k\geqslant0$或为负偶数时，$\mathrm{E}\in\mathrm{W}^k(\mathrm{H}_n)$，否则$\mathrm{E}\in\mathrm{W}^{k-1}(\mathrm{H}_n)$．

证：任意函数$f\in L^2(\mathbf{R}^n)$可以唯一地表为在$L^2(\mathbf{R}^n)$中收敛的和式

$$f=\sum_{a\in\mathbf{Z}_+^n}\overline{C_a}\varphi_a \tag{3.6}$$

而且

$$\|f\|_{L^2}=(\sum_{a\in\mathbf{Z}_+^n}|C_a|^2)^{1/2}$$

记$p=-[2r]-n-2$.对$|\lambda|\geqslant R$定义算子$B_\lambda:L^2(\mathbf{R}^n)\to x^p(\mathbf{R}^n)$如下：对具形(3.6)的函数$f\in L^2(\mathbf{R}^n)$，定义

$$B_\lambda f=\sum_{a\in\mathbf{Z}_+^n}\frac{\overline{C_a}}{L(-|\lambda|(2a+e),i\lambda)}\varphi_a\quad. \tag{3.7}$$

由于

$$(\Lambda^p\circ B_\lambda)\varphi_a=\frac{(1+|a|)^{p/2}}{L(-|\lambda|(2a+e),i\lambda)}\varphi_a\quad,\forall a\in\mathbf{Z}_+^n\quad,$$

同时因 $p+2r<-n-1$，所以由(3.4)，(3.5)得

$$\|\Lambda^{p}\circ B_{\lambda}\|_{HS}^{2}=\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_{+}^{n}}((\Lambda^{p}\circ B_{\lambda})\varphi_{\alpha},\ (\Lambda^{p}\circ B_{\lambda})\varphi_{\alpha})$$

$$=\sum_{\alpha}\left|\frac{(1+|\alpha|)^{p/2}}{L(-|\lambda|(2\alpha+e),i\lambda)}\right|^{2}=\sum_{\alpha}\frac{(1+|\alpha|)^{p+2r}}{|(1+|\alpha|)^{r}L(-|\lambda|(2\alpha+e),i\lambda)|^{2}}$$

$$\leqslant C\cdot C_{\lambda}^{-2}\leqslant C'\cdot|\lambda|^{-2s},\qquad \forall|\lambda|\geqslant R.$$

故 $\{B_{\lambda}\,|\,|\lambda|>R\}\in V^{-s}(\Gamma_{R},\ M^{p})$；此外，因级数(3.7)在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{n})$ 中收敛，所以由(3.2)，(3.3)得

$$\widetilde{\prod}_{\lambda}(L)\circ B_{\lambda}f=\sum_{\alpha}\overline{C_{\alpha}}\varphi_{\alpha}=f,\quad \forall f\in L^{2}(\mathbf{R}^{n}).$$

表明 B_{λ} 是 $\widetilde{\prod}_{\lambda}(L)$ 的右逆．于是由定理1即得本定理．

例　考虑 H_2 上的左不变偏微分算子

$$L=\frac{1}{4}(X_{1}^{2}+Y_{1}^{2}-X_{2}^{2}-Y_{2}^{2})+aT+b$$

其中 a,b 是复常数．有

$$L(-|\lambda|(2\alpha+e),i\lambda)=|\lambda|\left[2(\alpha_{2}-\alpha_{1})+ia\,\mathrm{sgn}\lambda\right]+b,$$
$$\forall\lambda\in\mathbf{R}^{*},\ \forall\alpha=(\alpha_{1},\alpha_{2})\in\mathbf{Z}_{+}^{2}$$

容易看出，当 $ia\neq$ 偶数时，存在 $R>0$ 和 $C>0$ 使

$$|L(-|\lambda|(2\alpha+e),i\lambda)|\geqslant C|\lambda|,\quad\forall|\lambda|\geqslant R,\quad\forall\alpha\in\mathbf{Z}_{+}^{2}$$

而当 $ia=$ 偶数 但 $b\neq0$ 时，存在 $R>0$ 和 $C>0$ 使

$$|L(-|\lambda|(2\alpha+e),i\lambda)|\geqslant C,\quad\forall|\lambda|\geqslant R,\quad\forall\alpha\in\mathbf{Z}_{+}^{2}$$

利用定理2知在这两种情形下算子 L 存在局部基本解 $E\in W^{-4}(H_2)$（注意使 $\delta\in W^{m}(H_2)$ 的最大整数为 $m=-4$）．

当 $ia=$ 偶数 且 $b=0$ 时，$\widetilde{\prod}_{\pm1}(L')$ 在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{2})$ 中有非平凡核，因此据[16]知此时 L 不存在局局部基本解．

得到了局部基本解，便可进而讨论算子的局部可解性和解的正则性等问题．限于篇幅，本文不再赘述．

参 考 文 献

[1] G. Folland and E. Stein, Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group, Comm. Pure Appl. Math. 27(1974), 429—522.

[2] C. Rockland, Hypoellipticity on the Heisenberg group: representation-theoretic criteria, Trans. Amer. Math. Soc. 240(1978), 1—52.

[3] 欧阳才衡，Heisenberg群上分析的若干问题，数学物理中的若干问题（数学物理讲座，1(A)），武汉大学出版社，1985.

[4] B. Helffer and J, Nourrigat, Caracterization des operateurs hypoelliptiques homogenes invariant a gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradue, Comm. PDE, 4(1979), 899—958.

[5] L. Rothschild, Local solvability of left invariant differential operators on the Heisenberg group, Proc. Amer. Math. Soc. 74(1979), 383—388.

[6] L. Corwin, A representation-theoretic criterion for local solvability of left invariant differention operators on nilpotent Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 264(1981), 113—120.

[7] L. Corwin, Criteria for solvability of left invariant operators on nilpotent Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 280(1983), 53—72.

[8] L. Corwin and F. Greenleaf, Solvability of certain left invariant differential operators by nilmanifold theory, Comm. Pure Appl. Math. 36(1983), 755—766.

[9] R. Lipsman, Solvability of invariant differential operators with variable coefficients, Comm. PDE, 5(1985), 1261—1316.
[10] D. Geller, Local solvability and homogeneous distributions on the Heisenberg group, Comm. PDE, 5(1980), 475—560.
[11] A. Melin, Parametrix constructions for right invariant differential operators on the Heisenberg group, Comm. PDE. 6(1981), 1363—1405.
[12] A. Melin, Parametrix constructions for right invariant differential operators on nilpotent groups, Ann. Glob. Analysis and Geometry, 1(1983), 79—130.
[13] B. Simon, Distributions and their Hermite expansions, J. Math. Phys. 12(1971), 140—148.
[14] 崔尚斌，一类Sobolev型空间及其应用，兰州大学学报（待发表）.
[15] 崔尚斌，Heisenberg群上一类齐次左不变线性偏微分方程的局部可解性，已投《兰州大学学报》.
[16] L. Corwin and L. Rothschild, Necessary conditions for local solvability of homogeneous left invariant differential operators on nilpotent Lie groups, Acta Math. 147(1981). 265—288.
[17] L. Hormander, The Weyl calculus of pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 355—443.
[18] A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Usbyehi Math. Nauk 17(196a), 57—110 .

Local Fundamental Solutions of a Class of Left Invariant Differential Operators on the Heisenberg Group

Cui Shangbin

(Dept. Math., Lanzhou Univ.)

Abstract

In this paper it is proved that local fundamental solution exists in some space $W^m(H_n)$ $(m\in Z)$, if the left invariant differential operator on the Heisenberg group H_n satisfies certain condition. The main results are:

1.Let L be a left invariant differential operator on H_n. If there exist $R\geqslant 0$, $r,s\in R$ and operators $\{B_\lambda|\lambda\in\Gamma_R\}\in V^s(\Gamma_R, M')$ such that, for almost all $\lambda\in\Gamma_R$, B_λ is the right inverse of $\prod_\lambda(L)$, then there exists $E\in W^m(H_n)$ (when $m\geqslant 0$ or m even) or $E\in W^{m-1}(H_n)$ (when $m<0$ and odd) such that

$$LE=\delta(\text{near the origie})$$

Where $m=\min([r], -[2s]-n-2)$;

2 . Let $L(W,T)$ be of the form (3.1). If there exist $R\geqslant 0$ and $r,s\in R$ such that when $|\lambda|\geqslant R$,

$$C_\lambda=\inf_{a\in Z_+^n}|(1+|a|)^r L(-|\lambda|\cdot(2a+e), i\lambda)|>0,$$

and
$$C_\lambda\geqslant C|\lambda|^s \quad (C>0),$$

then the same conclusion as above holds with $m=\min(-[2r]-n-2, -[-2s]-n-2)$.