第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

关于Banach空间光滑性的两点注记*

程 立 新

（江汉石油学院，沙市）

陈道琦在[1]中指出：（A）若X是实（复）Banach空间，则

$$\lim_{r\to 0^+}\sup_{\substack{v,v\in S(X)\cap U(x_0,r)\\ u\neq v}}\frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=0 \tag{1}$$

是点$x_0\in S(X)$光滑的一个充分条件．俞鑫泰[2]将条件（1）改进为：（B）对任何$y\in S(X)$，令$X_{x_0,y}=\mathrm{span}\{x_0,y\}$，则

$$\lim_{r\to 0^+}\sup_{\substack{u,v\in S(X_{x_0,y})\cap U(x_0,r)\\ u\neq v}}\frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=0 \tag{2}$$

成立．并且指出：（C）当X为实Banach空间时，(1)是范数在该点F-可微的充分条件．本文证明了（1），（2）也分别是命题（C）、（B）的必要条件．

$x\to f_x$表示点x处的支撑映射．

定理1 设X为实Banach空间,则范数在点$x_0\in S(X)F$-可微的充分必要条件为（1）．

证明 充分性的证明见[2]或[3]．

必要性．设$x_0\in S(X)$范数F-可微．$\forall u,v\in S(X)$，$u\neq v$，有

$$\frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=\frac{\|v\|-\left\|\frac{u-v}{2}+v\right\|}{\|u-v\|}\ \underline{\underline{令\ \lambda=\frac{1}{2}\|u-v\|}}\ \frac{1}{2}\,\frac{\|v\|-\left\|v+\lambda\frac{u-v}{\|u-v\|}\right\|}{\lambda}$$

（由[4]，P_{21}（1）式）

$$\leqslant -\frac{1}{2}f_v\Big(\frac{u-v}{\|u-v\|}\Big)$$

$$=\frac{1}{2}(f_u-f_v)\Big(\frac{u-v}{\|u-v\|}\Big)-\frac{1}{2}f_u\Big(\frac{u-v}{\|u-v\|}\Big)\leqslant\frac{1}{2}\|f_u-f_v\|-\frac{1-f_u(v)}{\|u-v\|}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|f_u-f_{x_0}\|+\frac{1}{2}\|f_{x_0}-f_v\|\to 0\quad（当u、v\to x_0时）$$

* 1987年3月30日收到．

最后一步利用了：范数在点x_0F 可微$\Leftrightarrow$支撑映射在x_0点范-范连续.故(1)成立.证毕.

定理 2 设X为实(复)Banach空间，则$x_0 \in S(X)$光滑的充分必要条件为(2).

证明 充分性.见[2](或[3]).

必要性.注意到x_0是复Banach空间X的光滑点，当且仅当它是实X(将X视为实的)的光滑点，故只须对实空间证明之.

设X为实Banach空间，$x_0 \in S(X)$是光滑点，显然x_0是子空间$X_{x_0,y}=\mathrm{span}\{x_0,y\}$的F-可微点，依定理1得：

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{\substack{u,v\in S(X_{x_0,y})\cap U(x_0,r)\\ u\neq v}} \frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=0$$

即(2)成立.证毕.

参 考 文 献

[1] 陈道琦，支撑泛函唯一的一个充分条件，数学学报，3(1982)，302—305.

[2] 俞鑫泰，范数Fréchet可微的一个充分条件——关于"支撑泛函唯一的一个充分条件"，数学进展，2(1986).

[3] ——，Banach空间几何理论，华东师范大学出版社，1986，271—275.

[4] J.Diestel, Geometry of Banach Spaces-selected lopics, tecture notes in Math., Vol.485, Springer Verlag(1975).

Some Notes on Smoothness of Banach Spaces

Cheng Lixin

(Jiang Han Petreleum Institute)

Abstract

In this paper, We show that a real or complex Banach space is smooth at $x_0(\in S(X))$ iff, for any $y\in S(X)$.

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{\substack{u,v\in S(X_{x_0,y})\cap U(x_0,r)\\ u\neq v}} \frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=0$$

where $X_{x_0,y}=\mathrm{span}\{x_0,y\}$. For a real Banach space X, we obtain that X is F-differentiable at $x_0(\in S(X))$ iff

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{\substack{u,v\in S(X)\cap U(x_0,r)\\ u\neq v}} \frac{1-\left\|\frac{u+v}{2}\right\|}{\|u-v\|}=0$$

Remark. The sufficient conditions of the conclusion have been proved by Yu Xintai [2].