第9卷 第3期
1989年8月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.3
Aug., 1989

一类IBN环的商环的Grothendieck群的性质*

朱 晓 胜

（河海大学数学教研室，南京）

摘 要

本文就特殊的一类IBN环的商环讨论其Grothendieck群的一些性质.

§1 引 言

如果令R是一个环，$F=F(R)$是由自由生成子$\langle P\rangle$生成的自由阿贝尔群，这里$\langle P\rangle$表示有限生成投射R—模P的同构类；令S是所有形为$\langle P\rangle+\langle Q\rangle-\langle P\oplus Q\rangle$生成的$F$的子群，则$R$的Grothendieck群是$K_0R=F/S$.

IBN环即基数不变环对代数K—理论中的基本群之一的Grothendieck群有结论：$R\in$IBN$\Leftrightarrow[R]$在K_0R中的阶无限．本文就特殊的一类IBN环的商环讨论其Grothendieck群的一些性质．文中一切环（或代数）都是有单位元的结合环，一切模都是指酉模，一切环（或代数）同态均指保持单位元的同态．

§2 K_0R的某些性质

根据[4]，我们知道：如果$R\in$IBN，则K_0R中存在着与Z同构的子群，令

$T=\{K_0R$中与Z同构的子群全体$\}$；

$G=\{[M]:M$是有限生成R—投射模，$[M]$是M的一组准同构类$\}$.

我们有

定理2.1 $|K_0R|\geqslant|T|\geqslant|G|$

证 我们知道，K_0R中的任一与Z同构的子群一定是一个无限阶的循环群，而K_0R中每一个阶为无限的元均可生成一个与Z同构的循环子群，每个不同的阶为无限的元生成的循环子子群不同．因此，K_0R中与Z同构的子群所成集合的势恰与K_0R中阶为无限的元素所成集合的的势等同．故，只需考虑G中阶为无限的元素所成集合的势即可．令

$G_1=\{G$中所有的阶为无限的元素全体$\}$；

$G_2=\{G$中所有的阶为有限的元素全体$\}$；

$G_2+[R]=\{[M]+[R]=[M\oplus R]:[M]\in G_2\}\subseteq G$；

不难证明：

* 1987年9月4日收到.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

不难证明：

$$\mathbf{G}_2+[R]\subseteq\mathbf{G}_1$$

事实上，如果$[M]\in\mathbf{G}_2$，则存在$n\in\mathbf{Z}^+$，使得$n[M]=0$；又如果$[M]+[R]=[M\oplus R]\notin\mathbf{G}_1$ 则存在 $m\in\mathbf{Z}^+$，使得$m[M\oplus R]=m([M]+[R])=0$，从而有$mn[R]=0$；这与$[R]$的阶为无限的事实相矛盾．

由于$\mathbf{G}$是K_0R的子集，故有$|T|\geqslant|\mathbf{G}_1|\geqslant|\mathbf{G}_2+[R]|=|\mathbf{G}_2|$．

又因 $|\mathbf{G}|=|\mathbf{G}_1|+|\mathbf{G}_2|=\infty$，故 $|T|\geqslant|\mathbf{G}|$．

显然，我们有 $|T|\leqslant|K_0R|$． ■

定理2.2 如果R是IRN环，则K_0R可以由一组阶为无限的元素生成．

证 我们知道，K_0R的每个元素均可写成$[P]-[Q]$．令

$$\mathbf{G}_1=\{[M]:[M]\text{的阶为无限}\};$$

把由$\mathbf{G}_1$生成的K_0R的子群记为$\mathbf{S}$．

$\forall([P]-[Q])\in\mathrm{K}_0R$，i）如果$[P]$的阶为无限，$[Q]$的阶为无限，显然有$[P]-[Q]\in\mathbf{S}$；ii）如果$[P]$的阶$=n<\infty$，则存在有限生成投射$R$—模$N$及正整数$m$，使得$P\oplus N=R^m$，亦即$[P]+[N]=[R^m]$，$n[N]=n[R^m]$；由于$R$是IBN环，$[R]$的阶为无限，所以，$[N]$的阶为无限．故，$[P]=[R^m]-[N]\in\mathbf{S}$．

同理可证：$[Q]\in\mathbf{S}$；因此$[P]-[Q]\in\mathbf{S}$．从而，$\mathrm{K}_0R\subseteq\mathbf{S}$．

但是，另一方面$\mathbf{S}$又是K_0R的子群，有$\mathrm{K}_0R\supseteq\mathbf{S}$，故$\mathbf{G}_1$是$\mathrm{K}_0R$的一个生成组． ■

推论2.1 设R是IBN环，则K_0R模去K_0R中所有与$\mathbf{Z}$同构的子群所得到的商群是零群．

§3 K_0R为挠群的条件以及$\mathrm{K}_0(R/I)$和I的一些性质

定义3.1 设R是一个IBN环，I是R的理想，如果存在a_{ij}($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$；且$m\neq n$)$\in R$；b_{lk}($l=1,2,\cdots,n$；$k=1,2,\cdots,m$；且$m\neq n$)$\in R$；使得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}-\delta_{ik}\in I\ (i,k=1,2,\cdots,m);\ \delta_{ik}=\begin{cases}1_R & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases};$$

$$\sum_{j=1}^{m}b_{tj}a_{js}-\delta_{ts}\in I\ (t,s=1,2,\cdots,n);\ \delta_{ts}=\begin{cases}1_R & t=s\\ 0 & t\neq s\end{cases}$$

则称I为R的一个非IBN子．

由上述定义可以看出，R本身也是一个非IBN子，但这是一种平凡的情形，故我们讨论到非IBN子时总是指非平凡的情况．

命题3.1 设R是一个IBN环，则I是R的非IBN子的充分必要条件是R/I是非IBN环．

证明 如果R/I是非IBN环，于是存在$m\times n$矩阵$A_{m\times n}=(\overline{a_{ij}})\in M_{m\times n}(R/I)$，$n\times m$矩阵$B_{n\times m}=(\overline{b}_{jk})\in M_{n\times m}(R/I)$；$m\neq n$；使得$A_{m\times n}B_{n\times m}=I_m$；$B_{n\times m}A_{m\times n}=I_n$．不难验证，这样的$a_{ij}$、$b_{jk}$满足定义3.1的要求，故$I$是$R$的非IBN子．

反过来，如果I是R的非IBN子，则存在满足定义3.1的a_{ij}、$b_{jk}\in R$ ($i,k=1,2,\cdots,m$；$j,k=1,2,\cdots,n$；$m\neq n$)．于是令$A_{m\times n}=(\overline{a_{ij}})$，$B_{n\times m}=(\overline{b_{jk}})$，显然有$A_{m\times n}B_{n\times m}=I_m$，$B_{n\times m}A_{m\times n}=I_n$．所以，$R/I$是非IBN环．

定理3.1 如果R是IBN环，则$\mathrm{K}_0(R/I)$为挠群的充分必要条件是I为R的非IBN子．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 设R是IBN环．$K_0(R/I)$成为挠群$\Leftrightarrow R/I$是非IBN环(见[7])$\Leftrightarrow I$是R的非IBN子． ■

推论3.1 R是一个IBN环，I是R的非IBN子，则$M_{n\times n}(R)$是$M_{n\times n}(I)$的非IBN子．(这里$M_{n\times n}(R)$表示R上的矩阵代数)．

证明 因为$M_{n\times n}(R)/M_{n\times n}(R/I)\simeq M_{n\times n}(R/I)$，所以，如果$I$是$R$的非IBN子，则$M_{n\times n}(I)$是$M_{n\times n}(R)$的非IBN子． ■

推论3.2 设$R\in$ IBN，则$K_0(R/I)$为挠群的充分必要条件是$K_0(M_{n\times n}(R)/M_{n\times n}(I))$为挠群． ■

命题3.2 任意可换环、Noether环、局部环(不一定可换)、半单环、Artin环、单环不存在非平凡的非IBN子．

证明 因为上述环中的任何一种模去其非平凡的理想所得到的商环仍然是IBN环，故不存在非平凡的非IBN子．

尽管一些特殊的环不存在非IBN子，但并不意味着我们的定义是平庸的．事实上，我们有

命题3.3 令 $\boldsymbol{H}=\{$有非平凡的非IBN子的IBN环全体$\}$，$\boldsymbol{N}=\{$不存在非平凡的非IBN子的IBN环全体$\}$．则

$$|\boldsymbol{H}|>|\boldsymbol{N}|.$$

证明 设K为一个非零环，$S=\mathrm{End}_k(V)$，其中V是K上的一个无穷秩的自由模，作为S—模，有$S^2\simeq S$，故 $S\notin$ IBN．

$\forall R\in\boldsymbol{N}$，令$T=R\oplus S$，显然$T\in$ IBN(见[3])，取$I=(R,0)$，则I是T的理想，$T/I\simeq S\notin$ IBN，故I是T的非IBN子，从而$T\in\boldsymbol{H}$．因此，$\boldsymbol{N}\oplus S=\{R\oplus S:R\in\boldsymbol{N}\}\subseteq\boldsymbol{N}$．所以

$$|\boldsymbol{H}|\geqslant|\boldsymbol{N}\oplus S|=|\boldsymbol{N}|.$$ ■

为了进一步讨论$K_0(R/I)$及非IBN子的性质，我们给出如下的

定义3.2 设R是一个IBN环，I是R的非IBN子，于是存在正整数k、h使得$(R/I)^k\simeq(R/I)^{k+h}$，让这样的数对(k,h)按字典式排列．我们把第一个数对称为I的序型．

命题3.4 如果R是一个IBN环，I是R的非IBN子，且序型为(k,h)，则

$$(R/I)^m\simeq(R/I)^n\Leftrightarrow m=n\quad,\quad 或\quad m、n>k 且 m\equiv n(\mathrm{mod}\ \ h).$$

证明 "$\Leftarrow$"，如果$m=n$，显然有$(R/I)^m\simeq(R/I)^n$，当$m\neq n$时，可不失一般地假设$n>m>k$．由假设存在$t\in\mathbf{Z}^+$，使得$n-m=th$，从而有

$$(R/I)^n=(R/I)^{th+k+(m-k)}\simeq(R/I)^{k+(m-k)}=(R/I)^m.$$

"$\Rightarrow$"，如果$h\nmid n-m$，存在$t\in\mathbf{Z}^+$，使得$n-m=th+r$，$0<r<h$；

$$(R/I)^m\simeq(R/I)^n=(R/I)^{m+r+th}\simeq(R/I)^{m+r},$$

因为$m\geqslant k$，故存在$l\in\mathbf{Z}^+$，使得$m+r'=k+lh$，$0<r'\leqslant h$，考虑到I的序型为(k,h)，于是，我们有

$$(R/I)^k\simeq(R/I)^{k+lh}\simeq(R/I)^{m+r'}\simeq(R/I)^{m+r'+r}=(R/I)^{k+lh+r}\simeq(R/I)^{k+r},$$

而(k,r)先于(k,h)，矛盾．故$h|n-m$．

命题3.5 令$\varphi:R\twoheadrightarrow S$是一个满的环同态．则$S$中存在非平凡的非IBN子$I\Leftrightarrow\varphi^{-1}(I)$是$R$的非IBN子．在此情况下，$\varphi^{-1}(I)$与$I$有相同的序型．

证明 令$\Pi:S\twoheadrightarrow S/I$是保持单位元的自然环同态，则$f=\Pi\varphi$亦是满的环同态，且$\mathrm{Ker}f$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$=\varphi^{-1}(I)$. 从而 $R/\varphi^{-1}(I)\simeq S/I$. 所以，$I$ 是 S 的非IBN子的充分必要条件是 $\varphi^{-1}(I)$ 是 R 的非IBN子. 此时，它们有相同的序型. ■

命题3.6 令 $f:R\to S$ 是非零环之间的一个环同态（保持单位元）. 如果 I 是 R 的非IBN子，且 $J=\langle f(I)\rangle$ 是 S 的真理想（这里 $J=\langle f(I)\rangle$ 表示 $f(I)$ 在 S 中生成的理想）. 则 $J=\langle f(I)\rangle$ 是 S 的非IBN子，当 I 的序型为 (k,h)，J 的序型为 (k',h') 时，我们有 $k'\leqslant k$，$h'|h$.

证 作 R/I 到 S/J 的映射 $\varphi:R/I\to S/J$，$r+I\mapsto f(r)+J$；

不难验证，φ 是定义良好的. 又由于 f 是保持单位元的非零环同态，J 是 S 的真理想，故 φ 亦是一个保持单位元的非零环同态.

由于 $R/I\notin \mathrm{IBN}$，从而 $S/J\notin \mathrm{IBN}$，由命题3.1知，J 是 S 的非IBN子.

因为 I 的序型为 (k,h)，故存在矩阵 $A\in M_{k,k+h}(R/I)$，$B\in M_{k+h,k}(R/I)$；使得 $AB=I_k(R/I)$，$BA=I_{k+h}(R/I)$. 通过上述构造的环同态 φ 的作用，我们有矩阵 $\widetilde{A}\in M_{k,k+h}(S/J)$，$\widetilde{B}\in M_{k+h,h}(S/J)$，使得 $\widetilde{A}\widetilde{B}=I_k(S/J)$，$\widetilde{B}\widetilde{A}=I_{k+h}(S/J)$. 由此得到 $(S/J)^k\simeq(S/J)^{k+h}$. 由于 J 的序型为 (k',h')，由命题3.4知，$k'\leqslant k$，$h'|h$.

定理3.2 设 R 是IBN环，I 是 R 的非IBN子，其序型为 (k,h)，则 $[R/I]$ 在 $K_0(R/I)$ 中的阶是 h.

证明 因为 I 的序型为 (k,h)，故 $(R/I)^k\simeq(R/I)^{k+h}$，从而有 $k[R/I]=(k+h)[R/I]$，因此，$h[R/I]=0$.

另一方面，如果 $n[R/I]=0, n\in \mathbf{Z}^+$，根据[4]知，存在自然数 m，使得 $(R/I)^{n+m}\simeq(R/I)^m$，根据命题3.4，我们有 $h|n$.

推论3.3 令 $\varphi:R\twoheadrightarrow S$ 是一个满的环同态（保持单位元），J 是 S 的非IBN子，则 $[R/\varphi^{-1}(J)]$ 在 $K_0(R/\varphi^{-1}(J))$ 中的阶与 $[S/J]$ 在 $K_0(S/J)$ 中的阶相等.

推论3.4 令 $f:R\to S$ 是非零环之间的保持单位元的环同态. I 是 R 的非IBN子，$J=\langle f(I)\rangle$ 是 S 的真理想，则 $[S/J]$ 在 $K_0(S/J)$ 中的阶整除 $[R/I]$ 在 $K_0[R/I]$ 中的阶.

定理3.3 设 R 是一个IBN环，$I_0\subseteq I_1\subseteq\cdots\subseteq I_n\subseteq\cdots$ 是 R 的一个理想升链. 则

（1）如果 I_0 是 R 的非IBN子，则 I_n 是 R 的非IBN子 $(n=0,1,2,\cdots)$；并且 I_n/I_{n-1} 是 R/I_{n-1} 的非IBN子，I_n/I_{n-1} 与 I_n 有相同的序型.

（2）在（1）的假设之下，存在 $m\in \mathbf{Z}^+$，使得 $n\geqslant m$ 时，I_n 的序型与 I_m 序型相同.

（3）$[R/I_n]$ 在 $K_0(R/I_n)$ 中的阶 $\big|$ $[R/I_{n-1}]$ 在 $K_0(R/I_{n-1})$ 中的阶； 存在 m，使得当 $n\geqslant m$ 时，$[R/I_n]$ 在 $K_0(R/I_n)$ 中的阶与 $[R/I_m]$ 在 $K_0(R/I_m)$ 中的阶相同.

证明 （1）如果 I_0 是 R 的非IBN子，我们有满的环同态 $R/I_0\twoheadrightarrow R/I_n$，由命题3.1知，$R/I_0\notin \mathrm{IBN}$，故 $R/I_n\notin \mathrm{IBN}$，所以，I_n 是 R 的非IBN子.

显然，我们有 $R/I_{n-1}/I_n/I_{n-1}\simeq R/I_n$，根据命题3.5知，$I_n$ 是 R 的非IBN子的充分必要条件是 I_n/I_{n-1} 是 R/I_{n-1} 的非IBN子，且它们有相同的序型.

（2）设 I_n 的序型为 $(k_n, h_n)(n=0,1,2,\cdots)$；仿照命题3.6的证明，我们有 $k_{n+1}\leqslant k_n$，$h_{n+1}|h_n$，由此即有 $k_n\leqslant k_0$，$h_n|h_0(n=0,1,2,\cdots)$，而 k_0，h_0 是固定的正整数，所有这些先于 (k_0, h_0) 的数对也只能有有限多个不相同. 存在 $m\in \mathbf{Z}^+$，使得 $n\geqslant m$ 时，I_n 的序型与 I_m 的序型相同.

（3）由定理3.2及（2）即可得到本结论.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

命题3.7 如果R是IBN环，I是R的非IBN子，$\forall[P]\in K_0R$，$[P]$的阶$=n<\infty$，则

（1）设$[\overline{P}]$的阶$=h_{[\overline{P}]}$，我们有$h_{[\overline{P}]}|n$．

（2）如果$P\oplus Q\simeq R^m$，设$[\overline{Q}]$的阶$=h_{[\overline{Q}]}$，有$h_{[\overline{Q}]}|rn$．

此处，$[\overline{P}]$，$[\overline{Q}]$分别是$[P]$，$[Q]$在$K_0(R/I)$中的象，$r=\dfrac{h[R/I]}{(mn,h[R/I])}$，$h_{[R/I]}$为$[R/I]$在$K_0(R/I)$中的阶．

证明 （1）如果$[P]$的阶为n，有$[P^n]=0$，则存在$t\in Z^+$，使得$P^n\oplus R^t\simeq R^t$，从而有$(P\otimes R/I)^n\oplus(R/I)^t\simeq(R/I)^t$，故$n[\overline{P}]=n[P\otimes R/I]=0$．因此，$h_{[\overline{P}]}|n$．

（2）如果$P\oplus Q\simeq R^m$，有$[P]+[Q]=m[R]$，从而有$n[Q]=mn[R]$；于是存在$R\in Z^+$，使得$Q^n\oplus R^k\simeq R^{k+mn}$，从而$(Q\otimes R/I)^n\oplus(R/I)^k\simeq(R/I)^{k+mn}$，亦即$rn[\overline{Q}]=rmn[R/I]=0$，所以$h_{[\overline{Q}]}|rn$．

§4 张量积的非IBN子及其性质

对于非IBN子的讨论，我们可以推广到K－代数的张量积上来．有如下的

命题4.1 设R、S是可换西环K上的代数，如果$R\underset{K}{\otimes}S\in$IBN，且$R$有非IBN子$I$（或$S$有非IBN子$J$），则$I\underset{K}{\otimes}S$（或$R\underset{K}{\otimes}J$）是$R\underset{K}{\otimes}S$的非IBN子．

证明 显然，$I\underset{K}{\otimes}S$是$R\underset{K}{\otimes}S$的理想，由于I是非的非IBN子，存在$a_{ij},b_{lk}\in R$（$i,k=1,2,\cdots,m$；$j,l=1,2,\cdots,n$；$m\neq n$）使得

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}-\delta_{ik}\in I,\qquad \sum_{j=1}^{n}b_{kj}a_{ji}-\delta_{ki}\in I;$$

于是，$a_{ij}\otimes 1_s$、$b_{lk}\otimes 1_s\in R\underset{K}{\otimes}S$（$i,k=1,2,\cdots,m$；$j,l=1,2,\cdots,n$；$m\neq n$），

$$\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}\otimes 1_s)(b_{jk}\otimes 1_s)-\delta_{ik}\otimes 1_s=\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{jk}-\delta_{ik}\Big)\otimes 1_s\in I\underset{K}{\otimes}S.$$

同理可证
$$\sum_{j=1}^{n}(b_{kj}\otimes 1_s)(a_{ji}\otimes 1_s)-\delta_{ki}\otimes 1_s\in I\underset{K}{\otimes}S.$$

根据定义2.1知，$I\underset{K}{\otimes}S$是$R\underset{K}{\otimes}S$的非IBN子．

定理4.1 设R是域K上的有限维中心单代数，S是任意的IBN K－代数，则$R\underset{K}{\otimes}S$有非IBN子的充分必要条件是S有非IBN子．且J是S的非IBN子的充要条件是$R\underset{K}{\otimes}J$是$R\underset{K}{\otimes}S$的非IBN子．

为证定理4.1，我们需要如下的引理及命题4.2．

引理 如果R是域K上的有限维中心单代数，S是任意的K－代数，则$R\underset{K}{\otimes}S$的理想形如$R\underset{K}{\otimes}J$，这里J是S的理想(见[6])．

命题4.2 设R、S是可换西环K上的代数，J是S的理想，则$R\underset{K}{\otimes}S/R\underset{K}{\otimes}J\simeq R\underset{K}{\otimes}S/J$，(这里是环同构)．

证明 作映射$\varphi: R\underset{K}{\otimes}S/J\to R\underset{K}{\otimes}S/R\underset{K}{\otimes}J$，$\sum r_i\otimes\overline{s_i}\mapsto\sum r_i\otimes s_i+R\underset{K}{\otimes}J$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

不难验证φ是一个确定的K－代数同态．

另一个方面，作映射$\psi: R\underset{K}{\otimes}S/R\underset{K}{\otimes}J\to R\underset{K}{\otimes}S/J$，$\sum r_i\otimes s_i+R\underset{K}{\otimes}J\mapsto\sum r_i\otimes\overline{s_i}$．

不难验证ψ也是一个确定的K—代数同态．

显 然 有 $\psi\varphi=1_{R\underset{K}{\otimes}S/J}$，$\varphi\psi=1_{R\underset{K}{\otimes}S/R\underset{K}{\otimes}J}$． ■

定理4．1的证明 如果$R\underset{K}{\otimes}S$有非IBN子I，根据引理，$I=R\underset{K}{\otimes}J$，这里$J$是$S$的某个理想，由命题3.1知，$R\underset{K}{\otimes}S/R\underset{K}{\otimes}J\notin$ IBN，又根据命题4.2,可以得到$R\underset{K}{\otimes}S/J\notin$ IBN，因此$S/J\notin$ IBN，再利用命题3.1得到J是S的非IBN子．反过来，利用命题4.1，如果J是S的非IBN子，则，$R\underset{K}{\otimes}J$是$R\underset{K}{\otimes}S$的非IBN子．

定理4.2 令K是一个可换酉环，R是K上的有限维中心单代数，S是任意的IBNK—代数，则

（1）如果$J_0\subseteq J_1\subseteq\cdots\subseteq J_n\subseteq\cdots$是$S$的理想升键，下列三点等价：

a）J_0是S的非IBN子；

b）J_n是S的非IBN子；（$n=0,1,2,\cdots$）

c）$R\underset{K}{\otimes}J_n$是$R\underset{K}{\otimes}S$的非IBN子（$n=0,1,2,\cdots$）．

（2）如果J_n的序型是(k_n,h_n)，$R\underset{K}{\otimes}J_n$的序型是$(\widetilde{k}_n,\widetilde{h}_n)$，则$\widetilde{h}_n|h_n$，$\widetilde{k}_n\leqslant k_n$，且存在$m\in\mathbf{Z}^+$，使得对任意$n\in\mathbf{Z}^+$，有$\widetilde{h}_m|h_n$．

（3） $[R\underset{K}{\otimes}S/R\underset{K}{\otimes}J_n]$的阶$|[R\underset{K}{\otimes}S/R\underset{K}{\otimes}J_{n-1}]$的阶；

$[R\underset{K}{\otimes}S/R\underset{K}{\otimes}J_n]$的阶$|[S/J_n]$的阶．

证明 （1）$a)\Leftrightarrow b)$ 定理3.3（1）

$b)\Leftrightarrow c)$ 定理4.1.

（2）令 $f: S\to R\underset{K}{\otimes}S$，$S\mapsto 1_R\otimes S$；

显然，$f(J_n)$在$R\underset{K}{\otimes}S$中生成的理想恰是$R\underset{K}{\otimes}J_n$；根据命题3.6，有$\widetilde{h}_n|h_n$，$\widetilde{k}_n\leqslant k_n$；

由定理3.3（2）知，存在$m\in\mathbf{Z}^+$，使得当$n\geqslant m$时，$R\underset{K}{\otimes}J_n$与$R\underset{K}{\otimes}J_m$的序型相同．因此，对所有的$n\in\mathbf{Z}^+$，$\widetilde{h}_m|\widetilde{h}_n$，故$\widetilde{h}_m|h_n$．

（3）利用定理3.2，定理4.2（2）可以得到本结论． ■

设R是可换酉环K上的代数，S是任意的K—代数，P是R的有限生成投射模，则存在R的有限生成投射模Q，使得 $P\oplus Q\simeq R^m$ （＊）．

如果让$P\overset{\varphi}{\longmapsto}P\underset{K}{\otimes}S$，则$\varphi$把$R$的有限生成投射模映到$R\underset{K}{\otimes}S$的有限生成投射模．因为由（＊），我们有$(P\underset{K}{\otimes}S)\oplus(Q\underset{K}{\otimes}S)\simeq(R\underset{K}{\otimes}S)^m$．于是，我们令

$$\widetilde{\varphi}:\ \mathrm{K}_0R\to\mathrm{K}_0(R\underset{K}{\otimes}S),\quad [P]\mapsto[P\underset{K}{\otimes}S]$$

因此，如果$[P]$在K_0R中的阶为$n<\infty$即$n[P]=0$，从而存在$m\in\mathbf{Z}^+$，使得$P^n\oplus R^m\simeq R^m$，

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由此可得 $(P\underset{K}{\otimes}S)^n\oplus(R\underset{K}{\otimes}S)^m\simeq(R\underset{K}{\otimes}S)^m$，于是在$K_0(R\underset{K}{\otimes}S)$中考虑运算有$n[P\underset{K}{\otimes}S]+$ $+m[R\underset{K}{\otimes}S]=m[R\underset{K}{\otimes}S]$. 由此可以看出：当$R\underset{K}{\otimes}S\notin$ IBN时，$n[P\underset{K}{\otimes}S]=0$.这就是说：当$R\underset{K}{\otimes}S\notin$ IBN时，$\tilde{\varphi}[P]$在$K_0(R\underset{K}{\otimes}S)$中的阶整除$[P]$在$K_0R$中的阶. 故，我们有如下的

命题4.3 令R是可换酉环K上的IBN代数，S是任意K—代数，I是R的非IBN子．作映射$\psi:K_0(R/I)\to K_0(R/I\underset{K}{\otimes}S)$，$[P]\mapsto[P\underset{K}{\otimes}S]$，则$\psi[P]$在$K_0(R/I\underset{K}{\otimes}S)$中的阶整除$[P]$在$K_0(R/I)$中的阶.

本文是在导师周伯埙教授，佟文廷副教授的指导下完成的．作者在此表示衷心的感谢．

参 考 文 献

[1] 周伯埙，左环模的张量积与范畴．南京大学学报（自然科学版），1,1979.
[2] 佟文廷，关于IBN环的一些结果，南京大学学报数学半年刊，2,1984.
[3] J.J.Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Academic Press, 1979.
[4] J.R.Silvester, Introduction to Algebra K—Theory. Chapman & Hall, 1981.
[6] P.M.Cohn, Free Rrings and their Relations, Academic press, 1971.
[6] H.A.德洛滋德，有限维代数（刘绍学等译）．北京师范大学出版社，1983.
[7] 徐岩松，关于K_0的挠子群的一个注记，南京大学学报数学半年刊，No.2, 1986.

Some Properties of Grothendieck Groups of the Quotient Rings of IBN Rings

Zhu Xiaosheng

Abstract

In this paper, we gave the definitions of the non-IBN-fator of a IBN ring and the order-type of the non-IBN-factor. The properties of non-IBN-factor and its order-type are discussed.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.