第9卷 第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.9 No.3
1989年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug., 1989

具有双曲标准坐标的自覆盖映射*

牛 东 晓

（华北电力学院，保定）

摘　要

本文对C^0自复盖映射建立双曲标准坐标，证明了其单一化拓扑稳定性，进而研究了扰动情形下的拓扑熵的稳定性和对其数值的估计．

§1 引言及有关定义

R.Bowen在[7]中对同胚情形提出了双曲标准坐标，本文对C^0自覆盖映射建立双曲标准坐标，证明了其单一化拓扑稳定性，进而研究了扰动情形下的拓扑熵的稳定性和对其数值的估计．

设M是紧连通不带边Riemann流形，记$M^*=\{x=\{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}|x_i\in M, i\in\mathbf{Z}\}$，赋以度量

$d(x,y)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|i|}}d(x_i,y_i)$，$\forall x,y\in M^*$，易验证$(M^*,d)$为紧度量空间．对$f\in C^0(M,M)$与$f$的紧不变集$\Lambda\subseteq M$，令$\Lambda^f=\{x=\{x_i\}_{-\infty}^{+\infty};\ x_i\in\Lambda,\ f(x_i)=x_{i+1},\ i\in\mathbf{Z}\}$，$\Lambda^f$是$(M^*,d)$的闭集，记$q_f:\Lambda^f\to\Lambda^f$为左移同胚、$p:\Lambda^f\to\Lambda$，为$x\mapsto x_0$，则$f\circ P=P\circ q_f$．用$\mathrm{cov}^r(M)(r\geqslant 0)$表示$M$上$C^r$自覆盖映射构成的空间，$\mathrm{cov}^0(M)$具有度量$d(f,g)=\sup_{x\in M}d(f(x),g(x))$，$\forall f,g\in\mathrm{cov}^0(M)$．对$\delta>0$，记$U_\delta(f)=\{g\in\mathrm{Cov}^0(M)|d(f,g)<\delta\}$．

定义1　设$f\in\mathrm{cov}^0(M)$，对$\varepsilon>0$和$x\in\Lambda^f$，记$W_\varepsilon^s(x,f)=\{y_0\in M|d(f^n(x_0),f^n(y_0))<\varepsilon,n\in\mathbf{Z}^+\}$．$W_\varepsilon^u(x,f)=\{z_0\in M|\exists\{z_{-n}\}_{n=0}^{+\infty}\subset M$，使$f(z_{-n-1})=z_{-n}$ $d(z_{-n},x_{-n})<\varepsilon,n\in\mathbf{Z}^+\}$．分别称$W_\varepsilon^s(x,f)$和$W_\varepsilon^u(x,f)$为$f$关于$x$的局部稳定集和局部不稳定集．

定义2　若$\forall\varepsilon>0$，$f\in\mathrm{cov}^0(M)$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall x,y\in\Lambda^f$，只要$d(x,y)<\delta(\varepsilon)$，就有$W_\varepsilon^s(x,f)\cap W_\varepsilon^u(y,f)\neq\emptyset$，则称$f$在$\Lambda$上具有标准坐标；又若$\exists\varepsilon^*>0$，$0<\lambda<1$和$c\geqslant 1$，$\forall x\in\Lambda^f$，$p(x)=x_0$，若$y_0\in W_{\varepsilon^*}^s(x,f)$，则$d(f^n(x_0),f^n(y_0))\leqslant c\lambda^n d(x_0,y_0)$，$n\in\mathbf{Z}^+$；若$y_0\in W_{\varepsilon^*}^u(x,f)$，则$\exists\{y_{-n}\}_{n=0}^{+\infty}$，使$f(y_{-n-1})=y_{-n}$，使$d(x_{-n},y_{-n})\leqslant c\lambda^n d(x_0,y_0)$，$n\in\mathbf{Z}^+$，就称$f$在$\Lambda$上具有双曲标准坐标．

定义3　$f\in\mathrm{cov}^0(M)$称为在M上可扩的，若存在常数$\zeta>0$，对任$n\in\mathbf{Z}$，$x,y\in M^f$，$d(x_n,y_n)<\zeta$，则$x=y$．称ζ为f的可扩常数．

* 1987年12月21日收到．

定义 4 称$f\in \mathrm{cov}^0(M)$是单一化拓扑稳定的，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$g\in U_\delta(f)$时，存在连续满射$h:M^g\to M^f$，满足:

(i) $h\circ q_g=q_f\circ h$

(ii) $d(h(x),x)<\varepsilon\quad,\forall x\in M^g$.

文中公理A、双曲覆盖映射及伪轨跟踪性质的定义分别见[4]、[3]及[2].

§2 单一化拓扑稳定性

根据定义2不难得知，若Λ是具有局部乘积结构的双曲不变集，那么f在Λ上就有双曲标准坐标．于是由[4]命题1及[2]定理3(s)(3(u)，再仿[1]的第六章(2.2.2)定理的证明我们有:

命题 1 (1) 设$f\in\mathrm{cov}^1(M)$且满足公理A，则$f|_\Omega$上具有双曲标准坐标．

(2) 双曲覆盖映射在M上具有双曲标准坐标．

引理 1 设$f\in\mathrm{cov}^0(M)$具有双曲标准坐标，则f是可扩的，ε^*即是一个可扩常数．

证明 设对任$x,y\in M^f$，$n\in\mathbf{Z}$，有$d(x_n,y_n)<\varepsilon^*$，ε^*的意义见定义2,则$y_n\in W^s_{\varepsilon^*}(g^n_f(x),f)$，$p(q^n_f(x))=x_n$，对$r\in\mathbf{Z}^+$就有$d(x_{n+r},y_{n+r})\leqslant c\lambda^r d(x_n,y_n)<c\lambda^r\varepsilon^*$．取$n=-r+i$，$i\in\mathbf{Z}$，则有$d(x_i,y_i)<c\lambda^r\varepsilon^*$，对此式令$r\to+\infty$，则$x_i=y_i$，$\forall i\in\mathbf{Z}$．故$x=y$，由定义3知$f$是可扩的，$\varepsilon^*$就是可扩常数．

引理 2 设$f\in\mathrm{cov}^0(M)$在M上具有双曲标准坐标，则对任$\frac{\varepsilon^*}{2}>\beta>0$,存在$\alpha>0$,使$M$中任$\alpha$伪轨$\{\tilde{x}_i\}_{-\infty}^{+\infty}$都可被唯一存在的$y\in M^f$所$\beta$跟踪．

证明 仿[1]的第七章(4.1.3)定理的证明即知α伪轨$\{\tilde{x}_i\}_{-\infty}^{+\infty}$可被某点$y\in M^f$所$\beta$跟踪下证唯一性．设$\exists\, y,z\in M^f$都$\beta$跟踪$\alpha$伪轨$\{\tilde{x}_i\}_{-\infty}^{+\infty}$，则$d(y_i,z_i)\leqslant d(y_i,\tilde{x}_i)+d(\tilde{x}_i,z_i)<2\beta<\varepsilon^*$，$\forall i\in\mathbf{Z}$，由可扩性知$y=z$．

命题 2(周期点的构造) 设$f\in\mathrm{cov}^0(M)$具有双曲标准坐标，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall y_0\in M$，若$d(f^m(y_0),y_0)<\delta$，则$\exists\, x_0\in M$，使得$f^m(x_0)=x_0$，且$d(f^k(x_0),f^k(y_0))<\varepsilon$，对所有$0\leqslant k\leqslant m$，$m\in\mathbf{N}$．

证明 由引理1知f可扩，ε^*是可扩常数，又由引理2,$\forall\frac{\varepsilon^*}{2}>\varepsilon>0$，$\exists\, 0<\alpha<\varepsilon$使得$M$的的任意$\alpha$伪轨具有$\varepsilon$跟踪．$\forall y_0\in M$，取$\delta=\alpha$，$m\in\mathbf{N}$，若$d(f^m(y_0),y_0)<\alpha$，记$i\equiv k\pmod m$，$0\leqslant k<m$)，令$x_i=f^k(y_0)$，则$\tilde{x}_{m+i}=\tilde{x}_i$，且易见$\{\tilde{x}_i\}_{-\infty}^{+\infty}$是$\alpha$伪轨，可被某点$x\in M^f$所$\varepsilon$跟踪，即$d(x_i,\tilde{x}_i)<\varepsilon$，$\forall i\in\mathbf{Z}$．令$z=q^m_f(x)$，则$z_i=x_{m+i}$，$d(z_i,x_i)=d(x_{m+i},x_i)\leqslant d(x_{m+i},\tilde{x}_m$ $\tilde{x}_{m+i})+d(\tilde{x}_i,x_i)<2\varepsilon<\varepsilon^*$，对任$i\in\mathbf{Z}$．由可扩性，$z=x$，即$q^m_f(x)=x$，故有$p\circ q^m_f(x)=p(x)$，即$f^m(x_0)=x_0$．

又 $d(f^k(x_0),f^k(y_0))=d(x_{qm+k},f^k(y_0))=d(x_i,\tilde{x}_i)<\varepsilon(q,k\in\mathbf{Z},\ 0\leqslant k\leqslant m)$.

命题 3 设$f\in\mathrm{cov}^0(M)$具有双曲标准坐标，则$\overline{\mathrm{Per}(f)}=\Omega(f)$.

证明 C^0自覆盖映射f的非游荡点集$\Omega(f)$的定义见[2]中定义4.由引理2和命题2即证．

定理 1 设$f\in\mathrm{cov}^0(M)$在M上具有双曲标准坐标，则f是单一化拓扑稳定的．

证明 由代数拓扑理论知，M具有万有覆盖空间$(\widehat{M},\pi)$．由其性质及M的紧致性并利用[5]引理3关于测地凸规范邻域的结果知，存在$0<l<\frac{\rho}{2}$，使对任$x_0\in M$，$\pi^{-1}(B(x_0,l))$的

每个弧连通分支$\hat{B}(\hat{x}_0)(\hat{x}_0\in\pi^{-1}(x_0)$，$\hat{x}_0\in\hat{B}(\hat{x}_0))$与$B(x_0,l)$同胚，设$(B(x_0,l),\varphi_{x_0})$为规范坐标卡，由之可确定$\widehat{M}$上$C^\infty$微分结构$\{(\hat{B}(\hat{x}_0),\varphi_{x_0}\circ\pi)\,|\,\hat{x}_0\in\pi^{-1}(x_0),\ x_0\in M\}$，且易在$\widehat{M}$上建立Riemann度量，$\hat{d}$为由之诱导的$\widehat{M}$上的度量，使$\forall\hat{x}_0\in\widehat{M}$，$\pi(B(\hat{x}_0,l))=B(\pi(\hat{x}_0),l)$且$\pi|_{B(\hat{x}_0,l)}$为保距映射．由$f\in\mathrm{cov}^0(M)$知，存在$0<r<l$，使$\forall x_0\in M$，$f|_{B(x_0,r)}$为到象集的同胚，$f(B(x_0,r))\subset B(f(x_0),l)$，由[8]知，对任$0<a<r$及任$g\in U_a(f)$，存在同胚$g:\widehat{M}\to\widehat{M}$，使$\pi\circ g=g\circ\pi$，并可使$\hat{d}(\hat{f}(\hat{x}_0),\hat{g}(\hat{x}_0))<a$，$\forall\hat{x}_0\in\widehat{M}$．由$\hat{f}$的连续性易知对任$\hat{x}_0\in\widehat{M}$，$\hat{f}(B(\hat{x}_0,r))\subset B(\hat{f}(\hat{x}_0),l)$．由引理1及充分小可扩常数的存在性，有充分小可扩常数$0<\varepsilon_0<\min\{\frac{\varepsilon^*}{2},r\}$，从$\pi$的局部保距性易知，$f$在$\widehat{M}$上亦有可扩常数$\varepsilon_0$．

由引理2知，$\forall 0<\varepsilon<\varepsilon_0$，$\exists 0<a<\frac{r}{2}$，使$f$的任一$a$伪轨可被$M^f$中唯一点所$\frac{\varepsilon}{3}$跟踪．$\forall g\in U_a(f)$，因$\hat{d}(\hat{f}(\hat{x}_0),\hat{g}(\hat{x}_0))<a$，$\forall\hat{x}_0\in\widehat{M}$，知$\forall\hat{x}_0\in\widehat{M}$，$\hat{x}_0$在$\hat{g}$之下的轨道$\{\hat{g}^i(\hat{x}_0)\}_{-\infty}^{+\infty}$为$\hat{f}$的$a$伪轨，记为$O_{\hat{g}}(\hat{x}_0)$．由$\pi$的局部保距性知$\pi O_{\hat{g}}(\hat{x}_0)$为$f$的$a$伪轨，可设其被$f$的轨道$\{y_i\}_{-\infty}^{+\infty}=y\in M^f\ \frac{\varepsilon}{3}$跟踪．由$\pi$为局部保距映射可知，$\hat{y}_0=[\pi|_{B(\hat{x}_0,r)}]^{-1}(y_0)$在$f$之下的轨道$O_{\hat{f}}(\hat{y}_0)$可$\frac{\varepsilon}{3}$跟踪$O_{\hat{g}}(\hat{x}_0)$，且从$\hat{f}$的可扩性知具有此伪轨跟踪性质的点$\hat{y}_0$是唯一的，因此可定义映射为$\hat{h}:\widehat{M}\to\widehat{M}$，$\hat{x}_0\mapsto\hat{y}_0$．由可扩性及反证法易知，$\forall\varepsilon'>0$，$\exists N>0$，$\forall\hat{y}_0,\hat{z}_0\in\widehat{M}$，若$\hat{d}(\hat{f}^i(\hat{y}_0),\hat{f}^i(\hat{z}_0))<\varepsilon_0$，$|i|\leqslant N$，则$\hat{d}(\hat{y}_0,\hat{z}_0)<\varepsilon'$，从而知$\hat{h}$是连续的，由伪轨跟踪性质易见$\hat{d}(id,\hat{h})<\frac{\varepsilon}{3}<\frac{r}{3}$，由[5]引理7知$\forall\hat{x}_0\in M$，$\hat{h}(B(\hat{x}_0,r))\supset\{\hat{x}_0\}$，故$\hat{h}$为满映，再由引理2伪轨跟踪的唯一性易证$h\circ g=f\circ h$．令$A=\{\pi O_{\hat{g}}(\hat{x}_0)\,|\,\hat{x}_0\in\hat{M}\}\subset M^g$，$h:A\to M^g$，$h:A\to M^f$定义为$\pi O_{\hat{g}}(\hat{x}_0)\mapsto\pi O_{\hat{f}}(\hat{h}(\hat{x}_0))$．由反证法易知，$\forall\varepsilon'>0$及任自然数$N$，$\exists\delta'>0$，$\forall f$的轨道$\{x_i\}_{-N}^{N}$、$\{y_i\}_{-N}^{N}$，若$d(x_i,y_i)<r$，$|i|\leqslant N$，$d(x_0,y_0)<\delta'$，则$d(x_i,y_i)<\varepsilon'$，$|i|\leqslant N$．由此可知$h$是一致连续的，于是$h$可连续延展到$A$的闭包上，易证$A$在$M^g$中稠密，故$\overline{A}=M^g$．由$\hat{h}$是满射知$h(A)$在$M^f$中稠密，因而$h(M^g)=h(\overline{A})=\overline{h(A)}=M^f$，故$h$为连续满射．由引理2易证$h$在$A$上满足$q_f\circ h=h\circ q_g$，且可知$h$在$M^g$上亦满足此式，并易见$d(h(x),x)<\varepsilon$，$\forall x\in M^g$，故$f$是单一化拓扑稳定的．

§3　拓　扑　熵

命题4　设$f\in\mathrm{cov}^0(M)$具有双曲标准坐标，则存在$\delta>0$，当$g\in U_\delta(f)$时，$\mathrm{ent}(f)\leqslant\mathrm{ent}(g)$．

证明　由定理1，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$g\in U_\delta(f)$时，就有连续满射$h:M^g\to M^f$，$h(M^g)=M^f$，使$h\circ q_g=q_f\circ h$．由于[6]中第七章定理7.2知$\mathrm{ent}(q_f)\leqslant\mathrm{ent}(q_g)$，此处$q_f$、$q_g$是左移同胚，由[3]的命题5知$\mathrm{ent}(q_f)=\mathrm{ent}(f)$，故$\mathrm{ent}(f)\leqslant\mathrm{ent}(g)$．

引理3　若$f\in\mathrm{cov}^0(M)$在M上具有双曲标准坐标，则q_f在M^f上也有双曲标准坐标．

证明　$\forall\varepsilon>0$，$\exists$充分小$0<\delta<\frac{\varepsilon}{6}$，$\forall x$、$y\in M^f$，若$d(x,y)<\delta$，则$W^s_{\varepsilon/6}(x,f)\cap W^u_{\varepsilon/6}(y,f)\neq\varnothing$．选取$z_0\in W^s_{\varepsilon/6}(x,f)\cap W^u_{\varepsilon/6}(y,f)$，有$z\in M^f$，$p(z)=z_0$，因$z_0\in W^s_{\varepsilon/6}(x,f)$，$\forall n\in\mathbf{Z}^+$，就$d(x_n,z_n)<\frac{\varepsilon}{6}$．因$d(x,y)<\delta$，故$d(x_i,y_i)<\delta$，$i\in\mathbf{Z}$．又$z_0\in W^u_{\varepsilon/6}(y,f)$，对$k\in\mathbf{Z}^+$就有

$d(x_{-k},z_{-k})\leqslant d(x_{-k},y_{-k})+d(y_{-k},z_{-k})<\delta+\frac{\varepsilon}{6}<\frac{\varepsilon}{3}$，则$d(q_f^n(x),q_f^n(z))=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|l|}}d(x_{n+l},$

$z_{n+l})=\sum_{l=-\infty}^{-(n+1)}\frac{1}{2^{|l|}}d(x_{n+l},z_{n+l})+\sum_{l=-n}^{+\infty}\frac{1}{2^{|l|}}d(x_{n+l},z_{n+l})<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{2^n}+[(1-\frac{1}{2^n})+2]\cdot\frac{\varepsilon}{6}<\frac{\varepsilon}{3}$

$+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，$\forall n\in\mathbf{Z}^+$．则 $z\in W^s_\varepsilon(x,q_f)$．同理可证 $z\in W^u_\varepsilon(y,q_f)$，故$W^s_\varepsilon(x,q_f)\cap W^u_\varepsilon(y,q_f)\neq\varnothing$．

设ε^*是f的可扩常数，$\forall x\in M^f$，若$y\in W^s_{\varepsilon^*}(x,q_f)$，则$\varepsilon^*>d(q^n_f(x),q^n_f(y))=\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|i|}}d(x_{n+i},y_{n+i})$，$\forall n\in\mathbf{Z}^+$．故$d(x_i,y_i)<\varepsilon^*$，$\forall i\in\mathbf{Z}$，且 $y_i\in W^s_{\varepsilon^*}(q^i_f(x),f)$．因$f$具有双曲曲标准坐标，对$\varepsilon^*$，存在 $0<\lambda<1$ 和 $c\geqslant1$ 使 $d(x_{i+n},y_{i+n})\leqslant c\lambda^n d(x_i,y_i)$，$\forall n\in\mathbf{Z}^+$．从而

$$d(q^n_f(x),q^n_f(y))=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|i|}}d(x_{n+i},y_{n+i})\leqslant c\lambda^n\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|i|}}d(x_i,y_i)=c\lambda^n d(x,y),\quad\forall n\in\mathbf{Z}^+.$$

同理可证，若 $y\in W^s_{\varepsilon^*}(x,q_f)$，则 $d(q_f^{-n}(x),q_f^{-n}(y))\leqslant c\lambda^n d(x,y)$，$\forall n\in\mathbf{Z}^+$．故$q_f$在$M^f$上有双曲标准坐标．

定理 2 设$f\in\mathrm{cov}^0(M)$具有双曲标准坐标，则

（1）若$\Omega(f)$不是有限的，就有$\mathrm{ent}(f)>0$．

（2）$\mathrm{ent}(f)=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\log N_n(f)$．

证明 （1）若$\Omega(f)$不是有限的，则$(\Omega(f))^f$不是有限的，则由[3]的命题2知$\Omega(q_f)=(\Omega(f))^f$不是有限的，由引理3知左移同胚$q_f$在$M^f$上具有双曲标准坐标，再由[7]的(4.6)定理可得$\mathrm{ent}(q_f)>0$，根据[3]的命题5就有$\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(q_f)>0$．

（2）因 $N_n(f)=\mathrm{Card}(\mathrm{Per}_n(f))$，易证$N_n(f)=N_n(q_f)$，再由引理3和[7]的(4.1)定理及[3]的命题5就得$\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(q_f)=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\log N_n(q_f)=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\log N_n(f)$．

推论 1 若$f\in\mathrm{cov}^1(M)$满足公理A，只要$\Omega(f)$不是有限的，则$\mathrm{ent}(f)>0$．

证明 由[3]的命题2知$f(\Omega(f))=\Omega(f)$．将$\Omega(f)$就可看作新的空间，$\Omega_1(f)$是相对于$\Omega(f)$来说的非游荡点集，由公理A可证$\Omega_1(f)=\Omega(f)$．由命题1和定理2，若$\Omega_1(f)=\Omega(f)$不是有限的，则$\mathrm{ent}(f|_{\Omega(f)})>0$．又由[7]的2.4定理有$\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(f|_{\Omega(f)})>0$．

推论 2 若f是双曲覆盖映射，只要$\Omega(f)$不是有限的，则$\mathrm{ent}(f)>0$．

证明 由命题1和定理2即可证．

谨此对我的导师陈藻平教授和何连法副教授的指导表示衷心感谢．

参 考 文 献

[1] 张筑生，微分动力系统讲义，北京大学数学研究所印，1983．

[2] 阳世龙，数学学报，29(1986)，3：420—427．

[3] 阳世龙，数学学报，29(1986)，5：590—594．

[4] 陈藻平，何连法，阳世龙，中国科学，A辑，5(1987)，458—462．

[5] 张筑生，中国科学，A辑，5(1984)，408—416．

[6] Peter Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer—Verlag, 1982.

[7] R. Bowen, Proc. Symp. Pure Math., 14(1970), 23—41.

[8] Mañé and Pugh, Stability of Endomorphisms, Dynamical Systems, Warwick, 1974, 175—184.