第10卷 第3期
1990年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.3
Aug. 1990

Artin环与Noether环的一个刻画

吴志祥

(苏州医学院数学组)

在〔1〕文中利用极大左理想刻画了Noether环，本文引进Noether左理想、Artin左理想、m左理想等概念（当I是环R的极大左理想时，I既是Noether、Artin的也是m的，此时$m=1$.），证明了〔1〕文中相应的结论，给出了相应的Artin环的刻画.

定义1 环R的左理想I称为Artin (Noether)，如果R/I是Artin (Noether) R模.

定义2 环R的左理想I称为m理想，如果R/I的任何R子模都可由m个元生成.

本文的主要结论：

定理1 设I是R的Noether左理想，则R是左Noether环的充要条件是含于I的R任何左理想是有限生成的.

定理2 设I是R的Artin左理想，则R是左Artin的充要条件是含于I的R的任何左理想J都存在有限个含于I的R的左理想$k_1,\cdots,k_n$，使得$J=\bigcap_{i=1}^{n}k_i$，当且仅当含于I的R的任何非空左理想集合有最小元.

定理3 设I是R的m左理想，存在n使R的每个左理想都是由n个元素生成，当且仅当含于I的R的任何左理想都由k个元素生成. 此时有$n\leqslant m+k$.

为了证明定理1、2、3，我们首先证明：

引理1 设M的子模N是有限生成的，且M/N也是有限生成的，则M是有限生成的.

证明 设M/N是由$x_1+N,\cdots,x_n+N$生成，N由$y_1,\cdots,y_m$生成. 则$\forall m\in M$，存在$a_1,\cdots,a_n\in R$，使得$m-(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\in N$，从而存在$b_1,\cdots,b_m\in R$，使得$m-(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)=b_1y_1+\cdots+b_my_m$. 从而$m=a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b_1y_1+\cdots+b_my_m$，从而$\{x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m\}$生成了$M$，即$M$是有限生成的.

引理2 设M是一个左R模，则下列命题等价：

（1）M是Noether模；

（2）M的任何子模都是有限生成的；

（3）M的任何非空子模集合含有最大元.

证明 见〔2〕文P.127，命题10.9.

引理3 设M是一个左R模，则下列命题等价：

* 1988年9月20日收到.

（1）M是 Artin；

（2）M的任何商模是有限上生成的；

（3）M的任何非空子模集合有最小元；

（4）对M的任何子模N，如果存在一族子模 N_i（$i\in\mathscr{I}$）使得$N=\bigcap\limits_{i\in\mathscr{I}}N_i$，则存在有限个子模$N_1,\cdots,N_n$ 使得$N=\bigcap\limits^{n}N_i$，

证明 见〔3〕, p.147.

引理 4 设有R模正合列$0\to K\to M\to N\to 0$，那么M是 Artin（Noether）当且仅当K和N都是 Artin（Noether）模.

证明：〔2, p.128，命题10.12〕.

定理 1 的证明 如果R是左 Noether环，则含于I的R的左理想是I的R子模，也是R的子模，R是左 Noether环，则这样的左理想是有限生成的.

反之，如果含于I的R的任何左理想是有限生成的，从而R左模I的任何子模是有限生成的，由引理2知I是Noether模．而R/I是Noether模，在正合列$0\to I\to R\to R/I\to 0$中I、R/I是Noether模，由引理4知，R是左 Noether 模，从而R是左 Noether 环.

类似地我们利用引理3、引理4可证得定理2，用引理1证得定理3.

参 考 文 献

〔1〕Tong Weiting, J. Math. Res. Exposition Vol.8, 3(1988),(338-340).

〔2〕Frank W. Anderson and kemt R. Fuller, Rings and Categories of Modules, New York Springer-Verlag Inc. New York (1973), 124—128.

〔3〕Kasch, F., Modules and Rings, Acad. Press, 1982.

Characterizations of Artinian Rings and Noetherian Rings

Wu Zhixiang

(Suzhou Medical college)

In this paper we defined the Artinian ideal, the Noetherian ideal, the m-ideal of a ring R, and characterized R by these ideals, so that we generalized the results of〔1〕.