第10卷 第3期
1990年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vo.10 No.3
Aug. 1990

组合最优化中的布尔方法(续一)

彼得·哈默 刘彦佩 布鲁诺·席莫昂

§7 对偶性

我们还是先从如下的一般拟布尔最优化问题——称之为原问题——开始:

$$z=\max_{x\in B^n} f(x). \tag{7.1}$$

任一线性拟布尔函数 $t(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n$, 如果对于任何 $x\in B^n$ 均有 $t(x)\geqslant f(x)$, 则称 $t(x)$ 为 $f(x)$ 的一个**上平面**. 若用 $t(x)$ 代替(7.1), 则得

$$\max_{x\in B^n} t(x). \tag{7.2}$$

称这个问题为(7.1)的**线性松驰**. 当然, (7.2)的最优值提供了(7.1)的一个上界.

令 $\mathscr{T}$ 为 $f(x)$ 的所有上平面组成的集合. 我们的兴趣在于找 $f(x)$ 的这样的一个上平面 $t_0(x)$ 使得(7.2)的最优值与(7.1)的最优值最接近. 于是, 导致确定

$$w=\min_{t\in\mathscr{T}}\max_{x\in B^n} t(x) \tag{7.3}$$

称(7.3)为(7.1)的**平面对偶**.

如果一个上平面 t^* 使得 $\max\limits_{x\in B^n} t^*(x)=w$, 则称 t^* 是**最好的**. 一般情况下, 总有 $w\geqslant z$. 差 $w-z$ 被称为对于 $\mathscr{T}$ 的**平面对偶亏空**. 如果对于任何 $x\in B^n$, 都有 $f(x)=\min\limits_{t\in\mathscr{T}} t(x)$, 则称 $\mathscr{T}$ 是**完备的**. 对于完备的 $\mathscr{T}$, 总有

$$w=\min_{t\in\mathscr{T}}\max_{x\in B^n} t(x)\geqslant\max_{x\in B^n}\min_{t\in\mathscr{T}} t(x)=z. \tag{7.4}$$

现在, 回到二次的情形,

$$f(x)=x^TQx=\sum_{i<j} q_{ij}x_ix_j. \tag{7.5}$$

对于每一项 $q_{ij}x_ix_j$, 引进一个局部平面,

$$r_{ij}(x_i,x_j)=a_{ij}x_i+b_{ij}x_j+c_{ij}. \tag{7.6}$$

而且, 可以看出, $r_{ij}(x_i,x_j)$ 是 $q_{ij}x_ix_j$ 的一个上平面, 当且仅当

$$c_{ij}\geqslant 0,\ a_{ij}+c_{ij}\geqslant 0,\ b_{ij}+c_{ij}\geqslant 0,\ a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}\geqslant q_{ij}. \tag{7.7}$$

这时, 称它为 $f(x)$ 的**局部上平面**.

进而, (7.7)等价于

$$r_{ij}(x_i,x_j)=\begin{cases}\lambda_{ij}x_i+(q_{ij}-\lambda_{ij})x_j, & q_{ij}>0;\\ \lambda_{ij}(1-x_i-x_j), & q_{ij}<0.\end{cases}$$

其中，　　　　　　　$0 \leqslant \lambda_{ij} \leqslant |q_{ij}|$，　$1 \leqslant i, j \leqslant n$.

记 $P=\{(i,j) \mid q_{ij}>0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ 和 $N=\{(i,j) \mid q_{ij}<0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$. 对于任意 $0 \leqslant \lambda_{ij} \leqslant |q_{ij}|$，$(i,j) \in P \cup N$，上平面

$$r(x,\lambda)=\sum_{(i,j)\in P}(\lambda_{ij}x_i+(q_{ij}-\lambda_{ij})x_j)+\sum_{(i,j)\in N}\lambda(1-x_i-x_j)$$

被称为 $f(x)$ 的**天篷**. 合并同类项之后，

$$r(x,\lambda)=a_0(\lambda)+a_1(\lambda)x_1+\cdots+a_n(\lambda)x_n \tag{7.8}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned} a_0(\lambda) &= \sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}\ ; \\ a_i(\lambda) &= q_{ii}+\sum_{(j,i)\in P}{}_j\, g_{ji}+\sum_{(i,j)\in P}{}_j\, \lambda_{ij} \\ &\quad -\sum_{(j,i)\in P}{}_j\, \lambda_{ji}-\sum_{(i,j)\in N}{}_j\, \lambda_{ij}-\sum_{(j,i)\in N}{}_j\, \lambda_{ji}, \end{aligned}\right] \tag{7.9}$$

$1 \leqslant i \leqslant n$.

令 $\mathscr{R}$ 为 $f(\lambda)$ 的所有天篷的集合. 这时，确有如下的美妙结果.

定理7.1　$\mathscr{R}$ 是完备的.

证明　容易看出，对于 f 的任一项 $q_{ij}x_ix_j$，总有 λ^*，$0 \leqslant \lambda^*_{ij} \leqslant |q_{ij}|$ 使得

$$q_{ij}x_ix_j=\begin{cases}\lambda^*_{ij}x_i+(q_{ij}-\lambda^*_{ij})x_j, & (i,j)\in P; \\ \lambda^*_{ij}(1-x_i-x_j), & (i,j)\in N.\end{cases}$$

实际上，$\lambda^*_{ij}=|q_{ij}|x_i$.　■

当 f 为二次拟布尔函数，对于 $\mathscr{R}$ 的为(7.4)所定义的平面对偶被称为**天篷对偶**. 可见天篷对偶的最优值是原问题的最优值的一个好的上界.

从§4中所讨论的可知，对于任何一个拟布尔函数 f 总存在一个常数 c_0 和一个正形式的拟布尔函数 $\psi(x)$ 使得

$$f(x)+\psi(x)=c_0. \tag{7.10}$$

可见，c_0 是 $z=\max\limits_{x\in B^n} f$ 的一个上界. 而且，$c_0=z$，当且仅当 $\psi(x)$ 的布尔支架 $\widetilde{\psi}(x)=0$ 是相容的. 我们也称使得 $\widetilde{\psi}=0$ 的 x 为它的**根**. 如果 $f(x)$ 是二次的，可惜的是不能保证总有一个二次正形式 ψ，使得 $\widetilde{\psi}$ 有根. 当然，如果有这样的 ψ，那么，确定 $f(x)$ 的最小值问题就属于 $\mathscr{P}$ 了. 因为前面已经揭示(§3)求一个二次布尔方程的解的问题为P—问题. 即属于 $\mathscr{P}$. 至于如何判别一个二次拟布尔函数具有一个二次正形式，使得它的布尔支架有根以及这种判别是否有效，确是值得进一步研究的. 不过，我们总可提出这样的问题：在 $f(x)$ 的所有二次正形式中使得满足(7.10)的最小的 c_0 是多少？这个最小的 c_0 就称为 f 的**高度**，用 $H(f)$ 表之. 自然，$H(f) \geqslant z$. 因此，高度提供了 $\max\limits_{x\in B^n} f(x)$ 的又一个上界.

一个拟布尔函数 $g(x)$ 称为**正的**，如果存在一个正形式 ψ 使得对于任何 $x \in B^n$，$g(x)=\psi(x)$. 进而，若 ψ 是二次的，则称 g 为**二次的正函数**.

对于一个给定的二次拟布尔函数 f，那个唯一的使得对于任何 $x \in B^n$，

$$f(x)+f^*(x)=H(f) \tag{7.11}$$

的二次正函数 f^* 被称为 f 的**补**. 一个二次正函数 g，如果不再存在另一个二次正函数 g' 和一

个常数$k>0$使得$g=k+g'$，则称g是一个平台.

引理7.1 任何二次布尔函数f的补f^*都是平台.

证明 否则，若有f'和$k>0$使得$f^*=f'+k$，则$f+f'=H(f)-k$. 与$H(f)$为f的高度矛盾. ■

定理7.2 对于任何二次正函数g，有$g^{**}\leqslant g$.且,取等式，当且仅当g是一个平台.

证明 由于$g+g^*=H(f)$和$g^*+g^{**}=H(g^*)$，有$H(g)=g^*+g\geqslant H(g^*)$. 又，$g=g^{**}+k$，$k=H(g)-H(g^*)\geqslant 0$. 即，$g^{**}\leqslant g$.

进而，若g是一个平台，则$k=0$.从而，$g^{**}=g^*$. 反之，若$g^{**}=g$，则g是g^*的补. 由引理7.1，g必为一个平台. ■

由这个定理就保证了：对于任一二次拟布尔函数f，虽然一般而论，$f^{**}\neq f$.但，总有$f^{***}=f^*$.

§8 线 性 化

这里，也是为了确定二次拟布尔函数最大值的上界. 原始思想来自Rhys[34].对于$f(x)$中的一项$q_{ij}x_ix_j$，如果$(i,j)\in N$则用$q_{ij}x_j-q_{ij}\overline{x_i}x_j$代替. 从而，可将形如(5.2)的$f$变为

$$f(x)=\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}x_ix_j-\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}\overline{x_i}x_j+\sum_{i=1}^{n}(q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}{}_j\,q_{ji})x_i \tag{8.1}$$

然后，引进新的0—1变量$y_{ij}=\hat{x}_i\hat{x}_j$并加约束条件可将(5.1)化为如下形式的0—1规划：

$$\max(\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}y_{ij}-\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}y_{ij}+\sum_{i=1}^{n}(q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}{}_j\,q_{ji}x_i) \tag{8.2}$$

且满足条件：

$$\begin{cases} y_{ij}\leqslant x_i, \quad y_{ij}\leqslant x_j, \quad (i,j)\in P; & (8.3)\\ y_{ij}\leqslant 1-x_i, \quad y_{ij}\leqslant x_j, \quad (i,j)\in N; & (8.4)\\ x_i, y_{ij}\in B, \quad 1\leqslant i\leqslant n, \quad (i,j)\in P\cup N. & (8.5)\end{cases}$$

容易证明，它与原问题(5.1)是等价的. 这个0—1规划形式被称为**离散的Rhys形式**. 或简记**drf**.

Rhys已经证明：当$N=\varnothing$时，约束(8.5)可以用

$$0\leqslant x_i\leqslant 1,\ y_{ij}\geqslant 0 \tag{8.6}$$

所代替. 因为这时约束的系数矩阵是全单位模的. 当然，在(8.6)中，$y_{ij}\geqslant 0$可以不考虑.这就变成了一般的线性规划问题. 自然，属于$\mathscr{P}$. 因此，我们只需研究$N\neq\varnothing$的情形，由(8.2)和约束(8.3)，(8.4)以及(8.6)所描述的线性规划问题也是原问题(5.1)和(5.2)的一种线性松驰. 这时的线性规划模型被称为**连续Rhys形式**. 或简记**crf**. 当然，也易验证，总有$z_{crf}\geqslant z$. 其中，z_{crf}表示crf的最优值.

由于在确定(8.1)时，引进那些变量的补有任意性. 例如

$$-x_ix_j=-x_i+\overline{x_i}x_j=-x_j+x_i\overline{x_j}=\frac{1}{2}(-x_i-x_j+\overline{x_i}x_j+x_i\overline{x_j})$$

也许选择的好，可将f直接转化为所有二次项的系数皆正的情况. 不过，下面的定理8.2却指出了所有这些依引进变量补的不同方式所建立的线性规划实际上全是一样的. 证明这个定理的关键在于下面的表示定理.

定理8.1 令 $f(x)$ 如(5.2)所示. ψ 是它的一个齐次的二次正规正形式. $l(x)$ 为一个线性函数. 则, 对于所有的 $x \in B^n$,

$$f(x)=\psi(x,\overline{x})+l(x), \tag{8.7}$$

当且仅当存在 λ_{ij}, w_{ij}, $(i,j)\in P\cup N$, 使得

$$\psi(x,\overline{x})=\sum_{(i,j)\in P}(\lambda_{ij}x_ix_j+w_{ij}\overline{x_i}\overline{x_j})+\sum_{(i,j)\in N}(\lambda_{ij}\overline{x_i}x_j+w_{ij}x_i\overline{x_j}); \tag{8.8}$$

$$l(x)=l_0+\sum_{i=1}^{n}l_ix_i. \tag{8.9}$$

其中,

$$\lambda_{ij}\geqslant 0,\quad w_{ij}\geqslant 0,\quad \lambda_{ij}+w_{ij}=|q_{ij}|,\quad (i,j)\in P\cup N; \tag{8.10}$$

$$\left.\begin{aligned} l_0&=-\sum_{(i,j)\in P}w_{ij},\\ l_i&=q_{ii}+\sum_{(j,i)\in P}{}_j\, w_{ji}+\sum_{(i,j)\in P}{}_j\, w_{ij}\\ &\quad-\sum_{(j,i)\in N}{}_j\,\lambda_{ji}-\sum_{(i,j)\in N}{}_j\, w_{ij}, \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

$i=1,2,\cdots,n$.

证明 充分性. 只要将(8.8—11)代入(8.7)经过整理和化简即可得.

必要性. 设(8.7)中的 $\psi(x,\overline{x})$ 具有如下形式:

$$\psi(x,\overline{x})=\sum_{(i,j)}(a_{ij}x_ix_j+b\overline{x_i}\overline{x_j}+c_{ij}\overline{x_i}x_j+d_{ij}x_i\overline{x_j}). \tag{8.12}$$

其中 $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}\geqslant 0$. 由正规性, (i,j), $i<j$, 可以剖分为三个部分

$$S_1=\{(i,j)\mid a_{ij}+b_{ij}>0,\quad c_{ij}=d_{ij}=0\};$$
$$S_2=\{(i,j)\mid c_{ij}+d_{ij}>0,\quad a_{ij}=b_{ij}=0\};$$
$$S_3=\{(i,j)\mid a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}=d_{ij}=0\}.$$

从而, 将 $\overline{x_i}$ 用 $1-x_i$ 代替, $i=1,2,\cdots,n$, 之后, $f(x)-\psi(x,\overline{x})$ 之二次项部分变为

$$\sum_{(i,j)\in S_1}(q_{ij}-a_{ij}-b_{ij})x_ix_j+\sum_{(i,j)\in S_2}(q_{ij}+c_{ij}+d_{ij})x_ix_j \tag{8.13}$$

由无补变量出现的拟布尔函数的多项表示式的唯一性可得: 对于 $(i,j)\in S_1$, $q_{ij}-a_{ij}-b_{ij}=0$, 和对于 $(i,j)\in S_2$, $q_{ij}+c_{ij}+d_{ij}=0$. 由 a_{ij}, b_{ij}, 和 c_{ij} 和 d_{ij} 的非负性, 有 $S_1=P$, $S_2=N$. 从而, (8.8)和(8.10)满足. 而且,

$$\begin{aligned} l(x)&=l_0+\sum_{i=1}^{n}l_ix_i=f(x)-\psi(x,\overline{x})\\ &=\sum_{i=1}^{n}q_{ii}x_i+\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}x_ix_j-\sum_{(i,j)\in P}\lambda_{ij}x_ix_j-\sum_{(i,j)\in P}w_{ij}(x_ix_j-x_i-x_j+1)\\ &\quad+\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}x_ix_j+\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}(x_j-x_ix_j)-\sum_{(i,j)\in N}w_{ij}(x_i-x_ix_j). \end{aligned}$$

由(8.10), 消去其中所有二次项. 经比较系数即可得(8.11). ■

现在, 我们可以用 f 的由定理8.1所给出的一般形式相应地得到crf的一般形式:

$$z_{\mathrm{gcrf}}=\max\sum_{(i,j)\in P\cup N}(\lambda_{ij}y_{ij}+w_{ij}z_{ij})+\sum_{i=1}^{n}l_ix_i+l_0 \tag{8.14}$$

且满足条件:

$$y_{ij}\leqslant x_i,\ y_{ij}\leqslant x_j,\ z_{ij}\leqslant 1-x_i,\ z_{ij}\leqslant 1-x_j,\ (i,j)\in P; \tag{8.15}$$

$$y_{ij}\leqslant 1-x_i,\ y_{ij}\leqslant x_j,\ z_{ij}\leqslant x_i,\ z_{ij}\leqslant 1-x_j,\ (i,j)\in N; \tag{8.16}$$

$$0\leqslant x_i\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ y_{ij}\geqslant 0,\ z_{ij}\geqslant 0,\ (i,j)\in P\cup N. \tag{8.17}$$

由（8.14—8.17）所确定的最优化问题被称为一般连续**Rhys**形式．或简记 **gcrf**．当所有$N_{ij}=0$，就变成了crf．

定理8.2 $z_{\rm crf}=z_{\rm gcrf}$．

证明 首先，若线性规划（8.14—17）有一个最优解(x^*,y^*,z^*)使得

$$y^*_{ij}=\min\{x^*_i,x^*_j\},\quad z^*_{ij}=\min\{1-x^*_i,1-x^*_j\},\qquad (i,j)\in P;$$

$$y^*_{ij}=\min\{1-x^*_i,x^*_j\},\quad z_{ij}=\min\{x^*_i,1-x^*_j\},\qquad (i,j)\in N.$$

且，记$U^n=[0,1]^n$为n-维单位立方体．则有

$$\begin{aligned}z_{\rm gcrf}=\max_{x\in U^n}\{&\sum_{(i,j)\in P}\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+\sum_{(i,j)\in P}w_{ij}\min\{1-x_i,1-x_j\}\\&+\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+\sum_{(i,j)\in N}w_{ij}\min\{x_i,1-x_j\}\\&+\sum_{i=1}^n(q_{ii}+\sum_{(i,j)\in P}w_{ij}+\sum_{(j,i)\in P}w_{ji}-\sum_{(j,i)\in N}\lambda_{ji}-\sum_{(i,j)\in N}w_{ij})x_i-\sum_{(i,j)\in P}x_{ij}\}.\end{aligned}\tag{8.18}$$

而，对于crf，有

$$\begin{aligned}z_{\rm crf}=\max_{x\in U^n}\{&\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}\min\{x_i,x_j\}\\&-\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+\sum_{i=1}^n(q_{ii}+\sum_{(i,j)\in N}q_{ij})x_i\}.\end{aligned}\tag{8.19}$$

不管怎样，对于所有$x\in U^n$，$(i,j)\in P$，有

$$\begin{aligned}&\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+w_{ij}\min\{1-x_i,1-x_j\}+w_{ij}x_j+w_{ij}x_i-w_{ij}\\&=\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+w_{ij}(1-\max\{x_i,x_j\})+w_{ij}x_j+w_{ij}x_j-w_{ij}\\&=\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+w_{ij}(x_i+x_j-\max\{x_i,x_j\})\\&=\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+w_{ij}\min\{x_i,x_j\},\end{aligned}$$

由于（8.10）中的$\lambda_{ij}+w_{ij}=q_{ij}$，

$$=q_{ij}\min\{x_i,x_j\}. \tag{8.20}$$

相仿地，对于所有$x\in U^n$和$(i,j)\in N$，有

$$\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+w_{ij}\min\{x_i,1-x_j\}-\lambda_{ij}x_j-w_{ij}x_j$$

由（8.10）中的$\lambda_{ij}+w_{ij}=-q_{ij}$，

$$\begin{aligned}&=\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+w_{ij}(1-\max\{1-x_i,x_j\})\\&\quad+q_{ij}x_j+w_{ij}x_j+w_{ij}(1-x_i)-w_{ij}\\&=\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+w_{ij}(1-x_i+x_j-\max\{1-x_i,x_j\})+q_{ij}x_j\\&=\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+w_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+q_{ij}x_j,\end{aligned}$$

再由（8.10）中的$\lambda_{ij}+w_{ij}=-q_{ij}$，

$$=-q_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+q_{ij}x_j. \tag{8.21}$$

将（8.20）和（8.21）分别对$(i,j)\in P$和$(i,j)\in N$求和．然后，比较（8.18）和（8.19），即可得定理． ■

§9　等　价　性

本节的目的在于表明前二节所建立的三种不同类型确定原始最优化问题(5.1)和(5.2)的最优值上界的方法是等价的．设w_R为天篷对偶的最优值，$H(f)$为f的高度．和z_{crf}为连续Rhys形式crf的最优值．则，这里将论证：对于二次拟布尔函数f，有

$$w_R = H(f) = z_{crf}\ . \tag{9.1}$$

首先，研究第一个等式．令ψ是f的一个二次正形式使得$f+\psi=c_0$，c_0是某常数，记

$$\psi(x,\overline{x}) = \psi_0 + \psi_l(x,\overline{x}) + \psi_q(x,\overline{x}). \tag{9.2}$$

其中，ψ_0为常数，ψ_l为所有一次项之和，ψ_q为所有二次项之和．而且，所有二次项的系数全为正．从而，

$$f(x) + \psi_q(x,\overline{x}) = c_0 - \psi_0 - \psi_l(x,\overline{x}). \tag{9.3}$$

可见，(9.3)式右边是$f(x)$的一个上平面．

对于f的一个上平面$p(x)$，如果存在一个齐次二次正规正形式ψ_q使得

$$f(x) + \psi_q(x,\overline{x}) = p(x),\quad x\in B^n, \tag{9.4}$$

则称f有一个二次剩余．

引理9.1　令$\lambda=(\lambda_{ij})$使得$0\leqslant\lambda_{ij}\leqslant|q_{ij}|$，$(i,j)\in P\cup N$．和

$$Q(x,\lambda) = \sum_{(i,j)\in P}(\lambda_{ij}x_i\overline{x_j} + (q_{ij}-\lambda_{ij})\overline{x_i}x_j) + \sum_{(i,j)\in N}(\lambda_{ij}\overline{x_i}\overline{x_j} - (q_{ij}+\lambda_{ij})x_ix_j). \tag{9.5}$$

则$Q(x,\lambda)$是f的一个二次剩余，并且f的所有二次剩余都具有这一形式．

证明　定理8.1的一个直接结果．■

引理9.2　二次函数f的一个上平面是天篷，当且仅当它有一个二次剩余．进而，对f的一个由(7.9)给出的天篷，其二次剩余由(9.5)给出．其中二式中之参数λ_{ij}是相同的；反之，亦然．

证明　设$r(x,\lambda)$为由(7.9)所给出的一个天篷．并注意到：对于任何$(i,j)\in P$，有

$$\lambda_{ij}x_i + (q_{ij}-\lambda_{ij})x_i - q_{ij}x_ix_j = \lambda_{ij}x_i\overline{x_j} + (q_{ij}-\lambda_{ij})\overline{x_i}x_j.$$

和对于任何$(i,j)\in N$，有

$$\lambda_{ij}(1-x_i-x_j) - q_{ij}x_ix_j = \lambda_{ij}\overline{x_i}\overline{x_j} - (q_ij+\lambda_{ij})x_ix_j.$$

然后，分别将它们在P和N上求和．即得

$$r(x,\lambda) - f(x) = Q(x,\lambda).$$

因此，f有一个二次剩余．

反之，若$r(x)$为f的任一上平面并有二次剩余$Q(x,\lambda)$如(9.5)所示，则在$f(x)+Q(x,\lambda)=r(x)$的左边所有的$\overline{x_i}$均用$1-x_i$代替，$i=1,2,\cdots,n$．即可得到$r(x)$恰是由(7.9)所给出的天篷．■

定理9.1　　$w_R = H(f)$．

证明　令$r(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n$是$f$的一个天篷．由引理9.2，$f$有一个二次剩余$Q$使得

$$f+Q=r. \tag{9.6}$$

另一方面，令

$$\left.\begin{aligned} L(x,\bar{x}) &= \sum_{j=1}^{n} a_j^{+}x_j-\sum_{j=1}^{n} a_j^{-}x_j \\ c &= a_0+\sum_{j=1}^{n} a_j^{+}. \end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

其中，$a^{+}=\max\{0,a\}, a^{-}=\min\{0,a\}$. 可见，$L$是一个线性的正形式．并且，有

$$r+L=c. \tag{9.8}$$

将(9.6)与(9.7)相加，即得

$$f+h=c,\quad h=Q+L.$$

由于h是一个二次正函数，则$c\geqslant H(f)$．然而，由(9.7)，$\max\limits_{x\in B^n} r(x)=c$. 故，$w_R\geqslant H(f)$.

下面，证相反的不等式．由于f有一个补f^*使得

$$f+f^*=H(f). \tag{9.9}$$

又，f^*是一个二次正形式．从而，有一个二次正规正形式$\psi=f^*$．注意到由引理7.1，f^*是一个平台．则ψ是齐次的．用Q与L分别表示ψ的二次项的和与一次项的和．故，

$$f^*=Q+L. \tag{9.10}$$

若记

$$r(x)=H(f)-L(x,\bar{x}), \tag{9.11}$$

则由(9.9)，(9.10)和(9.11)可得

$$f+Q=r. \tag{9.12}$$

这就是说，f有一个二次剩余．

又，由引理9.2，r是一个天篷．而且，由(9.11)，有$\max\limits_{x\in B^n} r(x)=H(f)$．从而，$w_R\leqslant H(f)$. ■

下面，我们证明(9.1)的后一个等式．

引理9.3 天篷对偶可表示为一个特殊的线性规划．

证明 令 $\Delta=\{\lambda=(\lambda_{ij})\,|\,0\leqslant\lambda_{ij}\leqslant|q_{ij}|,\ (i,j)\in P\cup N\}$．由(7.4)和(7.9)，有

$$\begin{aligned} w_R &= \min_{t\in\mathscr{T}}\ \max_{x\in B^n} t(x,\lambda) \\ &= \min_{\lambda\in\Delta}\ \max_{x\in B^n}\{a_0(\lambda)+a_1(\lambda)x_1+\cdots+a_n(\lambda)x_n\} \\ &= \min_{x\in\Delta}\{a_0(\lambda)+a_1^{+}(\lambda)+\cdots+a_n^{+}(\lambda)\}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

这里，如前一样$a^{+}=\max\{0,a\}$. 故，

$$w_R=\min(a_0(\lambda)+\sum_{i=1}^{n} u_i). \tag{9.14}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &u_i\geqslant a_i(\lambda) \\ &u_i\geqslant 0 \end{aligned}\right\}\quad i=1,2,\cdots,n. \\ &0\leqslant\lambda_{ij}\leqslant|q_{ij}|,\ (i,j)\in P\cup N. \end{aligned}\right.$$

实际上，这是一个双向流问题(bidireted flow problem)[27]．其中，$a_0(\lambda), a_i(\lambda)$如(7.9)

所示. ■

定理9.2 $H(f)=z_{\text{crf}}$

证明 若引进亏变量 $\mu_{ij}=|q_{ij}|-\lambda_{ij}$，则天篷对偶可以写成如下的对称形式:

$$\min\sum_{i=1}^{n}u_i+\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij} \tag{9.15}$$

且满足:

$$u_i-\sum_{(i,j)\in P}\lambda_{ij}-\sum_{(j,i)\in P}\mu_{ji}+\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}$$

$$-\sum_{(j,i)\in N}\mu_{ji}\geqslant q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}q_{ji},\qquad 1\leqslant i\leqslant n; \tag{9.16}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_{ij}+\mu_{ij}=|q_{ij}|,\\ \lambda_{ij},\ \mu_{ij}\geqslant 0\end{array}\right\}\ (i,j)\in P\cup N. \tag{9.17}$$

联系到由(8.2—8.4)和(8.6)所确定的crf问题．若引进对偶变量λ_{ij}相应约束 $y_{ij}\leqslant x_i$，$(i,j)\in P$与 $y_i\leqslant 1-x_i$，$(i,j)\in N$；和μ_{ij}相应约束 $y_{ij}\leqslant x_j$，$(i,j)\in P\cup N$；以及u_i相应$x_i\leqslant 1$，$i=1,2,\cdots,n$．可见，由(9.15—9.17)所确定的天篷对偶即为crf的对偶．从而，定理得证．

§10 上界的确定

本节的目的，首先，给出一种确定$H(f)$的方法．它依赖一些初等布尔运算．然后，讨论二类凹包．

实际上，基于如下的三个简单的恒等式:

$$\left.\begin{array}{r}\xi+\bar{\xi}=1;\\ \xi\eta+\bar{\xi}\eta=1;\\ \xi\bar{\eta}+\eta=\xi+\bar{\xi}\eta\end{array}\right\}. \tag{10.1}$$

可以建立一些从一个二次正形式到另一个二次正形式的映象．称这些映象为初等布尔变换或运算．

OP1 若在一个拟布尔函数中有二个线性项如$c\xi$和$c\bar{\xi}$，则将它们用一个常数c代替．

OP2 若有二个二次项$c\xi\eta$和$c\bar{\xi}\eta$同出现在一个函数中，则用$c\eta$代替它们．

OP3 若$c\xi$和$c\bar{\xi}\eta$同出现在一个函数中，则用$c\eta$和$c\xi\bar{\eta}$代替他们．

OP4 设τ为一个布尔单项式，$c>0$为一个常数，若$c=c_1+c_2$，$c_1,c_2>0$，则用$c\tau$代替$c_1\tau+c_2\tau$或反之．

我们可以从一个齐次二次正形式ψ_0开始，反复用上述的运算OP1—OP4得到另一个齐次二次正形式ψ和一个常数$k\geqslant 0$使得$\psi_0=\psi+k$．这个k被称为从ψ_0中"榨取"出来的．

然而，我们已经知道，对于任何一个二次拟布尔函数f，总有齐次二次正形式ψ_0和一个常数c_0使得$f+\psi_0=c_0$．那么，如何从ψ_0中榨取出一个最大的k^*来？当然，由一个函数f的高度$H(f)$的意义，总有$f+\psi=c_0-k^*\geqslant H(f)$．即，$k^*\leqslant c_0-H(f)$．

实际上，Bourjolly，Hammer与Simeone于1983年发现了如下的定理[5]．

定理10.1 令f为一个二次拟布尔函数．ψ_0为一个齐次二次正形式．和，c_0为一个常数使得

$$f+\psi_0=c_0.$$

则，从ψ_0中总可通过反复用初等布尔运算榨取出最大的常数$k^*=c_0-H(f)$。

因为这个定理的证明较长．又未发现更简短的证明．只好略去．

由这个定理使我们能够建立一个算法通过确定出k^*来求$H(f)$．从而，得到拟布尔函数f的最大值的一个在某种意义上最好的上界(详细情况可参见[43])．

所谓一个二次拟布尔函数$f(x)=x^TQx$(其中，$q_{ij}=0$，$i>j$)的局凹包，指如下形式的一个可逐线段性的实函数：

$$\gamma(x)=\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}\min\{x_i,x_j\}-\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+\sum_{i=1}^{n}(q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}q_{ji})x_i. \tag{10.2}$$

当然，$\gamma(x)$定义在整个单位立方体U^n上．

容易看出，$\gamma(x)$是凹的．而且，有

$$\gamma(x)\geqslant f(x),\quad x\in U^n.$$

进而，如果只取$x\in B^n$，则$\gamma(x)=f(x)$．

定理10.2 记$\gamma(x)$在U^n上的最大值为z_γ．则，有$z_\gamma=z_{\mathrm{crf}}$．

证明 实际上，可由(8.19)直接得到． ∎

问题在于使得$z_\gamma=z_{\mathrm{crf}}$的最优解$x_\gamma$，一般而论，$x_\gamma\bar{\in}B^n$．从而，$z_\gamma\neq z_f$．

设U^n的极点，即B^n的点已经排了一个次序：$x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(s)}$．自然，$s=2^n$．现在，对于$x\in U^n$，我们定义

$$\sigma(x)=\max\sum_{i=1}^{s}a_if(x^{(i)}). \tag{10.3}$$

$$x=\sum_{i=1}^{s}a_ix^{(i)};\quad \sum_{i=1}^{s}a_i=1;\qquad a_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,s.$$

函数$\sigma(x)$，可以验证，也是凹的．称它为$f(x)$的泛凹包[21]．当然，$\sigma(x)$也是$f(x)$的一个上界函数．而且，$\sigma(x)$是$f(x)$的一个最接近的凹上界函数．因为对于$f(x)$的任何一个凹上界函数$g(x)$，总有$\sigma(x)\leqslant g(x)$，$x\in U^n$．同样地，对于$x\in B^n$，有$\sigma(x)=f(x)$．进而，还有有$z_\sigma=\max\limits_{x\in U^n}\sigma(x)=\max\limits_{x\in B^n}f(x)=z_f$．

虽然，$\sigma(x)\leqslant\gamma(x),x\in U^n$．等号一般不满足．但，Hammer和Kalantari (1986)表明：当$N=\varnothing$时，确有$\sigma(x)=\gamma(x)$．这就又回到了我们前面已经讨论过的属于$\mathscr{P}$的问题(§8)．

只要注意到$q_{ij}x_ix_j$在U^2上的凹包为

$$f_{ij}(x_i,x_j)=\begin{cases}q_{ij}\min\{x_i,x_j\}, & (i,j)\in P;\\ q_{ij}x_j-q_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}, & (i,j)\in N.\end{cases}$$

将它按P和N加起来即得$\gamma(x)$，在这种意义下，$\gamma(x)$可视为局部凹的．故，由此而得其名．

§11 带权独立集

令$G=(V,E)$为一个无向图．不妨取$V=\{1,2,\cdots,n\}$，$|V|=n$，$|E|=m$．对G，建立一个多面体$\mathbf{P}=\{x|x\in R^n,\ x\geqslant 0,\ x_i+x_j\leqslant 1,\ (i,j)\in E\}$．容易看出，$\mathbf{P}$中的每个分量只取0

或1的点皆表示G上的一个独立集．相仿地，将**P**的极点称为G的**分数独立集**．自然，**P**的极点不一定所有分量皆取0，或1.但，Balinski（1968）给出了如下的一个定理[2]．

定理11.1 **P**的每一个极点的分量只能取0, 1,或$\frac{1}{2}$.

进而，在G上，将每个节点赋以一个权w_i，$i=1,2,\cdots,n$．可以假设w_i皆整数．因为若是有理数，可用一个大整数乘所有w_i，$1\leqslant i\leqslant n$，将它们变为整数．

图G上的最大权独立集问题可表示为：

$$\text{(WI)}\qquad \max\sum_{i=1}^{n}w_ix_i\ . \tag{11.1}$$

$$x_i+x_j\leqslant 1,\ (i,j)\in E;\quad x\in B^n$$

其连续松驰问题为：

$$\text{(CWI)}\qquad \max\sum_{i=1}^{n}w_ix_i\ .\ . \tag{11.2}$$

$$_i+x_j\leqslant 1,\ (i,j)\in E;\quad x\geqslant 0.$$

由定理11.1，CWI的所有最优解中的分量均只能取0, 1,或$\frac{1}{2}$．

下面的结果是Nemhauser和Trotter于1975年给出的[31]．

定理11.2 如果在CWI的某最优解中$x_i=a$ ($a=0$, 或1)．则在WI中也有最优解使$x_i=a$．

之后，Hammer，Hansen和Simeone于1982年又进一步得到

定理11.3 若CWI的所有最优解中$x_i=a$ ($a=0$,或1)．则在WI的所有最优解中$x_i=a$．

所谓G的一个**横交集**(也称为**节点覆盖集**)，即指$T\subseteq V$使得G的每一边至少有一个端点属于T．可以验证，横交集之补是独立集．而且，反之亦然．求G上的一个最小横交集相应如下的0-1线性规划问题：

$$\text{(WI)}\qquad \min\sum_{i=1}^{n}w_ix_i \tag{11.3}$$

$$x_i+x_j\geqslant 1,\ (i,j)\in E;\quad x\in B^n.$$

将约束$x\in B^n$换成$x\geqslant 0$，即化为它的线性松弛问题CWI．CWI的基础可行解被称为**分数横交**．同样地，所有分数横交的分量皆取值0, 1,或$\frac{1}{2}$.

CWT的线性规划对偶为：

$$\text{(CWM)}\qquad \max\sum_{(i,j)\in E}\lambda_{ij}$$

$$\sum_{j\in N(i)}\lambda_{ij}\leqslant w_i\ ,\ i=1,2,\cdots,n;\quad \lambda_{ij}\geqslant 0,\ (i,j)\in E \tag{11.4}$$

其中，$N(i)=\{j\in V|(i,j)\in E\}$．

CWM的基础可行解被称为**分数w-对集**．而且，若其所有分量皆整数，则简称为**w-对集**．若在CWM中将约束$\lambda_{ij}\geqslant 0$，$(i,j)\in E$再限制为整数．则，将所得问题记为WM．一个w-对集λ的值，即$\sum_{(i,j)\in E}\lambda_{ij}$．对于一个$w$-对集$\lambda$，若$\lambda_{ij}>0$，则称边$(i,j)$为**主动的**；否则，**被动的**．在一个节点i处，若$\sum_{j\in N(i)}\lambda_{ij}<w_i$，则称$\lambda$在节点**非饱含**．

Fulkerson， Hoffman和Mc Andrews于1965年已经证明最大分数w-对集问题CWM

(11.4) 相当于在一个适当的网络上求最大流的问题[13]. 下面，我们构造这个网络$\mathscr{N}$: 其节点集为$\{s,t,1,2,\cdots,n,1',2',\cdots,n'\}$. 边集为$\{\langle s,1\rangle,\langle s,2\rangle,\cdots,\langle s,n\rangle\}\cup\{\langle 1',t\rangle,\langle 2',t\rangle,\cdots,\langle n',t\rangle\}\cup\{\langle i,j'\rangle \mid (i,j)\in E\}\cup\{\langle i',j\rangle \mid (i,j)\in E\}$. 进而，分别给$\langle s,i\rangle$, $i=1,2,\cdots,n$, 以容量w_i. 其它边的容量为无穷大.

由此，可以证明，如果φ是$\mathscr{N}$上的最大流，则由$\lambda_{ij}=\frac{1}{2}(\varphi_{ij'}+\varphi_{i'j})$, $(i,j)\in E$, 所确定的λ为CWM的一个最优解.

记$z(P)$表示最优化问题P的最优值. 则，有如下形式的关系:

$$z(\mathrm{WI})+z(\mathrm{WT})=z(\mathrm{CWI})+z(\mathrm{CWT})=\sum_{i=1}^{n}w_i\,; \tag{11.5}$$

$$z(\mathrm{WM})\leqslant z(\mathrm{CWM})=z(\mathrm{CWT})\leqslant z(\mathrm{WT}). \tag{11.6}$$

在带权的图G上，如果横交集之权的最小值等于w－对集之权的最大值，即(11.6)取等式，则称G具有w-KE-性质，这时的图G被称为**w-KE-图**. 如果$w_i=1$, $i=1,2,\cdots,n$, 则w-KE-性质即通常的KE-性质(§ 3).

定理11.4[6] 对于一个带权图G，下面的说法是等价的:

(1) G是w-KE-图;

(2) $z(\mathrm{WI})=z(\mathrm{CWI})$;

(3) $z(\mathrm{WT})=z(\mathrm{CWT})$;

(4) 任给一个最大分数w-对集λ^*，存在$S\subseteq V$使得

a. 每一个非饱合节点均属于S;

b. 每一条主动边都与S关联;

c. 每一条边均与$T=V-S$关联.

上述定理11.4(4)的一个很有意思的结果是w-KE-性质与一个适当的二次布尔方程的相容性等价. 为了产生这样的方程，需要解一个最大流问题. 下面就解释这一点.

令λ^*是G的一个最大分数w-对集. I为对于λ^*的所有非饱合节点的集合. A为对于λ^*所有主动边的集合. 由此，可定义一个二次布尔函数

$$\psi=(\bigvee_{i\in I}\overline{x_i})\vee(\bigvee_{(i,j)\in A}\overline{x_i x_j})\vee(\sum_{(i,j)\in E}x_i x_j). \tag{11.7}$$

从而，可以验证，G是w-KE-图，当且仅当由(11.7)所确定的二次布尔方程$\psi=0$是相容的. 事实上，若令$S\subseteq V$和x是S的特征向量，即$x_j=1$, $j\in S$; 0, $j\in T=V-S$. 定理11.4(4)中的条件a. b. 和c. 分别相应(11.7)中的第一、二和第三括号内的部分为0.

这就建议我们判别一个带权图是否有w-KE-性质，首先要解CWM，然后，检验二次布尔方程如(11.7)的确定的$\psi=0$是否相容. 解CWM，实际上，是解一个特殊的线性规划问题. 固然，已经知道属于$\mathscr{P}$. 由定理3.6, 确定$\psi=0$是否相容也属于$\mathscr{P}$. 从而，识别一个图是否为w-KE-图的问题也属于$\mathscr{P}$. 并且，有如下结果.

定理11.5 用R-w-KE表示识别一个图是否有w-KE-性质的问题，$\mathrm{WI}_{w\text{-KE}}$和$\mathrm{WI}_{w\text{-KE}}$分别为在一个$w$-KE-图上求最大权独立集和求最小权横交集的问题. 则有

$$\text{R-}w\text{-KE},\quad \mathrm{WI}_{w\text{-KE}},\ \mathrm{WI}_{w\text{-KE}}\in\mathscr{P}.$$

由此，我们可以设计识别一个图是否为w-KE-图，和在这种图上求最大权独立集与最小

权横交集的有效算法[6]．很明显，反之，使得WI和WT成为P-问题的图确不一定具有w-KE-性质．

§12　SAM-图

在§6中，我们已经看到求一个图的最大权独立集（W1）的问题可以由求拟布尔函数最大值转化而来．本节在于研究相反的情况．对于一个具有n个变量m项的二次拟布尔函数可以造一个$2n+m$个节点和$n+2m$条边的图，使得在此图上求最大权独立集与求这个二次拟布尔函数的最大值等价．这样的一种变换导致了：1）天篷对偶亏空就是独立集问题中的整数性亏空；2）确定最优的天篷可以有效地实现；3）保持性．后二点将分别在下二节中讨论．

一个图$G=(V, E)$，如果它的节点集V可以被剖分为二个子集V_1和V_2使得V_1是一个独立集和$G[V_2]$，即由V_2在G中导出的子图，是G的一个对集，则称它为SAM-图．

给定一个二次拟布尔函数

$$f(x)=\sum_{(i,j)\in P\cup N} q_{ij}x_ix_j$$

如§7中所示．记M是一个充分大的常数，如$M>2(U_f-L_f)$．其中，

$$L_f=\sum_{i=1}^{n} q_{ii}^{-}+\sum_{(i,j)\in N} q_{ij}\;; \tag{12.1}$$

$$U_f=\sum_{i=1}^{n} q_{ii}^{+}+\sum_{(i,j)\in P} q_{ij}-\sum_{(i,j)\in N} q_{ij}. \tag{12.2}$$

对于f，可以造一个带权的图$S_f=(V_f, E_f)$如下：

$$\begin{aligned}
V_f=&\{[i,j]\,|\,q_{ij}\neq 0\}\cup\{1,2,\cdots,n\}\cup\{1',2',\cdots,n'\};\\
E_f=&\{([i,j],i')\,|\,(i,j)\in P\}\cup\{([i,j],j')\,|\,(i,j)\in P\}\\
&\cup\{([i,j],i)\,|\,(i,j)\in N)\in N\}\cup\{([i,j],j')\,|\,(i,j)\in N\}\\
&\cup\{(i,i')\,|\,i=1,2,\cdots,n\}.
\end{aligned}$$

在节点上的权依如下方式分配：对于$(i,j)\in P$，节点$[i,j]$赋以权q_{ij}；对于$(i,j)\in N$，节点$[i,j]$有权$-q_{ij}$；对于$i=1,2,\cdots,n$，节点i有权$q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N} q_{ji}+M$；和，对于$i=1,2,\cdots,n$，节点$i'$有权$M$．

这时，V_f可剖分为：

$$V_1=\{[i,j]\,|\,q_{ij}\neq 0\}\;; \tag{12.3}$$

$$V_2=\{1,2,\cdots,n\}\cup\{1',2',\cdots,n'\}. \tag{12.4}$$

不难看出，V_1是S_f的一个独立集和$G[V_2]$是S_f中的一个对集．因此，S_f是一个SAM-图．

在S_f的节点上引进0-1变量：

$$i\leftrightarrow x_i\;;\; i'\leftrightarrow x_i'\;;\;[i,j]\leftrightarrow y_{ij},$$

则S_f上的最大权独立集问题为：

$$\begin{aligned}
\max\sum_{i=1}^{n}&(q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N} q_{ji})x_i+\sum_{(i,j)\in P} q_{ij}y_{ij}\\
&-\sum_{(i,j)\in N} q_{ij}y_{ij}+M\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_i'-1)
\end{aligned} \tag{12.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{ij}+x_i'\leqslant 1 \\ y_{ij}+x_j'\leqslant 1 \end{array}\right\}\ (i,j)\in P, \qquad \left.\begin{array}{l} y_{ij}+x_i\leqslant 1 \\ y_{ij}+x_i'\leqslant 1 \end{array}\right\}\ (i,j)\in N,$$

$$x_i+x_i'\leqslant 1,\quad i=1,2,\cdots,n,\quad x_i,x_i',\ y_{ij}\in B$$

我们简记由(12.5)所确定的求最大权独立集的问题为WIS_f. 它的相应的连续松弛问题记为$CWIS_f$，即将$x_i,x_i',y_{ij}\in B$在(12.5)中用$x_i,x_i',y_{ij}\geqslant 0$代替所得到的. 注意，在$CWIS_f$中，$x_i,x_i',y_{ij}\leqslant 1$是多余的. 下面，我们还是以$z_P$表示问题P的最优值. z_f为f的最大值. w_R为天篷对偶的最优值.

定理12.1 (a) $z_{WIS_f}=z_f$; (b) $z_{CWIS_f}=w_R$.

证明 首先，为证明(a)需回忆§8中所讨论的$z_f=z_{drf}$. 而，这时的drf有如下形式:

$$\max\sum_{i=1}^{n}(q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}q_{ji})x_i+\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}y_{ij}-\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}y_{ij} \tag{12.6}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{ij}+\overline{x}_i\leqslant 1 \\ y_{ij}+\overline{x}_j\leqslant 1 \end{array}\right\}\ (i,j)\in P, \qquad \left.\begin{array}{l} y_{ij}+x_i\leqslant 1 \\ y_{ij}+\overline{x}_j\leqslant 1 \end{array}\right\}\ (i,j)\in N,$$

$$x_i+\overline{x}_i=1,\quad i=1,2,\cdots,n,\quad x_i,\overline{x}_i,\ y_{ij}\in B$$

然后，注意由(12.6)所示的drf与(12.5)之不同仅在于(12.5)中的目标函数有一个带充分大的数M的项$M\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_i'-1)$. 这一项相当在约束上加一个$x_i+x_i'=1$. 若$\overline{x}_i$和$x_i'$的值是相同的，则任何(12.5)的最优解皆(12.6)的可行解. 而且，二者的目标函数值相同并在区间$[L_f,U_f]$之内. 又，任何(12.5)的一个可行解如果对(12.6)不可行，则必存在一个i，$x_i+x_i'<1$. 这时，(12.5)的目标函数值$\leqslant U_f-M<U_f-2(U_f-L_f)\leqslant U_f-(U_f-L_f)=L_f$. 从而，这个可行解不会使(12.5)达到最优. 即，(a)成立.

相仿地，对于$CWIS_f$，任何(12.6)的连续松弛问题，即crf的最优解均为$CWIS_f$的一个可行解. 且，二者的目标函数值相同并在区间$[L_f,U_f]$之内. 然，如果$CWIS_f$的一个基础可行解不是crf的可行解. 则必存在一个i，$x_i+x_i'<1$. 由定理11.1，$x_i+x_i'\leqslant\frac{1}{2}$. 这时，目标函数值$\leqslant U_f-\frac{1}{2}M<U_f-(U_f-L_f)=L_f$. 从而，这个基础可行解不会是$CWIS_f$的最优解. 故，$z_{CWIS_f}=z_{crf}$. 再由(9.1)，$z_{CWIS_f}=w_R$. ■

由上述定理的证明过程可知，若x^*是$f(x)$，$x\in B^n$的一个最大点. 令

$$x^*=e-x^*,\quad e=(1,1,\cdots,1),$$

$$y_{ij}^*=\begin{cases}\min\{x_i^*,\ x_j^*\}, & (i,j)\in P;\\ \min\{\overline{x}_i^*,\ x_j\}, & (i,j)\in N.\end{cases}$$

则，$(x^*,\overline{x}^*,y^*)$是WIS_f的一个最优解. 反之，若$(x^*,\overline{x}^*,y^*)$是WIS_f的最优解，则$f(x^*)=\max_{x\in B^n}f(x)$. 相仿地，若$(x_0,y_0)$是crf的一个最优解，和$\overline{x_0}=e-x_0$，则$(x_0,\overline{x_0},y_0)$是$CWIS_f$的一个最优解. 反之，若$(x_0,\overline{x_0},y_0)$是$CWIS_f$的一个最优解，则$(x_0,y_0)$是crf的一个最优解.

至此，我们将前面研究过的一些与二次拟布尔函数最优化有关的问题及它们的上界估计总结为下表12.1.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{z_f} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, <->, "\text{亏空}"', "\text{天篷}"] & \boxed{z_{\bar f}} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, <->, "\text{亏空}"', "\text{二次}"] & \boxed{z_{\mathrm{drf}}} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, <->, "\text{亏空}"', "\text{整数}"] & \boxed{z_{\sigma}} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, <->, "\text{亏空}"', "\text{局部}"] & \boxed{z_{\mathrm{WIS}_f}} \arrow[d, <->, "\text{亏空}"', "\text{整数}"] \\
\boxed{w_{\mathrm{R}}} \arrow[r, phantom, "="] & \boxed{z_{f^*}} \arrow[r, phantom, "="] & \boxed{z_{\mathrm{crf}}} \arrow[r, phantom, "="] & \boxed{z_{\gamma}} \arrow[r, phantom, "="] & \boxed{z_{\mathrm{CWIS}_f}}
\end{tikzcd}
$$

表 12.1

（待续）