第10卷 第4期
1990年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.10 No.4
Nov., 1990

组合最优化中的布尔方法(续二)

彼得·哈默 刘彦佩 布鲁诺·席莫昂

§13 天篷取优

为了计算最好的天篷，我们研究在SAM-图S_f上的最大w-对集问题(WM)．首先,对于S_f上的边引进变量:

$$(i,i')\leftrightarrow\widetilde{u}_i,\quad i=1,2,\cdots,n;$$
$$([i,j],i')\leftrightarrow\lambda_{ij},\quad([i,j],j')\leftrightarrow\lambda_{ji},\quad(i,j)\in P;$$
$$([i,j],i)\leftrightarrow\lambda_{ij},\quad([i,j],j')\leftrightarrow\lambda_{ji},\quad(i,j)\in N.$$

则，最大分数w-对集问题(CWM)在S_f上可表示为

$$z_{CWM}=\max\sum_{(i,j)\in P\cup N}(\lambda_{ij}+\lambda_{ji})+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{u}_i-nM \tag{13.1}$$

$$\begin{cases}\lambda_{ij}+\lambda_{ji}\leqslant|q_{ij}|,\quad(i,j)\in P\cup N; & (13.2)\\ \widetilde{u}_i+\sum_{(j,i)\in P}\lambda_{ij}+\sum_{(i,j)\in P}\lambda_{ij}+\sum_{(j,i)\in N}\lambda_{ij}\leqslant M, & (13.3)\\ \widetilde{u}_i+\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}\leqslant M+q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}q_{ji},\quad 1\leqslant i\leqslant n; & (13.4)\\ \lambda_{ji}\geqslant0,\ \lambda_{ij}\geqslant0,\ (i,j)\in P\cup N;\ \widetilde{u}_i\geqslant0,\ 1\leqslant i\leqslant n. & (13.5)\end{cases}$$

在(13.1)中的常数$-nM$是为了与(12.5)中的平衡．由定理12.1，等式(11.5)，以及线性规划的对偶原理，即可得

$$w_R+z_{CWM}=\sum_{i=1}^{n}q_{ii}+\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}.$$

定理13.1[20] (a) CWM有一个最优解使得(13.2)取等号. (b) 若$\{\widetilde{u}_i,\lambda_{ij},\lambda_{ji}\}$是$CWM$的一个最优解且使(13.2)取等号．又，取

$$u_i=\max\{0,q_{ii}+\sum_{(j,i)\in P}q_{ji}+\sum_{(i,j)\in P}\lambda_{ij}-\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}-\sum_{(j,i)\in P}\lambda_{ji}-\sum_{(j,i)\in N}\lambda_{ji}\},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则，$\{u_i,\lambda_{ij}\}$为(9.14)所表示的天篷对偶的一个最优解．

证明 (a) 令$(\widetilde{u},\lambda)$是CWM的一个最优解．容易看出，在(13.3)或(13.4)中一定有取等号的．然，不管怎样，总有$\widetilde{u}_i\geqslant M-(U_f-L_f)>U_f-L_f>0$. 这样，如果存在$i<j$，$\lambda_{ij}+\lambda_{ji}<|q_{ij}|$. 记$\varepsilon=|q_{ij}|-\lambda_{ij}-\lambda_{ji}$. 则，可得$CWM$的一个新的最优解$(\widetilde{u}^*,\lambda^*)$:

$$\widetilde{u}_i^*=\widetilde{u}_i-\varepsilon;\quad\lambda_{ij}^*=\lambda_{ij}+\varepsilon;$$

$$\widetilde{u}_k^* = \widetilde{u}_h,\ k \neq i;\ \lambda_{kh}^* = \lambda_{kh},\ (k, h) \neq (i, j).$$

对于(u^*, λ^*)，有$\lambda_{ij}^* + \lambda_{ji}^* = |q_{ij}|$. 如此往复，可直到求得一个$CWM$的最优解使得(13.2)取等号.

(b) 因为(13.2)取等号，我们将(13.1—5)中利用等式$\lambda_{ij} + \lambda_{ji} = |q_{ij}|$. 从而，得

$$z_{CWM} = \max \sum_{(i,j)\in P\cup N} |q_{ij}| + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{u}_i - nM$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant \lambda_{ij} \leqslant |q_{ij}|,\ (i, j) \in P \cup N; \\ \widetilde{u}_i \leqslant M - \sum\limits_{(j,i)\in P} {}_j\, q_{ji} + \sum\limits_{(j,i)\in P} {}_j \lambda_{ji} - \sum\limits_{(i,j)\in P} {}_j\, \lambda_{ij} + \sum\limits_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} + \sum\limits_{(j,i)\in N} {}_j\, \lambda_{ji}; \\ \widetilde{u}_i \leqslant M + q_{ii} + \sum\limits_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} - \sum\limits_{(i,j)\in N} {}_j\, \lambda_{ij}, \\ \widetilde{u}_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

若记$\wedge = \{\lambda = (\lambda_{ij}) | 0 \leqslant \lambda_{ij} \leqslant |q_{ij}|\}$，就有

$$\begin{aligned} z_{CWM} = & \max_{\lambda\in\wedge} \sum_{(i,j)\in P\cup N} |q_{ij}| - nM + \sum_{i=1}^{n} \min\{M + q_{ii} + \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} - \sum_{(i,j)\in N} {}_j\, \lambda_{ij} \\ & M - \sum_{(j,i)\in P} {}_j\, q_{ji} + \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} - \sum_{(i,j)\in P} {}_j\, \lambda_{ij} + \sum_{(j,i)\in P} {}_j\, \lambda_{ji} + \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, \lambda_{ji}\} \\ = & \sum_{(i,j)\in P\cup N} |q_{ij}| + \max_{\lambda\in\wedge} \sum_{i=1}^{n} \min\{q_{ii} + \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} - \sum_{(i,j)\in N} {}_j\, \lambda_{ij} \\ & + \sum_{(j,i)\in P} {}_j\, q_{ji} + \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} - \sum_{(i,j)\in P} {}_j\, \lambda_{ij} + \sum_{(j,i)\in P} {}_j\, \lambda_{ji} + \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, \lambda_{ji}\} \\ = & \sum_{(i,j)\in P\cup N} |q_{ij}| - \min_{\lambda\in\wedge} \sum_{i=1}^{n} \max\{-q_{ii} - \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} + \sum_{(i,j)\in N} {}_j\, \lambda_{ij} \\ & - \sum_{(j,i)\in P} {}_j\, q_{ji} - \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} + \sum_{(i,j)\in P} {}_j\, \lambda_{ij} - \sum_{(j,i)\in P} {}_j\, \lambda_{ji} - \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, \lambda_{ji}\} \\ = & \sum_{(i,j)\in P\cup N} |q_{ij}| + \sum_{i=1}^{n} q_{ii} + \sum_{(i,j)\in N} q_{ij} - \min_{\lambda\in\wedge}(\sum_{(i,j)\in N} \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \max\{0, q_{ii} + \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} \\ & - \sum_{(i,j)\in N} {}_j\, \lambda_{ij} + \sum_{(j,i)\in P} {}_j\, q_{ji} - \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, q_{ji} + \sum_{(i,j)\in P} {}_j\, \lambda_{ij} - \sum_{(j,i)\in P} {}_j \lambda_{ji} - \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, \lambda_{ji}\}) \\ = & \sum_{i=1}^{n} q_{ii} + \sum_{(i,j)\in P} q_{ij} - \min(\sum_{(i,j)\in N} \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \max\{0,\ q_{ii} \\ & + \sum_{(j,i)\in P} {}_j\, q_{ji} + \sum_{(i,j)\in P} {}_j\, \lambda_{ij} - \sum_{(i,j)\in N} {}_j\, \lambda_{ij} - \sum_{(j,i)\in P} {}_j \lambda_{ji} - \sum_{(j,i)\in N} {}_j\, \lambda_{ji}\}). \end{aligned}$$

由此，即可得出

$$z_{CWM} = \sum_{i=1}^{n} q_{ii} + \sum_{(i,j)\in P} q_{ij} - \min_{\lambda\in\wedge}(\sum_{(i,j)\in N} \lambda_{ij} + \sum_{i=1}^{n} u_i)$$

$$\begin{cases} u_i \geqslant q_{ii} + \sum\limits_{(j,i)\in P} {}_j\, q_{ji} + \sum\limits_{(i,j)\in P} {}_j\, \lambda_{ij} - \sum\limits_{(i,j)\in N} {}_j\, \lambda_{ij} - \sum\limits_{(j,i)\in P} {}_j\, \lambda_{ji} - \sum\limits_{(j,i)\in N} {}_j\, \lambda_{ji}; \\ u_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

与(9.14)和(7.9)比较，即得欲证. ■

由这个定理可知，确定最好的天篷的问题与分数 w- 对集问题等价. 因此，与§11中讨论

的同样可以转化为求最大流的问题．从而，求最好的天篷的问题属于 $\mathscr{P}$．

§14　保持性

本节将揭示确定二次拟布尔函数的最大值的原问题与在SAM- 图上求最大权独立集问题等价和原问题的天篷对偶与独立集问题的线性松弛等价．进而，由此导出保持性定理，使我们能够确定在原问题的一个或所有最优解中一些变量的值．

首先，还是写出所讨论的原问题：

$$\max_{x\in B^n} f(x)=\max_{x\in B^n}\sum_{1\leqslant i,\ j\leqslant n} q_{ij}x_ix_j \tag{14.1}$$

和它的线性松弛：

$$\max_{x\in B^n} r(x). \tag{14.2}$$

所谓上平面 $r(x)$ 具有保持性是指若对一个 j，在(14.2)的所有最优解 x 中均有 $x_j=a$ 则在所有(14.1)的最优解中也有 $x_j=a$，$a\in B$．这里的主要目的在于表明所有最好的天篷具有保持性[20]．

假设 $r(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ 是 $f(x)$ 的一个最好天篷，则在(14.2)的所有最优解 $\widetilde{x}$ 中，有

$$\widetilde{x}_i=\begin{cases}0, & 当\ a_i<0;\\ 1, & 当\ a_i>0;\\ 0,或1, & 当\ a_i=0.\end{cases} \tag{14.3}$$

我们的目的在于通过对系数$a_i\neq 0$的简单观察推断出在(14.1)的所有最优解中 x_i 的值．这就使我们有可能将原问题转化为较小的问题．记 $\mathscr{R}$ 为 f 的所有天篷的集合． 和 Best$\mathscr{R}$ 为 f 的所有最好天篷的集合．即

$$\mathrm{Best}\,\mathscr{R}=\{r^*\in\mathscr{R}\,|\,\max_{x\in B^n} r^*(x)=\min_{r\in\mathscr{R}}\max_{x\in B^n} r(x)\}$$

定理14.1　对于任何$r(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n\in$ Best $\mathscr{R}$ 和连续 $Rhys$线性规划crf(8.2—4, 8.6)的所有最优解 $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, 有

$$a_i>0\Rightarrow\widetilde{x}_i=1;\quad a_i<0\Rightarrow\widetilde{x}_i=0. \tag{14.4}$$

证明　研究天篷对偶的线性规划(9.14)形式，即

$$\min\sum_{i=1}^{n}u_i+a_0(\lambda) \tag{14.5}$$

$$\begin{cases}u_i\geqslant a_i(\lambda),\quad u_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n;\\ 0\leqslant\lambda_{ij}\leqslant|q_{ij}|,\quad (i,j)\in P\cup N.\end{cases}$$

其中 $a_i(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,n$，由(7.9)所确定．令 $r(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n\in$ Best $\mathscr{R}$和 $\widetilde{x}$ 是crf的任一最优解．则由对偶性，(14.5)中有一个最优解(u^*,λ^*)使得$a_i=a_i(\lambda^*)$．

由于(u^*,λ^*)是(14.5)的最优解，$a_i(\lambda^*)>0\Rightarrow u_i^*-a_i(\lambda^*)=0$. 由原始—对偶对(8.2—4, 8.6)和(14.5)的(弱)互补松紧性，有 $u_i^*>0\Rightarrow x_i=1$. 另一方面，又有 $a_i(\lambda^*)<0\Rightarrow u_i^*=0>a_i(\lambda^*)$．再由松紧性，有 $x_i=0$. ■

这个定理的一个直接推论就是对于最好天篷的符号不变性质．

推论 14.1 对于所有 $r\in\mathrm{Best}\,\mathscr{R}$，$x_i$ 项的系数 a_i 的符号不变.

定理 14.2 如有一个 $r(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n\in\mathrm{Best}\,\mathscr{R}$ 使得 $a_i>0$（$a_i<0$），则在（14.1）的所有最优解中都有 $x_i=1$（$x_i=0$）.

证明 令 $a_i>0$（相仿地，$a_i<0$）. 由定理14.1，对于 crf 的所有最优解（x,y），有 $x_i=1$. 由 §12 中的讨论，必在CWI的所有最优解（$x,\overline{x},y$）中有 $x_i=1$. 由定理11.3，在 WIS_f 的所有最优解（$x,\overline{x},y$）中有 $x_i=1$. 因此，由 §12末尾的讨论，在（14.1）所有最优解中都有 $x_i=1$. ■

定理 14.3 如果 crf 有一个最优解（x,y）使得 $x_i=1$（$x_i=0$），则（14.1）有一个最优解 x^* 使得 $x_i^*=1$.

证明 与定理14.2的证明相仿. 但其中用定理11.2而不是定理11.3. ■

实际上，在用定理14.2时，不必找出所有的天篷，而只要找出一个来即足. 这就是下面的定理.

定理 14.4 存在一个天篷 $r^*(x)=a_0^*+a_1^*x_1+\cdots+a_n^*x_n\in\mathrm{Best}\,\mathscr{R}$ 使得对于 crf 的所有最优解（x,y）有 $x_i=1$（$x_i=0$），当且仅当 $a_i^*>0$（$a_i^*<0$）.

证明 利用原始—对偶对 crf 和（14.5）之间的（强）互补松紧性，有 crf 的一个最优解（$\widetilde{x},\widetilde{y}$）和（14.5）的一个最优解（$\widetilde{u},\widetilde{\lambda}$）使得

$$\widetilde{u}_i>0\Leftrightarrow\widetilde{x}_i=1. \tag{14.6}$$

$$\widetilde{u}_i>a_i(\widetilde{\lambda})\Leftrightarrow\widetilde{x}_i=0. \tag{14.7}$$

取 $r^*(x)=a_0^*+a_1^*x_1+\cdots+a_n^*x_n$，$a_i^*=a_i(\widetilde{\lambda})$，$i=1,2,\cdots,n$. 如果对于 crf 的所有最优解 $x_i=1$，特别地，$\widetilde{x}_i=1$. 且，由（14.6），$\widetilde{u}_i>0$. 由于（$\widetilde{u},\widetilde{\lambda}$）是（14.5）的最优解，必有 $\widetilde{u}_i=a_i(\widetilde{\lambda})=a_i^*>0$. 另一方面，如果在 crf 的所有最优解中 $x_i=0$，则由（14.7），$\widetilde{u}_i>a_i(\widetilde{\lambda})$. 从而，由（$\widetilde{u},\widetilde{\lambda}$）是（14.5）的最优解，$a_i(\widetilde{\lambda})<0$. 即，$a_i^*<0$. ■

§15 极 端 情 形

在本节中，我们打算讨论两件事：（a）给出不具有上节所讨论的保持性（定理14.2）的函数.（b）提供无亏空函数的有效识别. 自然，如前所述，对于无亏空函数，确定（14.1）的最优解的问题属于 $\mathscr{P}$. 当然，也只是讨论二次的.

（a）我们首先研究天篷对偶最优值的上界. 由此，可导出不具有保持性的函数，令

$$k^*=\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}q_{ii}+\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}\Big). \tag{15.1}$$

一个二次函数 f 称为是不可约的，指方程

$$\begin{cases}a_i(\lambda)=0,\ i=1,2,\cdots,n;\\ 0\leqslant\lambda_{ij}\leqslant|q_{ij}|,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n.\end{cases} \tag{15.2}$$

是相容的. 其中 $a_i(\lambda)$ 由（7.9）所给出.

定理 15.1[20] $k^*\leqslant w_R$. 且，取等号，当且仅当 f 是不可约的.

证明 设（u^*,λ^*）为天篷对偶（14.5）的一个最优解. 记 $I=\{i\,|\,a_i(\lambda^*)<0\}$. 则

$$w_R=a_0(\lambda^*)+\sum_{i\notin I}a_i(\lambda^*)\geqslant a_0(\lambda^*)+\sum_{i\notin I}a_i(\lambda^*)+\frac{1}{2}\sum_{i\in I}a_i(\lambda^*),$$

其中，仅当 $I=\phi$ 时，取号，

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}^{*}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i(\lambda^{*})+\frac{1}{2}\sum_{i\notin I}a_i(\lambda^{*})\\
&=\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}^{*}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(q_{ii}+\sum_{(j,i)\in P}{}_{j}\,q_{ji}+\sum_{(i,j)\in P}{}_{j}\,\lambda_{ij}^{*}\\
&\quad-\sum_{(j,i)\in P}{}_{j}\,\lambda_{ji}^{*}-\sum_{(i,j)\in N}{}_{j}\,\lambda_{ij}^{*}-\sum_{(j,i)\in N}{}_{j}\,\lambda_{ji}^{*}\Big)+\frac{1}{2}\sum_{i\notin I}a_i(\lambda^{*})\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(q_{ii}+\sum_{(i,j)\in P}{}_{j}\,q_{ij}\Big)+\frac{1}{2}\sum_{i\notin I}a_i(\lambda^{*})=k^{*}+\frac{1}{2}\sum_{i\notin I}a_i(\lambda^{*})>k^{*}.
\end{aligned}
$$

而且，取等号，当且仅当 $I=\phi$ 和 $a_i(\lambda^{*})=0$, $i\notin I$. 即，方程(15.2)相容. ■

定理15.2[20] 如下的说法等价：

(1) 在 crf 的所有最优解中无一个变量恒取0或1,

(2) $f(x)$ 只有一个最好天篷，即常数上平面：

$$r(x)=k^{*}=\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n}q_{ii}+\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}\Big);$$

(3) $f(x)$ 有一个常数的最好天篷；

(4) $f(x)$ 是不可约的；

(5) $w_R=k^{*}$；

(6) $CWIS_f$ 有一个最优解 $(x_0,\overline{x_0},y_0)$ 使得 $x_0=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$.

证明 (1)⇒(2). 令 $r(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n\in \mathrm{Best}\,\mathscr{R}$. 如果对某 i, $a_i\neq 0$. 则由定理14.1，在 crf 的所有最优解中 x_i 不是恒为0，就是恒为1. 故，所有 $a_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$. 即 $r(x)=a_0$，又，由于 $a_0=\max_{x\in B^n}r(x)=w_R$，$r(x)$ 是 $\mathrm{Best}\,\mathscr{R}$ 中唯一的元素. 进而，(14.5)有一个最优解 $(\widetilde{u},\widetilde{\lambda})$ 使得 $\widetilde{u}_i=a_i(\widetilde{\lambda})=0$. 故，由定理15.1，$w_R=k^{*}$. 即，$a_0=k^{*}$.

(2)⇒(3). 直接可得.

(3)⇒(4). 由不可约性的定义可得.

(4)⇒(5). 由定理15.1，直接可得.

(5)⇒(6). 注意 $x_i=\overline{x_i}=y_{ij}=\frac{1}{2}$ 是 $CWIS_f$ 的一个可行解且使目标函数值取值 k^{*}. 由(5)和定理12.1可知，它们也是最优解.

(6)⇒(1). 由§12末的讨论即可得. ■

(b) 一个二次拟布尔函数 f，如果有 $\max_{x\in B^n}f(x)=w_R$，即无天篷对偶亏空，则称之为无亏空函数.

命题15.1 f 是无亏空函数，当且仅当带权SAM-图 S_f 具有 w-KE-性质.

证明 由定理12.1和定理11.4直接可得. ■

由此，定理11.5也表明了识别一个拟布尔函数是否为无亏空的问题属于 $\mathscr{P}$.

注记15.1 从 w-KE-性的定义，权 w_i 皆整数. 在 q_{ij} 皆整数的假定下与SAM-图节点联

系的权也必为整数．这样，命题15.1的证明即可通过．进而，即使 w_i 取任意实数，定理11.4中的（2）和（4）也可以证明是等价的．这是因为我们仍然可以用判定如(11.7)的二次布尔方程的相容性，确定是否 $z_{WI}=z_{CWI}$ ．当然，同样是属于$\mathscr{P}$的．从而，命题15.1可以推广到 q_{ij} 全是实数的情形．

现在，我们回到无亏空函数．一个拟布尔函数 f，如果对于所有 $x, y\in B^n$，

$$f(x\vee y)+f(x\wedge y)\geqslant f(x)+f(y), \tag{15.3}$$

则称 f 是上模的(supermodular)．一个二次拟布尔函数 $f(x)=x^TQx$ 是上模的，当且仅当对于所有 $i\neq j$ $q_{ij}\geqslant 0$. 在§8中，已经得出这种函数是无亏空的，即 $N=\phi$．更一般地，Hansen 和 Simeone (1986) 引进了**单模函数**，即这样的一个二次拟布尔函数 f，其 crf 的系数矩阵是全单模的[26]．

对于一个二次函数 $f(x)=x^TQx$，可以构造一个符号图 $G_f=(V_f, E_f)$，$V_f=\{1,2,\cdots,n\}$，$E_f=\{(i,j)|q_{ij}\neq 0\}$．对于每一条边 (i,j) 根据 $q_{ij}>0$，或 <0 分别赋以"+"，或"-"．所谓平衡是指不存在含有奇数条"-"边的圈．

定理15.3 对于一个二次函数 f，如下的说法是等价的：

（1） f 是单模的；

（2） 符号图 G_f 是平衡的；

（3） 存在 $S\subseteq V$ 使得通过变换

$$y_i=\begin{cases}\bar{x}_i, & i\in S;\\ x_i, & i\notin S,\end{cases}$$

$i=1,2,\cdots,n$，可以将 f 变为以 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为变量的一个上模函数．

由此可见，判定一个二次函数是否是单模的问题属于$\mathscr{P}$．这是因为判别一个图是否有含奇数条"-"边的圈，所以建立 $O(m+n)$ 的算法．m, n 分别为边数和节点数．关于此可参见[25](Hansen, 1978)和[28](Liu, 1978)．

§16 一 些 注 记

对于一般的拟布尔函数

$$f(x)=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\sum_{S\in\mathscr{S}}a_s\prod_{j\in S}x_j. \tag{16.1}$$

其中$\mathscr{S}$是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个子集族．自然，对于任何 $S\in\mathscr{S}$，有 $|S|\geqslant 2$ 且 $a_S\neq 0$. 为方便，我们仍记

$$\mathscr{P}=\{S\in\mathscr{S}: a_S>0\},\quad \mathscr{N}=\{S\in\mathscr{S}: a_S<0\}.$$

陆世辉与 Williams 于1987年[41]，将天篷的概念推广到任意的拟布尔函数．对每个 $S\in\mathscr{S}$，选择参数 $\mu_j^S (j\in S)$ 和 μ_0^S 使得

$$a_S=\sum_{j\in S}\mu_j^S,$$

$$\mu_0^S=\begin{cases}0, & 当\ S\in\mathscr{P};\\ -a_S, & 当\ S\in\mathscr{N},\end{cases} \tag{16.2}$$

$$\mu_j^S = \begin{cases} \geqslant 0, \text{当 } S \in \mathscr{P}; \\ \leqslant 0, \text{当 } S \in \mathscr{N}, \end{cases}$$

则称线性函数

$$g(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i + \sum_{i \in S} \mu_i^S) x_i \tag{16.3}$$

为 f 在 B^n 上的天篷（roofs）. 进而，他们将二次情形下的结果推广到一般情形.

近来，Hansen, Lu和Simeone又将天篷推广到上砌（paved upper plane），即为（16.3）所给的超平面满足如下的条件：对于 $S \in \mathscr{L}$，有

$$\begin{cases} a_S \leqslant \mu_0^S + \sum_{j \in S} \mu_j^S \ ; \\ 0 \leqslant \mu_0^S + \sum_{j \in T} \mu_j^S, \ \phi \neq T \subset S; \\ 0 \leqslant \mu_0^S . \end{cases} \tag{16.4}$$

由于容易验证，对于 $x_j \ j \in S$, 的任何布尔值，均有如下的事实：

$$a_S \prod_{j \in S} x_j \leqslant \mu_0^S + \sum_{j \in S} \mu_j^S x_j \tag{16.5}$$

当且仅当（16.4）成立. 可见，这时（16.3）给出了（16.1）所示的 f 的一个上界. 又,从(16.2)自然导数（16.4），故上砌可以视为天篷的推广[42].

令 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 分别为 f 的所有上砌和所有天篷的集合. 记

$$w(\boldsymbol{P}) = \min_{g \in \boldsymbol{P}} \max_{x \in B^n} g(x); \tag{16.6}$$

$$w(\boldsymbol{R}) = \min_{g \in \boldsymbol{R}} \max_{x \in B^n} g(x). \tag{16.7}$$

则容易看出总有如下的不等式：

$$w(\boldsymbol{R}) \geqslant w(\boldsymbol{P}) \geqslant z^* (= \max_{x \in B^n} f(x)). \tag{16.8}$$

可以找出这样的例子使（16.8）中的两个不等号均是严格的. 为了得到 z^* 的另外的上界，我们引进如下的线性规划，称之为标准线性型：求

$$z_S = a_0 + \max \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{S \in \mathscr{L}} a_S y_S$$

约束条件为

$$\begin{cases} y_S \leqslant x_j, \ S \in \mathscr{P}, \ j \in S; \\ \sum_{j \in S} x_j - y_S \leqslant |S| - 1, \ S \in \mathscr{N}; \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1, \ j = 1, 2, \cdots, n; \\ y_S \geqslant 0, \ S \in \mathscr{L}. \end{cases} \tag{16.9}$$

Hansen, Lu, 和Simeone于1989年得到了如下的主要结果.

定理16.1 对于任何拟布尔函数，总有

$$z_S = w(\boldsymbol{P}). \tag{16.10}$$

定理16.2 对于任何二次的拟布尔函数，总有

$$z_S = w(\boldsymbol{R}) = w(\boldsymbol{P}). \tag{16.11}$$

其中，定理16.2给出了二次拟布尔函数的天篷对偶的又一个解释.

参 考 文 献

[1] Aho, A. V. & J. E. Hopcroft & J. D. Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, 1974.

[2] Balinski, M. L., Notes on a constructive approach to linear programming, Mathematics of Decision Sciences, Part I (eds. G. B. Dantzig et al), AMS Providence, 1968, 179—256.

[3] Benzaken, C. & S. C. Boyd & P. L. Hammer & B. Simeone, Adjoints of bidirected graphs, Congressus Numerantium 39(1983), 123—144.

[4] Benzaken, C. & P. L. Hammev & B. Simeone, Some remarks on conflict graphs of quadratic pseudo-Boolean functions, Konstruktive Methoden der finiten nichtlinear Optimierung (eds. L. Collatz et al), Birkhöuser, 1980, 9—30.

[5] Bourjolly, J. M. & P. L. Hammer & B. Simeone, A Boolean simplex method for computing lower lounds of guadratic pseudo-Boolean functions, Research Report CORR 83—29, University of Waterloo, 1983.

[6] Bourjolly, J. M. & P. L. Hammer & B. Simeone, Node-weighted graphs having the Konig-Egewary property, Math. Programming Studies 22(1984), 44—63.

[7] Cook, S. A., The complexity of theorem-proving procedures, Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing, ACM, 1971, 151—158.

[8] Crama, Y. & P. L. Hammer, The complexity of recognizing partition-quadratic graphs, RUTCOR Research Report RRR 3—85, Rutgers University, 1985.

[9] Edmonds, J., Paths, trees and flowers, Canad. J. Math., 17(1965), 449—467.

[10] Even, S. & A. Itai & A. Shamir, On the complexity of time-table and multi-commodity flow problems, SIAM J. on Comp. 5(1976), 691—703.

[11] Falk, J. E. & K. L. Hoffman, A successive underestimation method for concave minimization problems, Math. Oper. Res. 1(1976), 251—259.

[12] Fisher, M. L. & G. L. Nemhauser & L. A. Wolsey, An analysis of approximations for maximizing submodular set function-I, Math. Programming 14(1978), 265—294.

[13] Fulkerson, D. R. & A. J. Hoffman & M. H. Mc Andrew, Some properties of graphs with multiple edges, Canad. J. Math. 17(1965), 166—177.

[14] Gallo, G. & P. L. Hammer & B. Simeone, Quadratic knapsack problems, Math. Program. Studies 12(1980), 132—149.

[15] Garey, M. R. & D. S. Johnson, Computers and Intractability: a guided tour to the theory of NP-Completedness, Freeman, 1974.

[16] Gavril, F., Testing for equality between maximum matching and minimum node covering, Inform. Proces. Lettevs 6 (1977), 199—202.

[17] Hammer, P. L. & P. Hansen, Logical relations in quadratic 0-1 programming, Revue Roumaine de Math. pures et appliquees 26(1981), 421—429.

[18] Hammer, P. L. & S. Rudeanu, Booian Mathods in Operations Research and Related Areas, Springer, 1968.

[19] Haemmer, P. L. & P. Hansen & B. Simeone, Upper planes of quadratic 0-1 functions and stability in qraphs, in Nonlinear Pragramming 4 (eds. O. L. Mangasarian et al), AP, 1981, 394—414.

[20] Hammer, P. L. & P. Hansen & B. Simeone, Roof-duality, complementation and persistency in quadratic 0-1 optimization, Math. Program. 28 (1984), 121—155.

[21] 彼得·哈默(Hammer, P. L.)和刘彦佩(Liu Yanpei), 序关系与 0—1 规划问题(上), 数学研究与评论, 第八卷, 第二期(1988), 315—325.

[22] Hammer, P. L. & U. N. Peled & S. Sorensen, Pseudo-Boolean functions and game theory, Ⅰ: Core elements and Shapley value, Cahiers du Centre d'Etudes de Rech. Operationnelle 19 (1977), 159—176.

[23] Hammer, P. L. & I. G. Rosenberg, Linear decomposition of a positive group-Boolean function, in Numerische Methoden bei Optimierung, Vol. Ⅱ (eds. L. Collatz et al), Birkhauser, 1974, 51—62

[24] Hammer, P. L. & B. Simeone, Quasimonotone Boolean functions and bisteller graphs, Ann. Disc. Math. 9 (1980), 107—119.

[25] Hansen, P., Labelling algvritims for balance in signed graphs, in Problemes Combinatoires et Theorie des Graphes (eds. J.-C. Bermond et al), CNRS, 1978, 215—217.

[26] Hansen, P. & B. Simeone, Unimodular functions, Disc Appl. Math. 14 (1986), 269—281.

[27] Lawler, E. L., Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, Holt, Rinehart, and Winston, 1976.

[28] 刘彦佩(Y. Liu), 模 2 规划与平面嵌入, 应用数学学报, 1 (1978), 321—329.

[29] Liu, Y., Boolean planarity characterization of graphs, RUTCOR Researeh Report RRR. 38—87, Rutgers University, 1987, Also in Acta Math. Sinica, New Series 4 (1988), 316—329.

[30] Liu, Y., Boolean approach to planar embeddings of a graph, RUTCOR Research Repor t RRR. 39—87, Rurgsrs University 1987 Also in Açta Math. Sinica, New Series 5 (1989), 64—79.

[31] Nemhauser, G. L. & L. E. Trotter, Vertex packings: structural properties and algorithms, Math. Programming 8 (1975), 232—248.

[32] Petreschi, R. & B. Simeone, A switching algorithm for the solution of quadratic Boolean equations, Inform. Prooes. Letters 11 (1980), 193—198.

[33] Quine, W. V., A way of simplifying truth functions, Amer. Math. Monthly 52 (1955), 627—631.

[34] Rhys, J., A selection problem of shared fixed costs and networks, Manag. Science 17 (1970), 200—207.

[35] Rosenberg, I. G., Reduction of unconstrained nonlinear 0-1 programming to the quadratic case, Cahiers du Center d'Etudes de Rech. Operationnelle 17 (1975), 71—74.

[36] Rosenstiehl, P., Preuve algebrique du critere de planarite du Wu-Liu, Ann. Disc. Math. 9 (1980), 67—78.

[37] Rudeanu, S., Boolean Functions and Equations, North-Holland, 1974.

[38] Simeone, B., Consistency of quadratic Boolean equations and the Konig-Egewary property for graphs, Ann. Disc. Math. 25 (1985), 281—290.

[39] Simeone, B., An asymptotically exact polymomial algonthm for equipartition problems, Disc. Appl. Math. 14 (1986), 383—293.

[40] Tarjan, R. E., Depth-first search and linear graph algorithms, SIAM J. Computing 1 (1972), 146—160.

[41] Lu, S. H (陆式辉), and A. C. Williams, Roofduality for 0-1 optimization, Math. Programming

37(1987), 357—360.

[42] Hausen, P., S. H. L u, and B. Simeone, On the equivalence of paved-duality and standard Linearization in nonlinear 0-1 Optimization, Serie A-Ricerche No.6, Dipartimento di Statistica, Probabilita e Statistiche Applicate, Universita di Roma "La Sapienza", 1989.

[43] J. M. Bourjolly, P. L. Hammer, W. R. Pulleyblank and B. Simeone, Combinatorial methods for bounding quadratic pseudo-Boolean Functions, RUTCOR Research Report, RRR #27—89, Rutgers University, 1989.

Boolean Approaches to Combinatorial Optimization

P. L. Hammer

(RUTCOR, The State University of New Jersey, U. S. A.)

Liu Yanpei

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, China)

B. Simeone

(Dipartimento di Statistica, Probabilita e Statistiche Applicate, Universita di Roma "La Sapienza", Italia)

Abstract

The parpose of this paper is to show the main progresses in combinatorial optimization from the point of view of the theory of NP-Completeness in computing complexity although only Boalean methods are discussed. Meanwhile, we also propose a number of unsolved problems with some possible approaches for further research.