第11卷 第2期
1991年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.2
May, 1991

关于“线性离散系统的部分稳定性”一文的注*

黄 力 民
（湘潭矿业学院）

文[1]的主要结果定理2.2与3.2的证明均有错误。我们用下例表明该两处证明中之推导不能成立。

设 $A_0=\left[\begin{array}{c:cc} 1 & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ 特征值 $\lambda=1, \frac{1\pm i}{2}$

按文[1]构造矩阵 L 并计算 LA_0L^{-1}

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad LA_0L^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ \hdashline 3/2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ⅰ. 易证线性离散系统

$$x(\tau+1)=A_0x(\tau). \tag{1}$$

对变元 x_1 渐近稳定。

按文[1]定理2.2求系统(1)之 V 函数，首先有 $A_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$. 任给正定阵 $Q_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 求解矩阵方程 $A_1^TR_1A_1-R_1=-Q_1$，得 $R_1=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 为正定阵。

由以上所得 R_1, Q_1，按文[1]构造 R_2, Q_2.

$$R_2=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q_2=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

计算

$$R=(L^{-1})^TR_2L^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q=(L^{-1})^TQ_2L^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

文[1]指出 R, Q, A_0 应满足矩阵方程

* 1989年12月16日收到.

$$A_0^TRA_0-R=-Q \tag{2}$$

但事实上

$$A_0^TRA_0-R=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&6&-6\\6&-8&8\\-6&8&-8\end{bmatrix}\neq -Q.$$

矩阵 $-(A_0^TRA_0-R)$ 甚至不是半正定阵.

2. 由于系统(1)是稳定的，上例又可用于定理3.2，A_0，L，A_1，Q_1，Q_2，Q，R_1 均同前，按文[1]取定 R_2 并计算 R：

$$R_2=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad R=(L^{-1})^TR_2L^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}12&-4&4\\-4&5&-3\\4&-3&5\end{bmatrix}.$$

文[1]定理3.2之证明指出矩阵方程(2)应成立，但事实上

$$A_0^TRA_0-R=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix}3&12&-24\\12&-44&36\\-24&36&-28\end{bmatrix}\neq -Q.$$

矩阵 $-(A_0^TRA_0-R)$ 甚至不是半正定阵.

关于离散系统(1)的部分稳定性应当可以得到比文[1]更好的结果，例如有命题:“系统(1)是 y 渐近稳定当且仅当对于任意的 m 秩 y 正定二次型 x^TQx，存在 y 正定二次型 $V(x)=x^TRx$. 满足矩阵方程(2)” 笔者已作出这个结果的证明. 据此可以对于系统(1)直接作出合适的 V 函数. 仍考虑前例，我们可断言对于任何的1秩 x_1 正定二次型 x^TQx，方程(2)存在半正定解 R 使二次型 x^TRx 是 x_1 正定的. 例如取 $Q=\mathrm{diag}(1,0,0)$，可得方程(2)之解:

$$R=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}20r&-10r-2&20r-4\\-10r-2&5r+9&-10r-6\\20r-4&-10r-6&20r\end{bmatrix}\quad (r\text{为任意实常数}).$$

当且仅当 $r=\frac{3}{5}$，即 $R=\frac{4}{5}\begin{bmatrix}3&-2&2\\-2&3&-3\\2&-3&3\end{bmatrix}$ 时 x^TRx 是 x_1 正定的二次型. 文[1]的定理2.2仅指出这个 V 函数即矩阵 R 的存在，而该定理的证明实际构造的 R 如本文前所说明的，并不满足定理之要求.

参 考 文 献

[1] 曹庆杰，线性离散系统的部分稳定性，数学研究与评论，9(1989)，4：541—544.