第12卷第2期 1992年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 12 No. 2 May 1992

关于 Von Neumann 正则环的一个问题*

陈 惠 香
(扬州师范学院数学系,225002)

设A是结合环,如果$a\in aAa$,$\forall\ a\in A$,则称A是Von Neumann正则环,以下简称正则环.环A的理想I称为A的正则理想,如果I作为环是正则环.结合环A的元素a叫做双正则元素,如果a在A中生成的主理想(a)有单位元.所有元都是双正则元的环叫做双正则环.如果环A的理想I是双正则环,则称I是A的双正则理想.我们知道,对任意结合环A,存在最大的正则理想$\mathbb{V}(A)$和最大的双正则理想$\boldsymbol{B}(A)$.正则环全体之类$\mathbb{V}$是Amitsur－Kurosh意义下的一个根环类,而且是一个遗传类.关于最大的双正则理想,Szasz在[1]的定理44.9中给出了如下结论:

$A=\boldsymbol{B}(A)\oplus(\boldsymbol{B}(A))^*$成立当且仅当$A$的每个主理想$(a)$的最大双正则理想$\boldsymbol{B}(a)$)本身是主理想.其中$(\boldsymbol{B}(A))^*$表示环$A$的最大双正则理想$\boldsymbol{B}(A)$在$A$中的双侧零化子.

关于最大的Von Neumann正则理想,Szasz认为可能存在类似的定理,因此在[1]中提出:

问题 63:对于环A的最大Von Neumann正则理想$\mathbb{V}(A)$,给出$A=\mathbb{V}(A)\oplus(\mathbb{V}(A))^*$成立的一个充分必要条件.其中$(\mathbb{V}(A))^*$表示$\mathbb{V}(A)$在$A$中的双侧零化子(给出象定理44.9关于双正则环那样的一个类似结论).

本文举例说明,A的每个主理想(a)的正则根$\mathbb{V}(a)$)本身是A的主理想这一条件不是$A=\mathbb{V}(A)\oplus(\mathbb{V}(A))^*$成立的充分条件,并给出$A=\mathbb{V}(A)\oplus(\mathbb{V}(A))^*$成立的一个充要条件.

例 设V是域F上无限可列维向量空间,E是V上有限秩线性变换全体,则E是一个没有单位元的单环.

首先我们来证E是正则环.

事实上,对任意$f\in E$,如果$f=0$,则$f\rightarrow fEf$.如果$f\neq 0$,则$f(V)=V_1$是V的一个非零有限维子空间,取V_1的一组基向量$\{u_1,u_2,\cdots,,u_n\}$,并将其扩充成V的一组基向量$\{u_1,u_2,\cdots,u_n,u^r;r\in I\}$,因为$V_1=f(V)$,所以存在$v_1,v_2,\cdots,v_n\in V$使得$f(v_i)=u_i,i=1,2,\cdots,n$.这时必存在$V$的一个线性变换$g$适合:

$$g(u_i)=v_i.\ i=1,2,\cdots,n,g(u_r)=0,r\in I.$$

显然g是V的有限秩线性变换,即$g\in E$.

对任意的$x\in V,f(x)\in V_1$,因此$f(x)=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n,\alpha_i\in F$,于是$fgf(x)=fg(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots,+\alpha_nu_n)=f(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots,+\alpha_nv_n)=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots,+\alpha_nu_n=f(x)$.所以$f=fgf\in fEf$.因此$E$是正则环.

命$A=\{(f,n)\,|\,f\in E,n\in\mathbf{Z}\}$,$\mathbf{Z}$是整数环.在$A$中规定:

$$(f,n)=(g,m)\Leftrightarrow f=g,n=m.$$

定义加法和乘法如下:

$$(f,n)+(g,m)=(f+g,n+m).$$

* 1990年4月10日收到.江苏省自然科学基金资助项目.

$$(f,n)(g,m)=(fg+ng+mf,nm).$$

再命 $\overline{E}=\{(f,0)\mid f\in E\}$，则我们知道 A 是一个有单位元的结合环. $\overline{E}$ 是 A 的理想且作为环有 $\overline{E}\cong E$. 容易证明 $\overline{E}$ 不是 A 的直和项.

现在我们来证明 $\mathbb{V}(A)=\overline{E}$.

首先，由 $\overline{E}\cong E$ 知 $\overline{E}$ 是 A 的一个正则理想，所以 $\overline{E}\subseteq\mathbb{V}(A)$. 反之，任取 $(,f,n)\in\mathbb{V}(A)$，则 $2(f,n)=(2f,2n)\in\mathbb{V}(A)$，于是存在 $(g,m)\in A$ 使得

$(2f,2n)=(2f,2n)(g,m)(2f,2n)=(h,4n^2m)$，其中 $h\in E$. 所以 $2n=4n^2m$. 若 $n\neq 0$，则 $2nm=1$，而 n,m，都是整数，这不可能，故 $n=0$，所以 $\mathbb{V}(A)\subseteq\overline{E}$，从 $\mathbb{V}(A)=\overline{E}$.

由此可见 $A\neq\mathbb{V}(A)\oplus(\mathbb{V}(A))^*$.

最后我们来证明：对任意 $a\in A$，主理想 (a) 的正则根 $\mathbb{V}(a))$ 是 A 的主理想.

事实上，由于 $\mathbb{V}$ 是遗传根，所以 $\mathbb{V}((a))=(a)\cap\mathbb{V}(A)$，而 $\mathbb{V}(A)$ 是单环，故 $\mathbb{V}((a))=(0)$ 或者 $\mathbb{V}((a))=\mathbb{V}(A)$. 因为单环 $\mathbb{V}(A)$ 和 (0) 都是 A 的主理想，因此 $\mathbb{V}((a))$ 是主理想，即对任意 $a\in A$，主理想 (a) 的正则 $\mathbb{V}((a))$ 是 A 的主理想.

引理 对任意环 A 有 $\mathbb{V}(A)\cap(\mathbb{V}(A))^*=(0)$.

如果 $A=\mathbb{V}(A)\oplus(\mathbb{V}(A))^*$ 成立，那么对任意 $a\in A$，主理想 (a) 的正则根 $\mathbb{V}((a))$ 是 A 的主理想.

证明 任取 $a\in\mathbb{V}(A)\cap(\mathbb{V}(A))^*$，由 $a\in\mathbb{V}(A)$ 及 $\mathbb{V}(A)$ 是正则环，则有 $a\in a\mathbb{V}(A)a\subseteq a\mathbb{V}(A)$，所以存在 $b\in\mathbb{V}(A)$ 使得 $ab=1$，又 $a\in(\mathbb{V}(A))^*$，所以 $ab\in(\mathbb{V}(A))^*\mathbb{V}(A)=(0)$，故 $a=ab=0$，因而 $\mathbb{V}(A)\cap(\mathbb{V}(A))^*=(0)$.

现在设 $A=\mathbb{V}(A)\oplus(\mathbb{V}(A))^*$，则对任意 $a\in A$，有 $a=a_1+a_2$，其中 $a_1\in\mathbb{V}(A)$，$a_2\in(\mathbb{V}(A))^*$.

由 $a_1\in\mathbb{V}(A)$ 知存在 $a'\in\mathbb{V}(A)$ 使得 $a_1=a_1a'$，于是 $aa'=a_1a'+a_2a'=a_1a'=a_1$，所以 $a_1\in(a)$，$a_2=a-a_1\in(a)$. 所以 $(a)=(a_1+a_2)\leqslant(a_1)+(a_2)\leqslant(a)$，从而 $(a)=(a_1)\oplus(a_2)$，由于 $\mathbb{V}$ 是遗传根，所以 $\mathbb{V}((a))=(a)\cap\mathbb{V}(A)=((a_1)\oplus(a_2))\cap\mathbb{V}(A)=(a_1)$. 即 $\mathbb{V}((a))$ 是 A 的主理想.

定理 设 $\mathbb{V}$ 是 Von Neumann 正则根，A 是结合环，则以下四个条件等价：

(1) $A=\mathbb{V}(A)\oplus(\mathbb{V}(A))^*$，

(2) 对任意 $I\lhd A$，$I=\mathbb{V}(I)\oplus(\mathbb{V}(I))^*$，

(3) 对任意 $a\in A$，存在 $b\in A$ 使得 $\mathbb{V}((a))=(b)$ 且 $(a-b)xb=bx(a-b)=0$，$\forall x\in A$，

(4) 对任意 $a\in A$，$(a)=\mathbb{V}((a))\oplus(\mathbb{V}((a))^*$.

其中 $(\mathbb{V}(I))^*$ 表示 $\mathbb{V}(I)$ 在 I 中的双侧零化子，$(\mathbb{V}(a)))^*$ 表示 $\mathbb{V}((a))$ 在 (a) 中的双侧零化子.

证明 (1)⇒(2)，设 $A=\mathbb{V}(A)\oplus(\mathbb{V}(A))^*$ 成立，对任意 $I\lhd A$，令 $I_1=I\cap(\mathbb{V}(A))^*$，$I_2=I\cap(\mathbb{V}(A))^*$，则 I_1 和 I_2 都是 A 的理想，且 $I_1\cap I_2=(0)$. 由 $\mathbb{V}$ 的遗传性得 $\mathbb{V}(I)=I\cap\mathbb{V}(A)=I_1$，显然 $I_1\oplus I_2\subseteq I$，对任意 $a\in I$，有 $a\in I\subseteq A=\mathbb{V}(A)\oplus(\mathbb{V}(A))^*$，所以 $a=a_1+a_2$，其中 $a_1\in\mathbb{V}(A)$，$a_2\in(\mathbb{V}(A))^*$，由 $a_1\in\mathbb{V}(A)$ 知存在 $a'\in\mathbb{V}(A)$ 使得 $a_1a'=a_1$，所以 $aa'=a_1a'+a_2a'=a_1a'=a_1$，因此 $a_1\in(a)\subset I$，$a_2=a-a_1\in I$，所以 $a_1\in I_1$，$a_2\in I_2$，$a=a_1+a_2\in I_1\oplus I_2$，因此 $I=I_1\oplus I_2=\mathbb{V}(I)\oplus I_2$. 显然 $I_2\subseteq(\mathbb{V}(I))^*$，由引理知 $\mathbb{V}(I)\cap(\mathbb{V}(I)^*=(0)$，故有 $I=I_1\oplus I_2=\mathbb{V}(I)\oplus I_2\subseteq\mathbb{V}(I)\oplus(\mathbb{V}(I))^*\subseteq I$，所以 $I=\mathbb{V}(I)\oplus(\mathbb{V}(I))^*$. 得证.

(2)⇒(1). 在(2)中取 $I=A$ 便得(1).

(1)⇒(3). 设 $A = \mathbb{V}(A) \oplus (\mathbb{V}(A))^*$ 成立，由引理的证明知，对任意 $a \in A$，有 $a = b + c$，$b \in \mathbb{V}(A)$，$c \in (\mathbb{V}(A))^*$，且 $(a) = (b) \oplus (c)$，$\mathbb{V}((a)) = (b)$. 对任意 $x \in A$，有 $xb, bx \in \mathbb{V}(a)$，所以 $cxb = bxc = 0$，即 $(a-b)xb = bx(a-b) = 0, \forall x \in A$. 得证.

(3)⇒(4). 任取 $a \in A$，由条件(3)和存在 $b \in A$ 使 $(b) = \mathbb{V}((a)) \subseteq (a)$ 且 $(a-b)xb = bx(a-b) = 0, \forall x \in A$，显然，$b \in (a)$，令 $c = a - b$，则 $c \in (a)$，而 $a = b + c$，故 $(a) = (b) + (c)$，由于 (b) 是正则环，所以存在 $x \in (b)$ 使 $b = bxb$，故有 $c(b) = (b)c = (0)$. 从而 $c \in (\mathbb{V}((a)))^*$，由于 $(\mathbb{V}((a))^*$ 等于 $\mathbb{V}((a))$ 在 A 中的零化子与 (a) 的交，所以 $(\mathbb{V}((a))^*$ 是 A 的理想，因而 $(c) \subseteq (\mathbb{V}((a)))^*$，所以 $(a) = (b) + (c) = \mathbb{V}((a)) + (c) \subseteq \mathbb{V}((a)) + (\mathbb{V}((a)))^* \subseteq (a)$，故 $(a) = \mathbb{V}((a)) \oplus (\mathbb{V}((a)))^*$. 得证.

(4)⇒(1). 设条件(4)成立，任取 $a \in A$，则有 $(a) = \mathbb{V}((a)) \oplus (\mathbb{V}((a)))^*$，故存在 $b \in \mathbb{V}((a)) \subseteq \mathbb{V}(A)$，$c \in (\mathbb{V}((a)))^* \subseteq (a)$，使得 $a = b + c$，任取 $x \in \mathbb{V}(A)$，则 $xc \in \mathbb{V}(A) \cap (a) = \mathbb{V}((a))$. 另一方面，由于 $(\mathbb{V}((a)))^*$ 是 A 的理想，故有 $xc \in (\mathbb{V}((a)))^*$，而由引理知 $\mathbb{V}((a)) \cap (\mathbb{V}((a)))^* = (0)$，所以 $xc = 0$，同理 $cx = 0$，故 $c \in (\mathbb{V}(A))^*$，即 $a \in \mathbb{V}(a) + (\mathbb{V}(A))^*$，从而 $A = \mathbb{V}(A) \oplus (\mathbb{V}(A))^*$. 得证.

定理至此全部证完.

参 考 文 献

[1] F. A. Szasz, *Radicals of Rings*, A Willy Interscience Publication, 1981.