关于内射模和投射模的挠论性质*

张　力　宏
(四平师范学院数学系，136000)

设 R 是有单位元的环. τ 表示左 R—模范畴中的一个挠理论[1]. 本文首先研究了 τ—内射模、τ—投射模的有关性质，给出一些等价命题. 对 QF—环作了刻画，其次讨论了 τ—内射模的局部化问题；最后刻画了模的 τ—挠根结构及补根.

文中有关挠理论的概念见[1].

一

设 τ 是左 R—模范畴中的一个挠理论. 模是左 R—模.

定理 1.1　左 R—模 M 是 τ—投射模当且仅当对任意模同态 $\alpha: M\to E'$，有 $\beta: M\to E$. 使 $\alpha=\pi\beta$. 这里 E 是内射模. $\pi: E\to E'$ 是自然满同态，$\ker\pi$ 是 τ—挠模.

证明　首先考查右图表. 其中 $A'=\ker\pi$ 是 τ—挠模，E 是内射模，σ 是单的. 所以 ρ 存在使正方形可换. 由已知对 $\rho\alpha: M\to E/A'$，有 $\beta: M\to E$，使 $F\beta=\rho\alpha$. 易证 $\mathrm{Im}\beta\subseteq\mathrm{Im}\sigma$，所以

$$\begin{tikzcd}
 & & & M \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddl, "\beta"] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1"] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\sigma"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\sigma_i"'] & E \arrow[r, "F"'] & E/A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由[2]定理 3.5，有 $\gamma: M\to A$. 使 $\beta=\sigma\gamma$，$F\beta=F\sigma\gamma$. 所以 $\rho\alpha=\rho\pi\gamma$，$\alpha=\pi\gamma$，即 M 是 τ—投射模.

反之，由 τ—投射模定义立得.

定理 1.2　设 τ 是 R—模范畴中的一个挠理论，则以下命题等价：

i)　τ—内射模的具有 τ—挠核的满同态像是 τ—内射模；

ii)　T—投射模的 τ—稠密子模是 τ—投射模；

iii)　投射模的 τ—稠密子模是 τ—投射模；

iv)　R 的 τ—稠密左理想是 τ—投射模.

证明　i)⇒ii). 设 M 是 τ—投射模，N 是其 τ—稠密子模. 设有正合列

$$0\to E_1\to E\xrightarrow{\pi} E/E_1\to 0,$$

其中 E 是内射模. E_1 是 τ—挠子模. 对任意的 $\alpha: N\to E/E_1$，由已知有 $\beta: M\to E/E_1$，使在 N 上，$\alpha=\beta$，但 M 是 τ—投射模，由定理 1.1，有 $\gamma: M\to E$ 使 $\beta=\pi\gamma$，所以在 N 上有 $\alpha=\pi\gamma$，再据定理 1.1 知 N 是 τ—投射模.

* 1990年10月18日收到.

ii)⇒iii)、iii)⇒iv)均显然.

iv)⇒i). 设 I 是 R 的 τ—稠密左理想，M 是 τ—内射模，N 是其 τ—挠子模，则有正合列

$$0\to N\to M\to M/N\to 0,\quad 0\to I\to R\to R/I\to 0.$$

因而有正合列

$$0=\mathrm{Ext}_R^1(R,N)\to\mathrm{Ext}_R^1(I,N)\to\mathrm{Ext}_R^2(R/I,N)\to\mathrm{Ext}_R^2(R,N)=0.$$

由已知 $\mathrm{Ext}_R^1(I,N)=\mathrm{Ext}_R^2(R/I,N)=0$. 另外有正合列

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,N)\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M/N)\to\mathrm{Ext}_R^2(R/I,N)=0$$

及模 M 是 τ 内射模当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$. I 是 R 的 τ—稠密左理想. 故 M/N 是 τ—内射模. □

定理 1.3 设 τ 是左 R—模范畴中的一个挠理论，则以下命题等价：

i) 每个 τ—挠模都是 τ—内射模.

ii) 每个内射模的 τ—挠子模是 τ—内射模.

iii) 每个 τ—挠模是 τ—投射模.

证明 i)⇒ii)显然.

ii)⇒i). 设 M 是 τ—挠模，$E(M)$是其内射包. 则 M 是 $E(M)$的 τ—挠子模，是 τ—内射模.

ii)⇔iii). 设 M 是内射模，N 是其 τ—挠子模. W 是任意 τ—挠模，从而有正合列

$$0\to\mathrm{Hom}(W,N)\to\mathrm{Hom}(W,M)\xrightarrow{\pi^*}\mathrm{Hom}(W,M/N)\to\mathrm{Ext}_R^1(W,N)\to\mathrm{Ext}_R^1(W,M)=0.$$

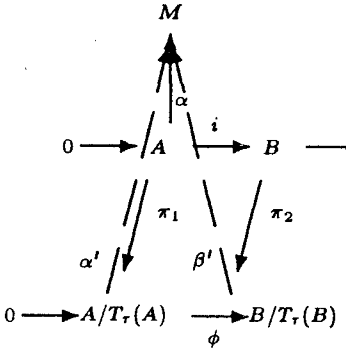
从而 N 是 τ—内射模当且仅当 $\mathrm{Ext}_R^1(W,N)=0$. 当且仅当 π^* 是满的. 由定理 1.1，这又当且仅当 W 是 τ—投射模. □

这一定理说明 τ—挠模的 τ—内射性与 τ—投射性是一致的. 特别当 R 是 τ—挠环时，任何左 R—模 M 都是 τ—挠模，从而在 τ—挠环上 τ—内射模与 τ—投射模是一致的. 但是显然在 τ—挠环上投射模与 τ—投射模一致、内射模与 τ—内射模一致，所以 τ—挠环是 QF—环.

另外当 τ 是凝聚的挠理论时，易证 M 是 τ—挠自由左 R—模当且仅当 M 是左 $R/T_\tau(R)$—模. 事实上，若 M 是 τ—挠自由左 R—模，则 $T_\tau(R)M\subseteq T_\tau(M)=0$，从而 M 是左 $R/T_\tau(R)$—模；反之，若 M 是左 $R/T_\tau(R)$—模，则 $T_\tau(R)M=0$，所以 M 可定义为 R—模，且 $T_\tau(R)\subseteq(0:M)\subseteq(0:x)$. $x\in T_\tau(M)$. 由于 τ 是凝聚的，由存在满同态 $R/T_\tau(R)\to R/(0:x)$ 可知 $R/(0:x)$是 τ—挠自由的. 若 $T_\tau(M)\neq 0$，则存在 $0\neq x\in T_\tau(M)$使 $Rx\neq 0$ 是 τ—挠模，但 $Rx\cong R/(0:x)$，矛盾. 所以 M 是 τ—挠自由左 R—模.

定理 1.4 设 τ 是凝聚的挠理论，则左 R—模 M 是 τ—挠自由的、τ—可除的当且仅当 M 是内射左 $R/T_\tau(R)$—模.

证明 设 M 是 τ—挠自由、τ—可除左 R—模，则 M 是左 $R/T_\tau(R)$—模. 设 Q 是任意左 $R/T_\tau(R)$—模，K 是其子模. 则 Q/K 作为左 R—模是 τ—挠自由的. 再由 M 是 τ—可除的，则任意模同态 $\alpha:K\to M$ 都可扩张为 $\beta:Q\to M$，即知 M 是内射 $R/T_\tau(R)$—模. 反之设 M 是内射左 $R/T_\tau(R)$—模，则 M 是 τ—挠自由 R—模，考查右图表，



其中行正合，B 是左 R－模，B/A 是 τ－挠自由左 R－模. 对任意的 R－同态 $\alpha: A\to M$，$\alpha(T_\tau(A))=0$，所以有 $\alpha': A/T_\tau(A)\to M$，使 $\alpha=\alpha'\pi_1$；定义 $\varphi: A/T_\tau(A)\to B/T_\tau(B)$，$a+T_\tau(A)\to a+T_\tau(B)$. 由于 $T_\tau(A)=A\cap T_\tau(B)$. 可知 φ 是良定义的，且是单的，所以有 $\varphi\pi_1=\pi_2 i$. 由 M 是内射 $R/T_\tau(R)$－模，有 $\beta': B/T_\tau(B)\to M$，使 $\alpha'=\beta'\varphi$. 所以 $\alpha=\beta'\varphi\pi_1=\beta'\pi_2 i$. 即 M 是 τ－可除 R－模. □

定理 1.5　设 τ 是左 R－模范畴中的一个挠理论，则以下命题等价：

i)　τ 是凝聚的，τ－挠自由，τ－上可除模是 τ－可除模.

ii)　$R/T_\tau(R)$ 是 QF－环.

iii)　τ 是凝聚的，τ－挠自由，τ－可除模是 τ－上可除模.

证明　i)⇒ii). 设 M 是投射左 $R/T_\tau(R)$－模，由[1]性质 13.6 知，M 是投射 $R/T_\tau(R)$－模当且仅当 M 是 τ－挠自由、τ－上可除左 R－模，因此 M 是 τ－可除模. 由定理 1.4，M 是内射左 $R/T_\tau(R)$－模，得 $R/T_\tau(R)$ 是 QF－环.

ii)⇒i). 若 $R/T_\tau(R)$ 是 QF－环，则 τ 是凝聚的；设 M 是 τ－挠自由、τ－上可除模，则 M 是投射 $R/T_\tau(R)$－模. 亦是内射 $R/T_\tau(R)$－模，由定理 1.4，M 是 τ－可除模.

ii)⇒iii). 显然 τ 是凝聚的，设 M 是 τ－挠自由 τ－可除的， 由定理 1.4，M 是内射左 $R/T_\tau(R)$－模，由已知是投射左 $R/T_\tau(R)$－模，所以是 τ－上可除的；

iii)⇒ii). 设 M 是内射左 $R/T_\tau(R)$－模，则 M 是 τ－挠自由，τ－可除左 R－模，得 M 是 τ－上可除模，因此是投射左 $R/T_\tau(R)$－模. 即 $R/T_\tau(R)$ 是 QF－环. □

定理 1.4，1.5 说明当 τ 是凝聚的挠理论时 τ－挠自由模的 τ－可除性与 τ－上可除性是一致的；当 R 是 τ－挠自由环时，τ－可除性与内射性是一致的，并且证明了 τ－挠自由环是 QF－环的模特征.

二

本节主要研究内射模的挠理论性质的局部化问题，在本节中设 R 是整环，P 是 R 的一个极大理想，R_P 表示 R 关于 P 的局部化，M 是左 R－模，$M_P\cong R_P\otimes M$. 定义 $r\cdot(m/s)=(r/1)\cdot(m/s)$，则 M_P 是左 R_P－模，亦是 R－模.

定理 2.1　设 τ 是 R－模范畴中的一个挠理论，若 M 是 τ－挠 R－模，则 M_P 亦是 τ－挠 R－模.

证明　任取 $\alpha\in \mathrm{Hom}_R(M_P,E)$，$E\in\tau$. 任取 $s\in R-P$，作 $\alpha_s: M\to E$，$\alpha_s(m)=\alpha(m/s)$，$m\in M$，则 $\alpha_s\in \mathrm{Hom}_R(M,E)=0$. 所以 $\alpha=0$，即 M_P 是 τ－挠 R－模. □

若 M 是 R－模，N 是其子模，则 N_P 亦是 M_P 的子模，由[3]知 $(M/N)_P\cong M_P/N_P$.

令 $t(M)=\{m\in M$，对某一 $0\neq r\in R$，$rm=0\}$，称其为 M 的挠子模. 若 $t(M)=M$，称 M 为挠模. 若 $t(M)=0$，称 M 为无挠模，显然 $M/t(M)$ 是无挠模. 模 M 的子模 N 称为大的，如果对 M 的任意非零子模 N'，$N\cap N'\neq 0$. 用 $E_\tau(M)$ 表示 M 的 τ－内射包，则 M 在 $E_\tau(M)$ 中是大的.

定理 2.2　设 R 是 h－局部整环[4]，M 是挠模，又是 τ－挠模，则 M 是 τ－内射 R－模当且仅当 M_P 亦是 τ－内射 R－模.

证明　若 M 不是 τ－内射的，则有正合列

$$0\to M\to E_\tau(M)\to E_\tau(M)/M\to 0,\tag{1}$$

$$0\to M_P\to (E_\tau(M))_P\to (E_\tau(M))_P/M_P\to 0. \tag{2}$$

由于 M 是 τ—挠模，知 $E_\tau(M)$，$E_\tau(M)/M$ 都是 τ—挠模，据定理 2.1，M_P、$(E_\tau(M))_P$、$(E_\tau(M))_P/M_P$ 都是 τ—挠模．再由 M_P 是 τ—内射的，知(2)可裂．

任取 $0\neq x\in E_\tau(M)$，则 Rx 是 $E_\tau(M)$的非零子模．从而 $Rx\cap M\neq 0$，取 $0\neq rx\in Rx\cap M$，由于 M 是挠模，有 $0\neq r'\in R$，使 $r'rx=0$，但 R 无零因子．所以 $r'r\neq 0$，得 $x\in t(E_\tau(M))$，即 $E_\tau(M)$是挠模．由[4]定理 2.6，$M\cong\bigoplus M_P$，$E_\tau(M)\cong\bigoplus(E_\tau(M))_P$．从而(1)可裂，这与 M 在 $E_\tau(M)$中是大的矛盾．所以 M 是 τ—内射模；反之，若 M 是 τ—内射模，则由 $M\cong\bigoplus M_P$，及 τ—内射模对直和项封闭，知 M_P 是 τ—内射 R—模． □

定理 2.3 设 R 是 h—局部整环每个 τ—稠密理想都是 τ—投射的．若 M 是 τ—挠模，且有 $M=r_0M$，$r_0\in R$，则 M 是 τ—内射模当且仅当 M_P 是 τ—内射 R—模．

证明 设 M 是 τ—内射模，$t(M)$是其挠子模，亦是 τ—挠模．

设 I_1 是 R 的 τ—稠密左理想，则对任意模同态 $\alpha:I_1\to t(M)$，有 $\beta:R\to M$ 使 $\alpha(a)=\beta(a)$，$a\in I_1$．但 $\alpha(a)\dot{\in} t(M)$，有 $\beta(a)=a\beta(1)\in t(M)$．所以有 $0\neq r_1\in R$．使 $r_1a\beta(1)=1$，但 $r_1a\neq 0$， 得 $\beta(1)\in t(M)$，任取 $r\in R$，$\beta(r)=r\beta(1)\in t(M)$，得 β 是 R 到 $t(M)$的模同态，从而 $t(M)$是 τ—内射模，由定理 2.2，$(t(M))_P$是 τ—内射模．

设 I 是 R 的任意理想，由已知 $M=r_0M$，若 $r_0\in I$，对 $\alpha:I\to M/t(M)$，由于 $M/t(M)=r_0(M/t(M))$，有 $\alpha(r_0)=r_0y$，$y\in M/t(M)$．任取 $a\in I$，由于 R 是整环，有 $b,c\in R$，使 $ba=cr_0\in I$，从而

$$b\alpha(a)=c\alpha(r_0)=cr_0y=bay.$$

由 $M/t(M)$无挠，得 $\alpha(a)=ay$．

若 $r_0\bar{\in} I$，作 $\alpha:Rr_0\to M/t(M)$，$rr_0\to rr_0x_0$，$x_0\in M/t(M)$．由于 $M/t(M)$无挠模．可知 α 是单的．因此 Rr_0 同构 $M/t(M)$的子模，是 τ—挠模．再由于 $Rr_0/I\cap Rr_0\cong I+Rr_0/I$ 知 $I+Rr_0/I$ 是 τ—挠模，I 在 $I+Rr_0$ 中是 τ—稠密的，由已知及定理 1.2，$M/t(M)$是 τ—内射模．所以对任意的 $\alpha:I\to M/t(M)$有 $\beta:I+Rr_0\to M/t(M)$，使 $\alpha(a)=\beta(a)$，$a\in I$．由 $r_0\in I+Rr_0$ 有 $y\in M/t(M)$使 $\beta(r_0)=r_0y$，对 $x\in I+Rr_0$，有 $b,c\in R$ 使 $bx=cr_0$、$b\beta(x)=c\beta(r_0)=cr_0y=bxy$．由于 $M/t(M)$无挠，$\beta(x)=xy$．特别当 $x\in I$ 时，有 $\alpha(x)=xy$．

综合两种情况有 $M/t(M)$是内射 R—模．由[5]定理 3.76，$M_P/t(M)_P$是内射 R_P—模．由[6]，$M_P/t(M)_P$是内射 R—模，再由正合列 $0\to(t(M))_P\to M_P\to M_P/(t(M))_P\to 0$ 知 M_P 是 τ—内射 R—模．

反之，设 M_P 是 τ—内射 R—模，$t(M_P)$是挠子模，易证 $t(M_P)=(t(M))_P$．因此$(t(M))_P$是 τ—内射 R—模．由定理 2.1，M_P 是 τ—挠模，所以$(t(M))_P$是 τ—挠模．由定理 2.2，$t(M)$是 τ—内射 R—模．再由 $M_P\cong R_P\otimes M=R_P\otimes r_0M=r_0R_P\otimes M=r_0M_P$ 及前面必要性的证明知 $M_P/(t(M))_P$是内射 R—模．所以 $M/t(M)$是内射 R—模．由正合列 $0\to t(M)\to M\to M/t(M)\to 0$ 知 M 是 τ—内射 R—模． □

由定理 1.3 知，若 M 是 τ—挠模，则 M 的 τ—内射性与 τ—投射性是一致的．所以由定理 2.3，当 $M=r_0M$ 时，我们也讨论了 τ—挠模的 τ—投射性局部化．

三

本节主要指出了左 R—模 M 的 τ—挠性质是一个根性质，并给出了 M 的 τ—挠根结构及补根.

由[1]知，τ—挠模对于子模及同态像封闭并且对左 R—模 M，存在唯一最大 τ—挠子模 $T_\tau(M)$，$M/T_\tau(M)$ 是 τ—挠自由的. 所以 τ—挠性质是一种根性质，并且是遗传的.

定理 3.1 设 τ 是稳定的挠理论，则 $T_\tau(M)$ 是 M 的所有使 M/A_i 是 τ—挠自由模的子模 A_i 的交.

证明 若存在 $a\in T_\tau(M)$，$a\bar{\in} A_{i_0}$，M/A_{i_0} 是 τ—挠自由模，则 $Ra\not\subseteq A_{i_0}$. 但 $Ra\subseteq T_\tau(M)$，知 Ra 是 M 的 τ—挠子模，且 $Ra+A_{i_0}\supset A_{i_0}$.

作 $\varphi: Ra\to(Ra+A_{i_0})/A_{i_0}$. $ra\to ra+A_{i_0}$，$r\in R$. 可以证明 φ 是 R—模的满同态，所以 $(Ra+A_{i_0})/A_{i_0}$ 是 τ—挠的，非零模，这与 M/A_{i_0} 是 τ—挠自由模矛盾. 所以有 $a\in\bigcap A_i$，M/A_i 是 τ—挠自由模. 即 $T_\tau(M)\subseteq\bigcap A_i$.

反之，取 $a\in\bigcap A_i$. 若 $a\bar{\in} T_\tau(M)$，则 $Ra\not\subseteq T_\tau(M)$，即 Ra 不是 τ—挠模. 由于 τ 是稳定的，据[1]性质 5.6，Ra 有 τ—挠自由子模. 设 F 是 Ra 的所有 τ—挠自由子模集合，则 F 非空. 所以 M 的与 F 中任一元素交为零的子模存在，用 E 表示这样的子模集合，则 E 非空，由 Zorn 引理 E 有极大者 A，$a\bar{\in} A$.

若 B/A 是 M/A 的非零 τ—挠子模，则 $M\supseteq B\supset A$，由 A 的取法知有 Ra 的一个 τ—挠自由子模 N 使 $N\cap B\neq 0$ 是 M 的 τ—挠自由子模、又显然有 $(B\cap N+A)/A$ 是 B/A 的 τ—挠非零子模，所以由 $(N\cap B+A)/A\cong(N\cap B)/(N\cap B\cap A)\cong N\cap B$ 得出矛盾. 因此 M/A 是 τ—挠自由模，但是 $a\bar{\in} A$，这与 $a\in\bigcap A_i$ 矛盾，从而有 $a\in T_\tau(M)$，即 $\bigcap A_i=T_\tau(M)$. M/A_i 是 τ—挠自由模. □

由此可知，当 τ 是稳定的挠理论时，$T_\tau(M)$ 是 M 的所有使 M/A_i 为 τ—挠自由模的子模 A_i 中的最蝎颠，且 $M/T_\tau(M)$ 与所有 τ—挠自由模的亚直和是模同构的.

定理 3.2 设 τ—是 R—模范畴中的一个挠理论，则存在由条件"模 M 是 τ_0—挠自由模当且仅当 $T_\tau(M)$ 在 M 中是大的"所确定的挠理论 τ_0.

证明 令 $\mathscr{A}=\{M|M$ 是左 R—模，$T_\tau(M)$ 在 M 中是大的$\}$. 设 $M\in\mathscr{A}$、N 是 M 的子模，非零，则 $N\cap T_\tau(M)=T_\tau(N)\neq 0$. 若 N_1 是 N 的任意非零子模，则有 $N_1\cap T_\tau(M)\neq 0$，$N_1\cap T_\tau(N)=N_1\cap N\cap T_\tau(M)=N_1\cap T_\tau(M)\neq 0$，这说明 $T_\tau(N)$ 在 N 中是大的. 所以 $N\in\mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 对子模封闭. 设 $M\in\mathscr{A}$. $E(M)$ 是其内射包，则 $T_\tau(M)=M\cap T_\tau(E(M))$. 设 N 是 $E(M)$ 的非零子模，则 $N\cap M\neq 0$. 从而 $N\cap M\cap T_\tau\neq 0$. 更有

$$0\neq(N\cap M)\cap(T_\tau(E(M))\cap M)=N\cap M\cap T_\tau(E(M))=N\cap T_\tau(M),$$

所以 $N\cap T_\tau(E(M))\neq 0$. 即 $T_\tau(E(M))$ 在 $E(M)$ 中是大的，得 $\mathscr{A}$ 对内射包封闭.

设 $M_i\in\mathscr{A}$. $\prod M_i$ 是直积，N 是其非零子模. 则 $N\cong\prod N_i$，N_i 是 M_i 的子模，若 $N_i\neq 0$，则 $N_i\cap T_\tau(M_i)\neq 0$. 在同构意义下，$N_i$ 是 N 的子模，$T_\tau(M_i)$ 是 $T_\tau(\prod M_i)$ 的子模. 所以有

$$N\cap T_\tau(\prod M_i)\neq 0,$$

即 $\mathscr{A}$ 对直积封闭.

因此存在挠理论 τ_0，使 M 是 τ_0—挠自由模当且仅当 $T_\tau(M)$ 在 M 中是大的. □

定理 3.3 $T_{\tau_0}(M)$是$T_\tau(M)$的补根.

证明 设M是左R—模,$\Omega=\{N|N$是M的子模,$N\cap T_\tau(M)=0\}$. 若$T_\tau(M)$在M中是大的. 则M是τ_0—挠自由模,得$T_{\tau_0}(M)\cap T_\tau(M)=0$. 若$T_\tau(M)$在$M$中不是大的,则$\Omega$有非零元. 由 Zorn 引理,$\Omega$中有极大者$N$,$N\cap T_\tau(M)=0$. 设$N'/N$是$M/N$的非零子模,则$M\supseteq N'\supset N$. 即$N'\cap T_\tau(M)\neq 0$. 所以$(T_\tau(M)+N)/(N\cap(N/N))\neq 0$,这说明$(T_\tau(M)+N)/N$在$M/N$中是大的,但

$$(T_\tau(M)+N)/N\cong T_\tau(M)/(T_\tau(M)\cap N)\cong T_\tau(M),$$

得出$(T_\tau(M)+N)/N$是M/N的τ—挠子模. 所以有$(T_\tau(M)+N)/N\subseteq T_\tau(M/N)$,得出$T_\tau(M/N)$在$M/N$中是大的,即$M/N$是$\tau_0$挠自由模. 又知$(T_{\tau_0}(M)+N)/N\cong T_{\tau_0}(M)/(T_{\tau_0}(M)\cap N)$左端是$\tau_0$—挠自由模,右端是$\tau_0$—挠模,得$T_{\tau_0}(M)=T_{\tau_0}(M)\cap N$,$T_{\tau_0}(M)\subseteq N$,所以

$$T_{\tau_0}(M)\cap T_\tau(M)=0.$$

若还有挠理论τ_1使$T_{\tau_1}(M)\cap T_\tau(M)=0$,则当$T_\tau(M)$在$M$中是大的时,必有$T_{\tau_1}(M)=0$,即当$M$是$\tau_0$—挠自由模时,一定也是$\tau_1$—挠自由模. 所以$\tau_1\leqslant\tau_0$. 对根性质来讲有$T_{\tau_1}(M)\leqslant T_{\tau_0}(M)$. 从而得出$T_{\tau_0}(M)$是$T_\tau(M)$的补根. □

参 考 文 献

[1] J. S. Golan, *Torsion Theories*, Copublished in the United States with John Wiley & Sons. Inc., New York, 1986.

[2] Y. S. Blyth, 模论, 陈晋健译. 广东民族学院.

[3] J. R. Silvester, *Introduction to Algebraic K—Theory*, London and New York, 1981.

[4] W. Brandal, *Commutation Rings whose Finitely Generated Modules Decompose*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 723, Springer—Verlag, Berlin/Heidelbery, 1979, p18.

[5] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.

[6] E. C. dade, *Localization of injective modules*, J. Algebra 69, 1981. 416—425.

Tersion Property for Injective and Projective Modules

Zhang Lihong

(Dept. Math., Siping Teachers College)

Abstract

For a ring R with 1 and a torsion theory τ defined on R-mod [1], we give some properties on τ-injective modules ,τ-projective modules and some equivalent conditions, depicted QF-ring; we also discuss localization on τ-injective modules, and depice τ-torsion radicals and the radical supplementing it.