第14卷第1期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 1
1994年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1994

非线性变分不等式近似解的弱收敛性*

任 一 强
(扬州师范学院数学系,225002)

设 X 是自反实 Banach 空间,X^* 为 X 的对偶空间,$(.,.)$ 为对偶积,N 表正整数集,N',N'' 等表 N 的无限子集,$K\subset X$ 为内部非空闭凸集. 本文运用[1]中建立的集合弱收敛概念,讨论形如

$$(Tu,v-u)\geqslant 0,\qquad \forall\, v\in K \tag{1}$$

的变分不等式的有限维近似解的弱收敛性,其中 $T:X\to X^*$ 为非线性算子. 在较弱条件下,得到一组解的存在性及近似解的收敛性定理从而推广或改进了[1],[2],[3]的某些结果.

定义 设 $T_n:X\to X^*$ 为非线性算子,$n\in N$. 称 $\{T_n\}$ 渐近强连续,若 $x,x_0\in X$,且 $x\rightharpoonup x_0$,$n\to\infty$ 时 $T_nx-T_nx_0\to 0$;称 $\{T_n\}$ 渐近半连续,若 $x_0,h\in X$,$t\in R^+$ 且 $t\to 0^+$,$n\to\infty$ 时,$T_n(x_0+th)-T_nx_0\rightharpoonup 0$;称 $[\{T_n\},T]$ 弱 d—闭,若 $x_n,x\in X$,$x_n\rightharpoonup x$,$T_nx_n\rightharpoonup y\Rightarrow Tx=y$;称 T 弱闭,若 $x_n,x\in X$,$x\rightharpoonup x$,$Tx_n\rightharpoonup y\Rightarrow Tx=y$.

引理1 设 $S_n,S\subset X$,若 $\{S_n\}w-d$ 列紧,且 $w-\{S_n\}^*\subset S$,则 $S_n\rightharpoonup S$. 又若存在 n_0,使 $n\geqslant n_0$ 时,$S_n\neq\varnothing$,则 $S\neq\varnothing$.

设 $X_n\subset X$ 为有限维子空间,$n\in N$,$K_n\subset X_n$ 为闭凸子集,且 $\lim K_n=K$[2]. 考虑(1)的近似问题:求 $u_n\in K_n$,使

$$(T_nu_n,v_n-u_n)\geqslant 0,\qquad \forall\, v_n\in K_n, \tag{2}$$

并记 $S_n=\{u_n\in K_n:(T_nu_n,v_n-u_n)\geqslant 0,\forall\, v_n\in K_n\}$,$S=\{u\in K:(Tu,v-u)\geqslant 0,\forall\, v\in K\}$,且设 $\{K_n\}$ 一致有界.

定理1 设 $\{T_n\}$ 一致有界,渐近半连续,且 $T\xrightarrow{P}T$,又设每一 T_n 单调,则 $S_n\rightharpoonup S$ 且 $S\neq\varnothing$. 当 $u_n\in S_n$ 且 $u_n\rightharpoonup u_0$ 时 $(T_nu_n-T_nu_0,u_n-u_0)\to 0$,$(n\to\infty)$.

证明 仅证 $w-\{S_n\}^*\subset S$. 任取 $v\in K$,$u_0\in w-\{S_n\}^*$,则存在 N',$u_n\in S_n$,$n\in N'$,$v_n\in K_n$ 使 $u_n\rightharpoonup u_0\in K$,$v_n\to v$. 又 $(T_nu_n,v-u_n)\geqslant(T_nu_n,v-v_n)$. 由 T_n 单调得 $(T_nv,v-u_n)\geqslant(T_nu_n,v-v_n)$. $\{T_n\}$ 一致有界 $\Rightarrow\{T_nu_n\}$ 有界,故 $(T_nu_n,v-v_n)\to 0$,$n\in N'$,$n\to\infty$. 而 $(T_nv,v-u_n)\to(Tv,v-u_0)$,$n\in N'$,$n\to\infty$,于是 $(Tv,v-u_0)\geqslant 0$. 易知 T 满足线性化引理的条件,故 $(Tv,v-u_0)\geqslant 0$ 等价于 $(Tu_0,v-u_0)$,因而 $u_0\in S$.

定理1削弱了[2]P. 544 定理A的条件.

推论 设 $T_n=T$ 单调,有界,半连续,则 $S_n\rightharpoonup S$ 且 $S\neq\varnothing$. 又 $u_n\in S_n$ 且 $u_n\rightharpoonup u_0$ 时

$$(Tu_n-Tu_0,u_n-u_0)\to 0,(n\to\infty).$$

此推论即[3]P. 66 定理2.

* 1991年5月9日收到.

定理 2 设$\{T_n\}$渐近强连续，$T_n \xrightarrow{P} T$，则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

推论 设 $T_n = T$ 强连续，则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

定理 3 设$\{T_n\}$渐近列紧，$[\{T_n\}, T]$弱 d－闭，n 充分大时 T_n 次连续. 则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

证明 n 充分大时 $S_n \neq \varnothing$. 任取 $v \in K$，$u_0 \in w-\{S_n\}^*$，则存在 N'，$u_n \in S_n$，$n \in N'$ 且 $u_n \rightharpoonup u_0 \in K$，$v_n \to v$，又$(T_n u_n, v - u_n) \geqslant (T_n u_n, v - v_n)$.

$\{T_n\}$渐近列紧，故存在 $N'' \subset N'$，$y \in X^*$，使 $T_n u_n \to y$，$n \in N''$，$n \to \infty$. 由$[\{T_n\}, T]$弱 d－闭知 $Tu_0 = y$. 令 $n \to \infty$，$n \in N''$，并注意$\{T_n u_n\}$有界，得$(y, v - u_0) \geqslant 0$，于是有$(Tu_0, v - u_0) \geqslant 0$，故 $u_0 \in S$.

推论 $T_n = T$ 列紧，弱闭且 T 次连续，则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

以下考虑 T, T_n 可分别表为 $T = A - B$，$T_n = A_n - B_n$ 的情形，其中 $A, B, A_n, B_n: X \to X^*$ 都是非线性算子.

记

$$S_n = \{u_n \in K_n : (A_n u_n, v_n - u_n) \geqslant (B_n u_n, v_n - u_n), \forall\, v_n \in K_n\},$$

$$S = \{u \in K : (Au, v - u) \geqslant (Bu, v - u), \forall\, v \in K\}.$$

定理 4 设 A_n 单调，$A_n \xrightarrow{P} A$. 且$\{A_n\}$一致有界，渐近半连续，$\{B_n\}$渐近强连续，$B_n \xrightarrow{P} B$. 则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

证明 由所设知 n 充分大时 A_n 次连续且 B_n 强连续，从而 $S_n \neq \varnothing$. 任取 $v \in K$，$u_0 \in w-\{S_n\}^*$，则存在 N'，$u_n \in S_n$，$n \in N'$，且 $u_n \rightharpoonup u_0 \in K$，$v_n \to v$，$v_n \in K_n$. 又$(A_n u_n - B_n u_n, v - u_n) \geqslant (A_n u_n - B_n u_n, v - v_n)$，将其表为 $(A_n u_n, v - u_n) \geqslant (B_n u_n, v - u_n) + (A_n u_n - B_n u_n, v - v_n)$. 利用 A 的单调性得 $(A_n v, v - u_n) \geqslant (B_n u_n, v - u_n) + (A_n u_n - B_n u_n, v - v_n)$. 由$\{A_n\}$一致有界及$\{B_n\}$渐近强连续得$(A_n u_n - B_n u_n, v - v_n) \to 0$. $n \in N'$，$n \to \infty$. 再由 $B_n u_n \to Bu_0$ 知$(Av, v - u_0) \geqslant (Bu_0, v - u_0)$又由所设易得 A 次连续，于是由[1]引理 1 知 $u_0 \in S$.

推论 设 $A_n = A$ 单调，有界，次连续，$B_n = B$ 强连续. 则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

当$\{K_n\}$到 K 的近似采用投影方法时，上述推论即为 $D(A) = D(B) = X$（文[1]的定理 2）.

定理 5 设 A_n 单调，一致有界，$A_n \xrightarrow{P} A$，且$\{A_n\}$渐近半连续，$\{B_n\}$渐近列紧. $[\{B_n\}, B]$弱 d－闭，且 B_n 次连续，则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

推论 设 $A_n = A$ 单调，有界，半连续，$B_n = B$ 列紧，弱闭，次连续，则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

定理 6 设$\{A_n\}$渐近列紧，$[\{A_n\}, A]$弱 d－闭，A_n 次连续，$\{B_n\}$渐近强连续，且 $B_n \xrightarrow{P} B$，则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

推论 设 $A_n = A$ 列紧，弱闭，次连续，$B_n = B$ 强连续，则 $S_n \rightharpoonup S$ 且 $S \neq \varnothing$.

参 考 文 献

[1] 雷晋干，郭少穆，基于集合弱收敛的变分不等式近似，数学物理学报，3(1990)，288－294.

[2] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solution of variational inequalities*, Adv. in Math. 3, 4(1969) 510－585.

[3] U. Mosco，变分不等式近似解引论(中译本)，上海科技出版社，1985.