第 14 卷第 4 期
1994 年 11 月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 14 No. 4
Nov. 1994

有面积的曲线的性质及高维推广*

汪富泉　　　　李后强
(四川师范学院数学系, 637002)　　(四川大学物理系, 610064)

摘　要　本文研究平面上有面积的曲线的分形性质及其在 d 维欧氏空间 E^d 中的推广. 对瘦分形曲线, 分维 $D_f=\ln 2^d/\ln(2/k^{1/d})$, 而对于胖分形曲线, 分形指数 $\beta=-\ln k/\ln 2$, $\alpha=d$. $d=2$ 时的胖分形曲线包括经典的 Peano 曲线为其特例.

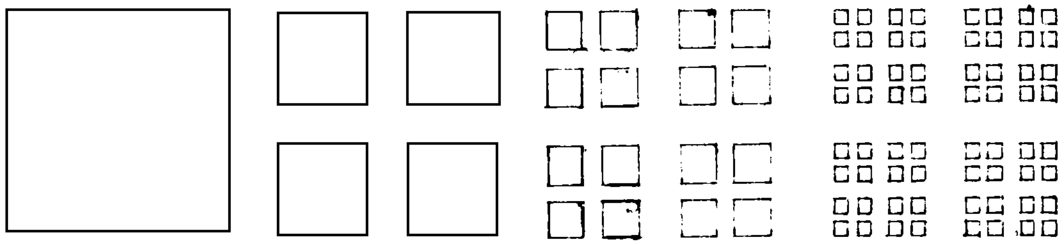
关键词　分形, 分形曲线, 分维, 胖分形指数.

一　引　言

有面积的曲线是拓扑学中的著名反例之一[1], 我们发现它与 Peano 曲线一样, 是一条胖形曲线. 首先, 我们求出了这一曲线的胖分形指数. 然后, 将这一曲线在平面上推广, 得到一分形曲线. 这类分形曲线由参量 k 和 σ 决定. 当 k 逐渐由大变小时, 曲线逐渐由瘦分形生长成胖分形, 其复杂程度和无规则程度逐渐增加. 有趣的是, $\sigma=0$ 的极端情形便是 D. Hilbert 绘制的 Peano 曲线[2]. 最后, 我们将所论的分形曲线推广到了一般的 d 维欧氏空间 E^d 中.

二　有面积曲线的构造及其分形特征

取一单位正方形 A_0, 从中间割去面积为 1/4 的十字带, 四角上留下的四个小正方形记为 A_1. 对 A_1 的每个小正方形重复上述过程, 使割去的小十字带面积之和为 1/8. 前三次构造如图 1 所示.



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图 1.　平面上有面积的尘集的构造 (a). 初始正方形 A_0. (b)－(d). 前三次构造

* 1991 年 10 月 7 日收到. 1993 年 4 月 12 日收到修改稿. 国家科委重点科研项目和四川青年科技基金资助.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

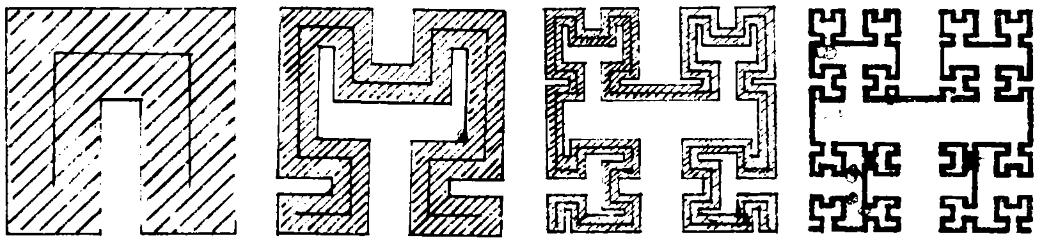
不断重复图 1(b)—(d)所示的手续至无穷，产生一个单调递缩的图形序列$\{A_n:n\in N\}$，其极限图形 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. $\forall\ n\in N$，图形 A_n 由 4^n 个小正方形组成，其边长

$$y_n=\sqrt{2+2^{-n+1}}/2^{n+1}. \tag{1}$$

被割去的小十字带面积之和为 $1/2^{n+1}$. 十字带的宽度

$$x_n=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+2^{-n+1}}-\sqrt{1+2^{-n}}\right)/2^n. \tag{2}$$

现在我们作一条曲线 B，使 B 通过集 A 的全部点. 首先取包含 A_1 的弯曲长条 B_1 使其包含 A_1 的四个正方形. 第二步作包含 A_2 的更窄更弯曲的长条 B_2 等等. 构造的前四步如图 2 所示.



(a) (b) (c) (d)

图 2. 有面积的分形曲线构造的前四步

重复图 2 所示的构造过程至无穷，得一单调递缩集合序列$\{B_n:n\in N\}$. $\forall\ n\in N$，$B_{n+1}\subset B_n$，$A_n\subset B_n$. 因此极限集 $B=\lim\limits_{n\to\infty}B_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，且 $A\subset B$. 组成 B_n 的弯曲长条宽度为 y_n，由(1)知，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故 B 是平面上的一条曲线.

在 E^2 上取欧氏距离诱导的通常拓扑，A_0 和 B 取相对拓扑，从 B 的作法易知 B 有如下拓扑性质.

命题 1 (i) B 是同胚于直线段的简单弧，

(ii) B 是紧致的，

(iii) B 是连通和局部连通的.

设 $L^n(F)$，$H^n(F)$分别表示集 F 的 n 维 Lebesgue 测度和 n 维 Hausdorff 测度. 可以证明，B 具有近似于 Weierstrass 函数的分析性质.

命题 2 B 是一条处处连续但 H^2-几乎处处不可微的曲线.

证明 由 B 的作法知，B 由两类点组成，一类是 A 中的点，它们是曲线 B 上的尖(或角)点. 在这些点处，曲线 B 无切线，或者说曲线 B 在这些点处具有零曲率半径. 将这些点作成的集记作 B_{ir}，它是曲线 B 的非规则点集[3]. 另一类是连结 B_{ir} 中那些点的开直线段的并(不包含 B_{ir} 中的点)，记作 B_r，$B_r=B\backslash B_{ir}$. 在 B_r 中每一点，B 有切线. B_r 是 B 的规则点集.

设 B_{rn} 表示 B_r 的第 n 代粗粒集，其二维 Lebesgue 测度

$$L^2(B_{rn})=3y_n\sum_{i=1}^{n}4^{i-1}x_i, \tag{3}$$

所以 B_r 的二维 Hausdorff 测度

$$H^2(B_r)=\frac{12}{\pi}\lim_{n\to\infty}y_n\sum_{i=1}^{n}4^{i-1}x_i. \tag{4}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

通过简单计算知

$$4^{i-1}x_i = \sqrt{2}\,2^i(\sqrt{1+2^{-i+1}} - \sqrt{1+2^{-i}})/4 \leqslant \sqrt{2}/8. \tag{5}$$

由(1),(5),(4)和测度的非负性知 $H^2(B_r)=0$. 因 $B=B_r\cup B_{ir}$ 且 $B_r\cap B_{ir}=\varnothing$,因此,除去一个二维 Hausdorff 测度为零的点集外,B 是不可微的. 故 B 是一条 H^2-几乎处处不可微的曲线. 由 B 的作法,连续性显然. 证毕.

上述命题说明 B_{ir} 中的点可能比 B_r 中的点多,下面关于 B 的测度性质的命题说明确是如此.

命题 3 曲线 B 具有无限长度且具有正的有限面积.

证明 由曲线 B 的构造知,B 的长度

$$L^1(B) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^n y_n + 3\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1}x_n. \tag{6}$$

由(1),(2)推得 $L^1(B)=+\infty$. 从集 A 的构造知,A 的面积

$$L^2(A) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{K+1}} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

而 $A\subset B\subset A_0$,根据测度的单调性有 $1/2\leqslant L^2(B)\leqslant L^2(A_0)=1$. 即 B 有无穷长度和正的有限面积. 证毕.

由(7)知,$H^2(B_{ir})=H^2(A)=2/\pi$,说明 B 中无切线的点确实远远多于有切线的点,这是 B 的奇异性质之一. 另一奇异性质是命题 3 所述,B 是有限区域(单位正方形)内一条无线长的曲线,既不自交也不重复;它的宽度无限细却又有正的面积. 折中的办法只能是 B 进行无穷层次的凹凸与折叠,因此它必须是一个分形.

定理 1 B 是一条胖分形曲线,其分形指数 $\beta=1$.

证明 命题 2、3 已说明 B 是分形曲线. 由 $A\subset B\subset A_0$ 和(7)式知 B 的二维 Hausdorff 测度

$$2/\pi \leqslant H^2(B) \leqslant 4/\pi. \tag{8}$$

由定义[3,4]知,B 的 Hausdorff 维数 $D_H(B)=2$. 它严格大于 B 的拓扑维数 $D_T(B)=1$ 且与嵌入空间维数相等. 由[5],B 是一条胖分形曲线.

由(3),(5)两式知,B 的第 n 代粗粒集 B_n 的二维 Lebesgue 测度满足

$$4^n y_n^2 \leqslant L^2(B_n) \leqslant 4^n y_n^2 + 3\sqrt{2}\,n y_n/8. \tag{9}$$

令 $\varepsilon=y_n$, $L^2(\varepsilon)=L^2(B_n)$,由(1),(9)两式,有

$$L^2(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} L^2(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} L^2(B_n) = 1/2. \tag{10}$$

令 $f(\varepsilon)=L^2(\varepsilon)-L^2(0)$,由(1),(9),(10)得

$$1/2^{n+1} \leqslant f(\varepsilon) \leqslant [4 + 3\sqrt{2}\,n(1+2^{-n})]/2^{n+3}. \tag{11}$$

根据分形指数 β 的定义[5,6],$\beta=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ln f(\varepsilon)/\ln\varepsilon$,从(11)得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 1/2^{n+1}}{-\ln 2^{n+1}/\sqrt{2+2^{-n+1}}} \leqslant \beta \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\ln[4+3\sqrt{2}\,n(1+2^{-n})]/2^{n+3}}{-\ln 2^{n+1}/\sqrt{2+2^{-n+1}}}.$$

由此可得 $\beta=1$. 证毕.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

三 推 广

首先可将 B 推广到 E^2 上的一类曲线，构造方法与 B 类似. 不同之处在于，第一步从 A 中割去的十字带面积为任意常数 σ, $0\leqslant\sigma\leqslant1/2$，第 j 步割去的小十字带面积之和为 $k^{j-1}\sigma$, $0\leqslant k\leqslant 1/2$. 极限情形是一类曲线，记为 $B(\sigma,k)$. 其性质由参量 k, σ 决定，它可以是瘦分形或胖分形. 与 B 的讨论一样，可求得 $B(\sigma,k)$ 的分维和分形指数 β，而且还可求得[7]中引入的另一分形指数 α. 有关结果即下述定理 2、3 中 $d=2$ 的情形.

上述构造也可推广到高维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^d$ 中. 只需将 $B(\sigma,k)$ 构造过程中的"正方形"改成"d 维单位立方块"，"十字带"改成"d 个两两正交的 d 维长方体"，"弯曲长条"改成"d 维弯曲体"即可. 在构造的第 n 步，所得图形 S_n 包含 2^{nd} 个 d 维小立方体，边长

$$y_n = (1-\sigma\sum_{j=0}^{n-1}k^j)^{1/d}/2^n, \tag{12}$$

还包含连结这些 d 维立方体的 $\sum_{j=1}^{n}(2^d-1)2^{(j-1)d}$ 个 d 维小长方体. 其 $d-1$ 条边长为 y_n，另一条边长为

$$\left.\begin{aligned} x_j &= y_{j-1}-2y_j = [(1-\sum_{i=0}^{j-2}k^i\sigma)^{1/d}-(1-\sum_{i=0}^{j-1}k^i\sigma)^{1/d}]/2^{j-1},\\ &\quad j=2,3,\cdots,n,\\ x_1 &= 1-2y_1 = 1-(1-\sigma)^{1/d}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$\{S_n:n\in N\}$ 的极限集 S 是 $\boldsymbol{E}^d$ 中的一个紧致连通集.

定理 2 S 是分形集. $\forall\, k\in(0,1/2]$, $\sigma\in[0,1-k)$, S 的 Hausdorff 维数 $D_H(S)=d$，分形指数

$$\beta=\begin{cases}\ln k/\ln 1/2 & 0<\sigma<1-k,\\ -\ln k/\ln(2/k^{1/d}) & \sigma=1-k,\end{cases}$$

$$\alpha=\begin{cases}d & 0\leqslant\sigma<1-k,\\ d+\ln k/\ln(2/k^{1/d}) & \sigma=1-k.\end{cases}$$

证明 一般情形的证明较难，计算较复杂，在计算时，我们只取无穷小量的主部而略去高阶无穷小项.

根据 S 的结构，将存在切空间的点集记作 S_r，记 $S_{ir}=S\backslash S_r$. 则

$$H^d(S_{ir}) = [1-\sigma/(1-k)]2^d(\frac{1}{2}d!)/\pi^{d/2}, \tag{14}$$

$$x_j \approx (k/2)^{j-1}/d,$$

$$L^d(S_r) = (2^d-1)\lim_{n\to\infty}y_n^{d-1}\sum_{j=1}^{n}(2^d)^{j-1}x_j. \tag{15}$$

于是 $H^d(S_r)=0$. 与定理 1 同理可知 S 是分形集. $\forall\,\sigma\in[0,1-k)$，由 $S_{ir}\subset S$, $S_r\cap S_{ir}=\varnothing$ 知

$$0<[1-\sigma/(1-k)]2^d(\frac{1}{2}d!)/\pi^{d/2}\leqslant H^d(S)\leqslant 2^d(d!/2)/\pi^{d/2}.$$

因此 $D_H(S)=d$，即 S 为胖分形集.

令 $\varepsilon=2^{-n}[1-\sigma(1-k^n)/(1-k)]^{1/d}$，则 S 的尺度为 ε 的粗粒集 S_n 的 d 维 Lebesgue 测度

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$L^d(S_n)=2^{nd}y_n^d+(2^d-1)y_n^{d-1}\sum_{j=1}^{n}(2^d)^{j-1}x_j. \tag{16}$$

由此知

$$L^d(\varepsilon)=L^d(S_n)\approx 1-\sigma(1-k^n)/(1-k)$$
$$+2^{-n(d-1)}\sigma[1-\sigma(1-k^n)/(1-k)]^{\frac{d-1}{d}}[1-(2^{d-1}k)^n]/(1-2^{d-1}k)d,$$
$$L^d(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}L^d(\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}L^d(S_n)=1-\sigma/(1-k),$$
$$f(\varepsilon)=L^d(\varepsilon)-L^d(0)\approx \sigma k^n/(1-k)$$
$$+2^{-n(d-1)}\sigma[1-\sigma(1-k^n)/(1-k)]^{\frac{d-1}{d}}[1-(2^{d-1}k)^n]/(1-2^{d-1}k)d.$$

应用极限理论的施笃兹定理得 $\beta=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln f(\varepsilon)/\ln\varepsilon=-\ln k/\ln 2$. 当 $\sigma=1-k$ 时，由(12)，(13)，有

$$y_n=2^{-n}k^{n/d}, \tag{17}$$
$$x_j=2^{-j+1}(k^{(j-1)/d}-k^{j/d})\quad j=1,\cdots,n. \tag{18}$$
$$L^d(S)=\lim_{n\to\infty}[k^n+(2^d-1)2^{-n(d-1)}(k^{\frac{d-1}{d}})^n(1-k^{1/d})\sum_{j=1}^{n}(2^{d-1}k^{1/d})^{j-1}]=0,$$

这时 S 是瘦分形，其 Hausdorff 维数将在下节给出. 这时的分形指数 $\beta=-\ln k/\ln(2/k^{1/d})$.

现在用小量 ε 加胖 S 得胖集 $S(\varepsilon)$ 的粗粒集 S_n. 从胖集 $S(\varepsilon)$ 中削去原集 S，其长胖部分 $\overline{S}(\varepsilon)=S(\varepsilon)\backslash S$. 它的粗粒集的 Lebesgue 测度 $L^d(\overline{S}(\varepsilon))=L^d(\varepsilon)$，外容量维[7]

$$d_x=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln L^d(\overline{S}(\varepsilon))/\ln\varepsilon=0,$$

从而胖分形指数 $\alpha=d-d_x=d$. 当 $\sigma=1-k$ 时，从(16)，(17)，(18)同理可求得

$$\alpha=d+\ln k/\ln(2/k^{1/d}).$$

证毕.

四 特殊情况

现在我们讨论上节中集 S 的几种特殊情况.

1. $d=2$. 这时 S 即为 $B(\sigma,k)$，特别当 $\sigma=1/4$，$k=1/2$ 时得曲线 B.

2. $\sigma=1-k$. 这时 S 是瘦分形. 由(17)，(18)两式易得

$$y_{n+1}/y_n=2^{-(n+1)}k^{(n+1)/d}/2^{-n}k^{n/d}=k^{d/2}/2,$$
$$x_{n+1}/x_n=2^{-n}(k^{n/d}-k^{(n+1)/d})/2^{-n+1}(k^{(n-1)/d}-k^{n/d})=k^{d/2}/2.$$

因此 S 是自相似的. 即把 S 的每一局部沿每个独立方向放大 $2/k^{d/2}$ 倍，即得 2^d 个与原图形一样的新图形，故有

定理 3 若 $\sigma=1-k$，则集 S 的 Hausdorff 维数 $D_H(S)=\ln 2^d/\ln(2/k^{d/2})$.

3. $d=2$，$\sigma=0$. 这种情况下的分割过程实质上是对正方形 A_0 的一个无限细划. 这时 k 无意义，按前几节的方法也不能直接作出曲线. 但是，我们可以合理地把它看成是 k 取 $(0,1/2]$ 内任一确定的值，$\sigma\in(0,1-k)$ 时，$B(\sigma,k)$ 在 $\sigma\to 0$ 时的极限，将其记作 $B(0,k)$. 十分有趣的是，由 $B(\sigma,k)$ 的结构知，$B(0,k)$ 正好与 D. Hilbert 绘制的 Peano 曲线[2]一致. 因此，我们构造的这类曲线也包含了 Peano 曲线这一特例.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

[1] B.Г.巴尔佳斯基，B.A.叶弗来莫维奇，拓扑学奇趣(裘光明译)，北京大学出版社，(1987)，28—34.

[2] 李后强，程光钺，分形与分维，四川教育出版社，(1990)，36—37.

[3] K.J.Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, C· ·brige Univ. Press, New York, (1985).

[4] B.B.Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nat*. · . W.H.Freeman, (1982).

[5] D.K,Umberger and J.D.Farmer, Phys. Rev. Lett, 55(1985), 661—664.

[6] 李后强，方曙，自然杂志，14(4)(1991)，215.

[7] C.Grebogi, S.W.McDonald, E.Ott and J.A Yorke, Phys. Lett 110A, No1, (1985), 1—4.

The Properties of the Curve Having Area and its Generalizations of Higher Dimension

Wang Fuquan

(Dept. of Math., Sichuan Teacher's College, Nanchang)

Li Houqiang

(Dept. of Phys., Sichuan University, Chengdu)

Abstract

This paper studied the fractal properties of the curve having area on the plane and its generalization in the d-dimensional Euclid space E^d. For thin fractal curves, the fractal dimension $D_f = \log 2^d/\log(2/k^{1/d})$, for fat fractal curves, the fractal exponents $\beta = -\log k/\log 2$, $\alpha = d$. When $d = 2$, the fat fractal curves include classical Peano's curve drawn by D. Hilbert.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.