第15卷第1期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 1
1995年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1995

Volterra型积分微分方程非线性边值问题*

张　祥

(南京大学数学系，南京 210093)

摘　要　本文首先利用上、下解方法研究了一类Volterra型积分微分方程Dirichlet问题和非线性边值问题的解的存在性；然后，利用所得到的微分不等式理论考虑一类相应的奇摄动非线性边值问题，获得包括边界层在内的一致有效渐近解的存在性.

关键词　积分微分方程，边值问题，奇摄动，上、下解，边界层.

分类号　AMS(1991) 45D05，34A40/CCL O175.5

§1　引　言

关于常微分方程边值问题的研究已有大量的研究成果[1-4]. 而至于积分和积分微分方程边值问题的工作却所见甚少[5-8]. 尤其是非线性边值问题的研究似乎无人问津. 本文考虑如下问题：

$$x''=f(t,x,x',Tx),\quad a<t<b, \tag{1.1}$$

$$g(x(a),x'(a))=h(x(b),x'(b))=0, \tag{1.2}$$

其中 f 于 $[a,b]\times R^3$ 上连续，g，h 于 R^2 上连续，$[Tx](t)=\varphi(t)+\int_a^t K(t,s)x(s)ds$，$\varphi(t)$ 和 K(t，s)分别于[a，b]和$[a,b]^2$上连续. 在§2中，我们证明(1.1)关于*Dirichlet*问题的比较定理. 在§3中利用§2的结果建立了(1.1)，(1.2)的微分不等式理论. 最后，应用所得结果研究如下奇摄动非线性边值问题：

$$\varepsilon x''=f(t,x,x',T_\varepsilon x,\varepsilon),\quad a<t<b, \tag{1.3}$$

$$g(x(a,\varepsilon),x'(a,\varepsilon),\varepsilon)=h(x(b,\varepsilon),x'(b,\varepsilon),\varepsilon)=0, \tag{1.4}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是小参数，$T_\varepsilon x$ 是含参数 ε 的积分算子. 在适当的假设下，我们获得上述问题的边界层解的一致有效渐近估计.

§2　Dirichlet问题的存在性定理

为了证明需要，首先定义上、下解概念.

定义　连续函数 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ 分别称为方程(1.1)的下解和上解，如果

* 1992年5月5日收到. 93年7月5日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

(i) $\alpha(t),\beta(t)$在$[a,b]$上是分段C^2类的，即存在几个分划$\{t_i\}_{i=0}^{n}$，$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，使得$\alpha(t),\beta(t)\in C^2[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且在分点$t_i(i=1,\cdots,n-1)$成立$D_l\alpha(t_i)\leqslant D_r\alpha(t_i)$，$D_l\beta(t_i)\geqslant D_r\beta(t_i)$，其中$D_l$和$D_r$分别表示左、右导数；

(ii) $\alpha(t)\leqslant\beta(t)$, $t\in[a,b]$,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha''\geqslant f(t,\alpha,\alpha',T\alpha),\\ \beta''\leqslant f(t,\beta,\beta',T\beta),\end{array}\right. \quad t\in(t_{i-1},t_i),\ i=1,2,\cdots,n.$$

为了避免重复，我们列出以下几条假设，设I是某实区间.

$H_0(I)$ 设$x(t)$是方程(1.1)的带有极大存在区间$J(\subset I)$的解. 如果$x(t)$在J上有界，则$x'(t)$也在J上有界.

H_1 设$\alpha(t),\beta(t)$是方程(1.1)满足$\alpha(a)<\beta(a)$的下解和上解函数，g关于x'非减，令G是定义在$[\alpha(a),\beta(a)]\times R^2$上满足$g(\alpha(a),\alpha'(a))\geqslant 0$，$g(\beta(a),\beta'(a))\leqslant 0$的所有连续函数$g(x,x')$的集合；

H_2 设$\alpha(t),\beta(t)$是方程(1.1)满足$\alpha(b)<\beta(b)$的下解和上解函数，h关于x'非减，令H是定义在$[\alpha(b),\beta(b)]\times R^2$上满足$h(\alpha(b),\alpha'(b))\leqslant 0$，$h(\beta(b),\beta'(b))\geqslant 0$的所有连续函数$h(x,x')$的集合.

现在考虑非线性方程 Dirichlet 问题：

$$x''=f(t,x,x',Tx),\quad a<t<b, \tag{2.1}$$

$$x(a)=c,\quad x(b)=d. \tag{2.2}$$

引理1 设$f(t,x,y,z)$在$[a,b]\times R^3$上连续有界，则(2.1)，(2.2)在$[a,b]$上存在一个C^2类的解$x(t)$.

证明 利用 Green 函数[12]和 Schauder 不动点定理[9]可以得出结论.

对于一般的连续函数$f(t,x,x',Tx)$，我们定义下列变形函数

$$F(t,x,x',Tx)=\begin{cases}f(t,\beta(t),x',T\beta)+\dfrac{x-\beta}{1+x-\beta}, & x\geqslant\beta,\\ f(t,x,x',Tx), & \alpha<x<\beta,\\ f(t,\alpha,x',T\alpha)+\dfrac{x-\alpha}{1+\alpha-x}, & x\leqslant\alpha,\end{cases}$$

$$F_N(t,x,x',Tx)=\begin{cases}F(t,x,N,Tx), & x'\geqslant N,\\ F(t,x,x',Tx), & -N<x'<N,\\ F(t,x,-N,Tx), & x'\leqslant -N.\end{cases}$$

现在转向考虑方程：

$$x''=F(t,x,x',Tx), \tag{2.3}$$

$$x''=F_N(t,x,x',Tx). \tag{2.4}$$

引理2 假设α,β是如上定义的下解和上解函数，$x(t)$是方程(2.3)或(2.4)在区间$I\subset[a,b]$上的解，$p,q\in I(p<q)$，且$\alpha(p)<x(p)<\beta(p)$. 如果$x(q)>\beta(q)$，则$x(t)>\beta(t)$，$t\in I\cap[q,b]$；如果$x(q)<\alpha(q)$，则$x(t)<\alpha(t)$，$t\in I\cap[q,b]$.

证明 我们只对方程(2.3)和$x(q)>\beta(q)$的情形考虑. 至于其它情况可以类似证得结论.

反证法 若存在一点$\bar t\in I\cap[q,b]$，使得$x(\bar t)=\beta(\bar t)$，则$x(t)-\beta(t)$在某点$t_0\in(p,\bar t)$取得正

的最大值. 若 $t_0 \neq t_i (i=1,2,\cdots,n-1)$，则有 $x(t_0)-\beta(t_0)>0, x'(t_0)-\beta'(t_0)=0$ 和 $x''(t_0)-\beta''(t_0) \leqslant 0$，而

$$\begin{aligned} x''(t_0)-\beta''(t_0) &\geqslant F(t_0,x(t_0),x'(t_0),[Tx](t_0)) - f(t_0,\beta(t_0),\beta'(t_0),[T\beta](t_0)) \\ &= f(t_0,\beta(t_0),x'(t_0),[T\beta](t_0)) + \frac{x(t_0)-\beta(t_0)}{1+x(t_0)-\beta(t_0)} \\ &\quad - f(t_0,\beta(t_0),\beta'(t_0),[T\beta](t_0)) = \frac{x(t_0)-\beta(t_0)}{1+x(t_0)-\beta(t_0)} > 0, \end{aligned}$$

这就得出矛盾；若 $t_0=t_i (i=1,2,\cdots,n-1)$，则有 $D_l x(t_0) \geqslant D_l\beta(t_0)$，$D_r x(t_0) \leqslant D_r\beta(t_0)$，又因 $D_l\beta(t_0) \geqslant D_r\beta(t_0)$，从而 $D_l\beta(t_0)=D_r\beta(t_0)=x'(t_0)$. 即 $\beta'(t_0)=x'(t_0)$，则有

$$\begin{aligned} D_l x'(t_0) - D_l\beta'(t_0) &\geqslant F(t_0,x(t_0),x'(t_0),[Tx](t_0)) - f(t_0,\beta(t_0),\beta'(t_0),[T\beta](t_0)) \\ &= \cdots = \frac{x(t_0)-\beta(t_0)}{1+x(t_0)-\beta(t_0)} > 0, \end{aligned}$$

这与 $x(t)-\beta(t)$ 在 $t_0=t_i$ 取最大值的条件相矛盾. 因此，引理结论成立.

下面的引理是证明存在性定理所必需的，它的证明是文献[10]引理 3.2 的略微修改.

引理 3 设 Z 是 $\{a\}\times R^2$ 的闭子集，且假设 $H_0([a,b])$ 满足. 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是方程 $x''=f_n(t,x,x',Tx)$ 带有 Z 中初始条件且在 $[a,b]$ 上一致有界的解序列，其中 f_ns(是 $f_n(t,x,y,z)$ 的缩写记号)在 $[a,b]\times R^3$ 上连续，且在其紧子集上一致收敛到 f，则在 $[a,b]$ 上存在方程 $x''=f(t,x,x',Tx)$ 的一个解 $x(t)$，且 $x(t)$ 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的某子列的一致收敛极限.

定理 1 设 α,β 如上定义，c 和 d 是满足 $\alpha(a)\leqslant c\leqslant\beta(a)$，$\alpha(b)\leqslant d\leqslant\beta(b)$ 的任意实数，且假设 $H_0([a,b])$ 成立，则边值问题(2.1)，(2.2)在 $[a,b]$ 上存在一个满足 $\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)$ 的解 $x(t)\in C^2[a,b]$.

证明 由于 $F_N(t,x,x',Tx)$ 在 $[a,b]\times R^3$ 上连续有界，根据引理 1，边值问题(2.4)，(2.2)存在一个解 $x_N(t)\in C^2[a,b]$. 再由引理 2 知，$\alpha(t)\leqslant x_N'(t)\leqslant\beta(t)$. 又从 F_N,F 的定义和假设 $H_0([a,b])$ 知，$\{F_N\}_{N=1}^{\infty}$ 在 $[a,b]\times R^3$ 的紧子集上一致收敛到 F，且对于 $\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)$. F 与 f 一致. 因此，利用引理 3 可得，存在 $\{x_N\}_{N=1}^{\infty}$ 的一个子序列在 $[a.b]$ 上一致收敛到(2.1)，(2.2)的一个解 $x(t)$，且满足 $\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$.

§3 非线性边值问题的存在性定理

本节考虑如下非线性边值问题：

$$x''=f(t,x,x',Tx), \quad a<t<b, \tag{3.1}$$

$$g(x(a),x'(a))=h(x(b),x'(b))=0, \tag{3.2}$$

其中 f,g 和 h 如前面假设.

定理 2 设 $\alpha(t),\beta(t)$ 分别是(3.1)的下解和上解，且 $\alpha(b)<\beta(b)$ 和假设 $H_0([a,b])$ 满足. 若 $h(x,y)\in H$ 和 H_2 成立，则对任意 $\alpha(a)\leqslant c\leqslant\beta(a)$，边值问题：

$$x''=f(t,x,x',Tx), \tag{3.3}$$

$$x(a)=c, \quad h(x(b),x'(b))=0 \tag{3.4}$$

在 $[a,b]$ 上存在一个满足 $\alpha(t)\leqslant x_c(t)\leqslant\beta(t)$ 的 C^2 类解 $x_c(t)$.

证明 要证定理结论成立,只需考虑对任意给定的 $\varepsilon>0$,方程(3.3)在$[a,b]$上存在一个满足 $x(a,\varepsilon)=c$, $|h(x(b,\varepsilon),x'(b,\varepsilon))|<\varepsilon$ 和 $\alpha(t)\leqslant x(t,\varepsilon)\leqslant\beta(t)$ 的解 $x(t,\varepsilon)$.

取 $\pi(d)(\alpha(b)\leqslant d\leqslant\beta(b))$表示边值问题

$$x''=f(t,x,x',Tx),\quad x(a)=c,\ x(b)=d$$

满足 $\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)$的解集,定理1说明 $\pi(d)$非空.若定理不成立,则存在某 $\varepsilon_0>0$,使得对任意的 $d\in(\alpha(b),\beta(b))$和 $x(t)\in\pi(d)$,恒有$|h(x(b),x'(b))|\geqslant\varepsilon_0$.当 $x(t)\in\pi(\beta(b))$,则有 $x'(b)>\beta'(b)$,从而 $h(x(b),x'(b))\geqslant\varepsilon_0$.类似地,当 $x(t)\in\pi(\alpha(b))$,有 $h(x(b),x'(b))\leqslant-\varepsilon_0$.令

$$D=\{x(t)\in\pi(d):\alpha(b)\leqslant d\leqslant\beta(b),\ h(x(b),x'(b))\leqslant-\varepsilon_0\}.$$

取 $d_0=\sup\{x(b):x(t)\in D\}$,由于 $h(x,y)$关于 y 非减,从而 $d_0<\beta(b)$.由定理1,可取方程(3.1)带有边值条件 $x_0(a)=c,x_0(b)=d_0$ 和 $h(x_0(b),x_0'(b))\leqslant-\varepsilon_0$ 的解 $x_0(t)$是 D 的元素的一致极限.

取 $M\geqslant1$,使得 $d_0+\frac{1}{M}\leqslant\beta(b)$,对 $m\geqslant M$,令 $x_m\in\pi(d_0+\frac{1}{m})$,在$[a,b]$上满足 $x_m(t)\geqslant x_0(t)$.因此,x_m 的一个子序列在$[a,b]$上收敛到 $z_0(t)\in\pi(d_0)$,且有 $z_0(t)\geqslant x_0(t)$.根据 d_0 的定义,则有 $h(x_m(b),x_m'(b))\geqslant\varepsilon_0$,从而 $h(z_0(b),z_0'(b))\geqslant\varepsilon_0$.这与 $z_0'(b)\leqslant x_0'(b)$相矛盾,定理证毕.

推论 设 $\alpha(t),\beta(t)$分别是(3.1)的下解和上解,且在$[a,b]$上,$\alpha(t)\leqslant\beta(t)$,$\alpha(a)<\beta(a)$和假设 $H_0([a,b])$满足,若 $g(x,x')\in G$ 和假设 H_1 成立,则对任意 $\alpha(b)\leqslant d\leqslant\beta(b)$,边值问题:

$$x''=f(t,x,x',Tx),\quad a<t<b,\tag{3.5}$$

$$g(x(a),x'(a))=0,\quad x(b)=d\tag{3.6}$$

在$[a,b]$上存在满足 $\alpha(t)\leqslant x_d(t)\leqslant\beta(t)$的 C^2 类解 $x_d(t)$.

定理3 设 $\alpha(t),\beta(t)$是方程(3.1)的下解和上解,且 $\alpha(a)<\beta(a)$,$\alpha(b)<\beta(b)$.若 $g(x,x')\in G$,$h(x,x')\in H$ 和假设 $H_0([a,b])$,H_1,H_2 成立,则边值问题(3.1),(3.2)存在一个解 $x(t)\in C^2[a,b]$,且满足 $\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)$,$a\leqslant t\leqslant b$.

证明 对每个 $\alpha(a)\leqslant c\leqslant\beta(a)$,取 $\pi(c)$为边值问题:$x''=f(t,x,x',Tx)$,$x(a)=c$,$h(x(b),x'(b))=0$ 在$[a,b]$上满足 $\alpha(t)\leqslant x(t)\leqslant\beta(t)$的解集,由定理2知,$\pi(c)$非空.接着,利用反证法,类似定理2可证定理3结论成立.

§4 定理3在奇摄动问题中的应用

文献[5]-[8]用渐近分析的方法构造了几类积分和微分方程的形式渐近解,文献[13]构造了一类奇摄动 Robin 问题的一致有效渐近解.本节首先利用合成展开法构造(1.3),(1.4)的具有边界层的形式渐近解.接着,借助定理3的结果证明形式解的一致有效性.记(1.3)的积分算子 $[T_\varepsilon x](t,\varepsilon)=\varphi(t,\varepsilon)+\int_a^t K(t,s)x(s,\varepsilon)ds$.为方便起见,首先提出如下假设:

(a) 函数 f,g,h,φ 和 K 在各自的区域上无穷次连续可微;

(b) 存在正常数 $k>0$,使得在$[a,b]\times R^3\times[0,\varepsilon_0]$($\varepsilon_0>0$ 是小的常数)上,$f_y(t,x,y,z,\varepsilon)\geqslant k>0$;

(c) 退化问题:

$$f(t,u,u',T_0u,0)=0,\quad a<t<b,\tag{4.1}$$

$$g(u(a),u'(a),0)=0,\tag{4.2}$$

在$[a,b]$上存在充分光滑的解$\bar{u}(t)$，其中$T_0=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}T_\varepsilon$；

(d) g关于x'非减，h关于x'严格增，且$g_x[a]-g_y[a]P(a)\neq 0$，其中$[a]=(\bar{u}(a),\bar{u}'(a),0)$，$P(t)=f_y^{-1}(t,\bar{u},\bar{u}',0)f_x(t,\bar{u},\bar{u}',0)$.

设原奇摄动问题的外部解具有如下形式，令

$$u(t,\varepsilon)=u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2u_2(t)+\cdots. \tag{4.3}$$

把(4.3)代入(1.3)和a点的边界条件，得到

$$\varepsilon u''=f(t,u,u',T_\varepsilon u,\varepsilon), \tag{4.4}$$

$$g(u(a,\varepsilon),u'(a,\varepsilon),\varepsilon)=0. \tag{4.5}$$

将$f,T_\varepsilon u$和g展开为ε的Taylor级数，则有

$$f(t,u,u',T_\varepsilon u,\varepsilon)\equiv F(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}F_i\varepsilon^i,\quad T_\varepsilon u=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iT_iu_i,$$

$$g(u(a,\varepsilon),u'(a,\varepsilon),\varepsilon)\equiv G(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}G_i\varepsilon^i,$$

其中

$$T_iu_i=\varphi_i(t)+\int_a^tK(t,s)u_i(s)ds,\quad \varphi_i(t)=\left.\frac{\partial\varphi(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^i}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$F_0=f(t,u_0,u_0',T_0u_0,0),\quad G_0=g(u_0(a),u_0'(a),0),$$

$$\left.\begin{aligned}F_i&=f_x[t]u_i+f_y[t]u_i'+f_z[t]T_iu_i+\overline{F}_i(t),\\ G_i&=g_x[a]u_i(a)+g_y[a]u_i'(a)+\overline{G}_i(a),\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,\cdots,$$

$[t]=(t,u_0,u_0',T_0u_0,0)$，$\overline{F}_i(t)$是关于$u_j,u_j',T_ju_j(j=0,1,\cdots,i-1)$的函数，$\overline{G}_i(a)$是关于$u_j(a),u_j'(a)$ $(j=0,1,\cdots,i-1)$的函数.

利用f,g的展开式，令(4.4)，(4.5)式两边ε同次幂的系数相等，则得到u_i所满足的初值问题：

$$f(t,u_0,u_0',T_0u_0,0)=0, \tag{4.6}$$

$$f_x[t]u_i+f_y[t]u_i'+f_z[t]T_iu_i+\overline{F}_i=u_{i-1}'', \tag*{(4.7)$_i$}$$

和

$$g(u_0(a),u_0'(a),0)=0, \tag{4.8}$$

$$g_x[a]u_i(a)+g_y[a]u_i'(a)+\overline{G}_i=0,\ i=1,2,\cdots. \tag*{(4.9)$_i$}$$

由于(4.6)，(4.8)是退化问题(4.1)，(4.2)，从假设知，它存在一个解$u_0(t)=\bar{u}(t)$. 而初值问题(4.7)$_i$，(4.9)$_i$是线性问题，从假设(d)，利用迭代方法，通过Ascoli-Arzela引理可以证明它在$[a,b]$上存在光滑解$u_i(t)$.

以上得到的形式外部解未必满足(1.4)中b点的边界条件. 因此，需要构造$t=b$处的边界层校正项$v(\tau,\varepsilon)$，其中$\tau=(t-b)/\varepsilon$是伸长变量. 设想奇摄动问题(1.3)，(1.4)的形式解$\bar{x}(t,\varepsilon)$具有如下形式：

$$\bar{x}(t,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)+v(\tau,\varepsilon). \tag{4.10}$$

将(4.10)代入(1.3)和(1.4)中b点的边界条件，得到

$$\varepsilon^{-1}\frac{d^2v}{d\tau^2}=f(b+\varepsilon\tau,u+v,u'+v',T_\varepsilon(u+v),\varepsilon)-f(b+\varepsilon\tau,u,u',T_\varepsilon u,\varepsilon), \tag{4.11}$$

$$h(u(b,\varepsilon)+v(0,\varepsilon),u'(b,\varepsilon)+\varepsilon^{-1}\frac{dv}{d\tau}(0,\varepsilon),\varepsilon)=0. \tag{4.12}$$

设 $v(\tau,\varepsilon)$ 具有如下形式的展开式

$$v(\tau,\varepsilon)=\varepsilon v_0(\tau)+\varepsilon^2 v_1(\tau)+\cdots. \tag{4.13}$$

将(4.3),(4.13)代入(4.11),(4.12),并把 f,h 按 ε 的幂展开,得到

$$\begin{aligned}
&f(b+\varepsilon\tau,u+v,u'+v',T_\varepsilon(u+v),\varepsilon)-f(b+\varepsilon\tau,u,u',T_\varepsilon u,\varepsilon)\\
&\quad=f(b+\varepsilon\tau,u(b+\varepsilon\tau,\varepsilon)+v(\tau,\varepsilon),u'(b+\varepsilon\tau,\varepsilon)+\varepsilon^{-1}\frac{dv}{d\tau}(\tau,\varepsilon),\varphi(b+\varepsilon\tau,\varepsilon)\\
&\qquad+\int_a^{b+\varepsilon\tau}K(b+\varepsilon\tau,s)u(s,\varepsilon)ds+\varepsilon\int_{\frac{a-b}{\varepsilon}}^{\tau}K(b+\varepsilon\tau,b+\varepsilon s)v(s,\varepsilon)ds,\mu)\\
&\qquad-f(b+\varepsilon\tau,u(b+\varepsilon\tau,\varepsilon),u'(b+\varepsilon\tau,\varepsilon),[T_\varepsilon u](b+\varepsilon\tau),\varepsilon)\\
&\quad=f(b,u_0(b),u_0'(b)+\frac{dv_0}{d\tau},[T_0u_0](b),0)-f(b,u_0(b),u_0'(b),[T_0u_0](b),0)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{\infty}(f_y(b,u_0(b),u_0'(b)+\frac{dv_0}{d\tau},[T_0u_0](b),0)\frac{dv_i}{d\tau}+\bar{f}_i(\tau)),\\
&h(u(b,\varepsilon)+v(0,\varepsilon),u'(b,\varepsilon)+\varepsilon^{-1}\frac{dv}{d\tau}(0,\varepsilon),\varepsilon)\\
&\quad=h(u_0(b),u_0'(b)+\frac{dv_0}{d\tau}(0),0)+\sum_{i=1}^{\infty}(h_y(u_0(b),u_0'(b)+\frac{dv_0}{d\tau}(0),0)\frac{dv_i}{d\tau}(0)+\bar{h}_i(b)),
\end{aligned}$$

其中 $\bar{f}_i(\tau)$ 是以 $u_j(t)$ 为系数关于 $v_j(\tau)(j=0,1,\cdots,i-1)$ 及其导数的多项式函数,$\bar{h}_i(b)$ 是 $u_j(b)$ $(j=0,1,\cdots,i)$ 和 $v_j(0)(j=0,1,\cdots,i-1)$ 及其导数的函数.

利用上述展开式,并比较(4.11),(4.12)两边 ε 同次幂的系数,得到 $v_j(\tau)(j=0,1,\cdots,)$ 所满足的初值问题:

$$\frac{d^2v_0}{d\tau^2}=f(b,u_0(b),u_0'(b)+\frac{dv_0}{d\tau},[T_0u_0](b),0)-f(b,u_0,u_0',[T_0u_0](b),0), \tag{4.14}$$

$$h(u_0(b),u_0'(b)+\frac{dv_0(0)}{d\tau},0)=0, \tag{4.15}$$

$$\frac{d^2v_i}{d\tau^2}=f_y(b,u_0(b),u_0'(b)+\frac{dv_0}{d\tau},[T_0u_0](b),0)\frac{dv_i}{d\tau}+\bar{f}_i(\tau), \tag{4.16}$$

$$h_y(u_0(b),u_0'(b)+\frac{dv_0(0)}{d\tau},0)\frac{dv_i}{d\tau}(0)+\bar{h}_i(b)=0. \tag{4.17}$$

从初值问题(4.14),(4.15),由关于 h 的假设(d),利用隐函数存在定理和逐次逼近法[11],可求得(4.14),(4.15)的具有边界层型解 $v_0(\tau)$,且 $v_0(\tau)=O(e^{k\tau})$, $-\tau>>1$. 类似地,可求出线性问题(4.16),(4.17)的边界层型解 $v_i(\tau)$,且 $v_i(\tau)=O(e^{k(1-\sigma)\tau})$,$-\tau>>1$,$\sigma(<1)$ 是任意正常数.

最后,我们证明边值问题(1.3),(1.4)的解的存在性和形式解的一致有效性.

定理 4 在假设(a)-(d)下,若

(e) 存在正常数 l,p 和 q,使得在 D 上成立:

$$|f_x(t,x,y,z,\varepsilon)|\leqslant l,\ |f_z(t,x,y,z,\varepsilon)|\leqslant p,\ |K(t,s)|\leqslant q,\ (t,s)\in[a,b]^2,$$

其中 $D=\{(t,x,y,z,\varepsilon):a\leqslant t\leqslant b,|x-Z_N|\leqslant c\varepsilon^{N+1},|y|<\infty,|z-T_\varepsilon Z_N|\leqslant d\varepsilon^{N+1},0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,c$ 和 d 是某

正常数}，$Z_N(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i(u_i(t)+\varepsilon v_i(\tau))$.

(f) f 关于 x' 满足假设 $H_0([a,b])$.

则边值问题(1.3)，(1.4)在$[a,b]$上存在一个 C^2 类的解 $x(t,\varepsilon)$，且

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i(u_i(t)+\varepsilon v_i(\tau))+O(\varepsilon^{N+1}). \tag{4.18}$$

证明 为了利用定理 3 的结果，首先构造函数偶$(\alpha(t,\varepsilon),\beta(t,\varepsilon))$. 令

$$\alpha(t,\varepsilon)=Z_N(t,\varepsilon)-\gamma\varepsilon^{N+1}e^{\lambda t},\quad \beta(t,\varepsilon)=Z_N(t,\varepsilon)+\gamma\varepsilon^{N+1}e^{\lambda t},$$

其中 γ 是待定常数，λ 是特征方程 $\varepsilon\lambda^3-k\lambda^2+l\lambda+pq=0$ 当 $\varepsilon>0$ 充分小时介于$\frac{l}{k}$与$\frac{l+k+pq}{k}$之间的一个正根. 设

$$g_x(Z_N(a,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),Z'_N(a,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),\varepsilon)\leqslant -m,$$

$$0\leqslant g_y(Z_N(a,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),Z'_N(a,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),\varepsilon)\leqslant m\lambda^{-1}-\theta_1,$$

$$h_y(Z_N(b,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),Z'_N(b,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),\varepsilon)\geqslant n,$$

$$h_x(Z_N(b,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),Z'_N(b,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}),\varepsilon)\geqslant -\lambda n+\theta_2,$$

其中 m,n 是给定正常数，θ_1,θ_2 是使得 $m\lambda^{-1}-\theta_1>0$ 和 $-\lambda n+\theta_2>0$ 的任意正常数. 由假设及形式解的构造知，当 $\varepsilon>0$ 充分小和 γ 充分大时，恒有

$$\begin{aligned}g(\alpha(a,\varepsilon),\alpha'(a,\varepsilon),\varepsilon)&=g(Z_N(a,\varepsilon),Z'_N(a,\varepsilon),\varepsilon)+g_x[t_1](-\gamma\varepsilon^{N+1}e^{\lambda a})+g_y[t_2](-\gamma\varepsilon^{N+1}e^{\lambda a})\\&\geqslant O(\varepsilon^{N+1})+m\gamma\varepsilon^{N+1}e^{\lambda a}+(m\lambda^{-1}-\theta_1)(-\gamma\lambda\varepsilon^{N+1}e^{\lambda a})\\&=O(\varepsilon^{N+1})+\theta_1\gamma\lambda\varepsilon^{N+1}e^{\lambda a}>0,\end{aligned}$$

其中$[t_i](i=1,2)$是介于$(Z_N(a,\varepsilon),Z'_N(a,\varepsilon),\varepsilon)$和$(\alpha(a,\varepsilon),\alpha'(a,\varepsilon),\varepsilon)$之间的内点. 类似地可以证明下列不等式成立：

$$\alpha(t,\varepsilon)\leqslant\beta(t,\varepsilon),t\in[a,b],\alpha(t,\varepsilon),\beta(t,\varepsilon)\in C^2[a,b],$$

$$\alpha(a,\varepsilon)<\beta(a,\varepsilon),\alpha(b,\varepsilon)<\beta(b,\varepsilon),g(\beta(a,\varepsilon),\beta'(a,\varepsilon),\varepsilon)\leqslant 0,$$

$$h(\alpha(b,\varepsilon),\alpha'(b,\varepsilon),\varepsilon)\leqslant 0,\ h(\beta(b,\varepsilon),\beta'(b,\varepsilon),\varepsilon)\geqslant 0.$$

以下证明 α 是方程(1.3)的下解. 直接计算得

$$\begin{aligned}\varepsilon\alpha''-f(t,\alpha,\alpha',T_\varepsilon\alpha,\varepsilon)&=\varepsilon Z''_N-\gamma\lambda^2\varepsilon^{N+2}e^{\lambda t}-f(t,Z_N,Z'_N,T_\varepsilon Z_N,\varepsilon)\\&\quad-f_x[t_1](\alpha-Z_N)-f_y[t_2](\alpha'-Z'_N)-f_z[t_3](T_\varepsilon\alpha-T_\varepsilon Z_N),\end{aligned}\tag{4.19}$$

其中$[t_i](i=1,2,3)$是介于$(t,Z_N,Z'_N,T_\varepsilon Z_N,\varepsilon)$与$(\alpha,\alpha',T_\varepsilon\alpha,\varepsilon)$之间的内点. 从形式解的构造易证，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，存在正常数 $\delta>0$，使得

$$|\varepsilon Z''_N-f(t,Z_N,Z'_N,T_\varepsilon Z_N,\varepsilon)|\leqslant\delta\varepsilon^{N+1}.$$

因此，由假设知，(4.19)式不小于

$$\begin{aligned}&-\delta\varepsilon^{N+1}-\gamma\lambda^2\varepsilon^{N+2}e^{\lambda t}-l\gamma\varepsilon^{N+1}e^{\lambda t}+k\lambda\gamma\varepsilon^{N+1}e^{\lambda t}+pq[-\gamma\lambda^{-1}\varepsilon^{N+1}(e^{\lambda t}-e^{\lambda a})]\\&=-\delta\varepsilon^{N+1}+pq\gamma\lambda^{-1}\varepsilon^{N+1}e^{\lambda a}-(\varepsilon\lambda^3-k\lambda^2+l\lambda+pq)\gamma\lambda^{-1}\varepsilon^{N+1}e^{\lambda t},\end{aligned}$$

由于 λ 是三次特征方程的正根. 因此，当 γ 足够大时，恒有$\varepsilon\alpha''-f(t,\alpha,\alpha',T_\varepsilon\alpha,\varepsilon)\geqslant 0$.

同理可证

$$\varepsilon\beta''-f(t,\beta,\beta',T_\varepsilon\beta,\varepsilon)\leqslant 0.$$

综上所述，当 ε 充分小，γ 足够大时，α,β 满足定理 3 的一切要求. 因此，边值问题(1.3)，

(1.4)在$[a,b]$上存在一个C^2类解$x(t,\varepsilon)$，且满足(4.18)式. 定理4证毕.

参考文献

[1] K. W. Chang and F. A. Howes, *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Tokyo, 1984.

[2] F. A. Howes, *Shock layer in perturbed systems related to steady conservation laws*, SIAM J. Math. Anal., 18 (1987), 1, 127—136.

[3] W. G. Kelley, *Existence and uniqueness of solutions for vector problems containing small parameters*, J. Math. Anal. Appl., 131(1988), 295—312.

[4] F. A. Howes, *Some models of shock-boundary layer interactions*, J. Math. Anal. Appl., 138(1989), 199—208.

[5] J. S. Angell and W. E. Olmstead, *Singular perturbation analysis of an integrodifferential equation modelling filament stretching*, Z. Angew. Math. Phys., 36(1985), 487—490.

[6] J. S. Angell and W. E. Olmstead, *Singular by perturbed volterra integral equations*, SIAM J. Appl. Math., 49 (1987), 6, 1150—1162.

[7] C. G. Lange and D. R. Smith, *Singular perturbation analysis of integral equations*, Stud. in Appl. Math., 79 (1988), 1—63.

[8] W. E. Olmstead and A. K. Gautesen, *Asymptotic solution of some singular perturbed Fredholm integral equations*, J. Appl. Math. Phys., 40(1989), 230—244.

[9] J. B. Conway, *A Course in Function Analysis*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1984.

[10] W. G. Kelley, *Some existence theorems for nth-order boundary value problems*, J. Diff. Equs., 18(1975), 158—169.

[11] R. E. O'Malley, Jr., *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York, 1974.

[12] P. Hartman, *Ordinary Differential Equation (second edition)*, Birkhauser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

[13] 张祥，奇摄动 Volterra 型积分微分方程 Robin 问题，数学季刊，7(1992)，2，24—31.

Nonlinear Boundary Value Problems for Integro-differential Equations of Volterrs Type

Zhang Xiang

(Dept. of Math. Nanjing University 210093)

Abstract

In this paper we first discuss the existence of solutios of Dirichlet and nonlinear boundary value problems for a class of Volterra integro-differential equations by using upper and lower solutions, Then, by virtue of differential inequalities obtained, we consider a class of corresponding singularly perturbed nonlinear boundary value problem, and obtain the existence of uniformly valid asymptotic solution involving boundary layer.

Keywords integro-differential equation, boundary value problem, singular perturbation, upper and lower solutions, boundary layer.