第15卷第1期 1995年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 1 Feb. 1995

# 三角域上 Meyer-König-Zeller 算子*

熊静宜　　杨汝月
(宁夏大学，银川 750021)

**摘　要**　定义了一种三角域上 Meyer-K[AKo¨ D]nig-Zeller 算子，并研究其在 $C$ 度量下的逼近性质.

**关键词**　逼近阶，渐近等式，Meyer-König-Zeller 算子.
**分类号**　AMS(1991) 41A60/CCL O174.41

一元 Meyer-König-Zeller 算子由[1]引进：

$$L_n(f;x)=\begin{cases} f(1) & x=1 \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(x) f(\frac{k}{n+k}) & 0\leqslant x<1, \end{cases}$$

其中 $m_{n,k}(x)=\binom{n+k}{k}x^k(1-x)^{n+1}$，$f\in C_{[0,1]}$. 迄今为止，我们尚未见到非平凡的 Meyer-König-Zeller 算子的多元形式. 本文定义一种三角域上的 Meyer-König-Zeller 算子，并在 $C$ 度量下给出其逼近阶估计和 Voronovskaja 型渐近等式.

设 $\Delta=\{(x,y):0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$ 是 $R^2$ 中的一个三角域，$C(\Delta)$ 表示 $\Delta$ 上的连续函数全体，$C^i(\Delta)$ 表示 $\Delta$ 上具有 $i$ 次连续偏导数的函数全体. 对于 $f\in C(\Delta)$，定义其 Meyer-König-Zeller 算子为

$$M_n(f;x,y)=M_n(f(u,v);x,y)=\begin{cases} f(1,y) & x=1, \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{k} p_{n,k,l}(x,y) f(\frac{k}{n+k},\frac{l}{n+k}) & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $p_{n,k,l}(x,y)=\binom{n+k}{k}\binom{k}{l}(1-x)^{n+1}y^l(x-y)^{k-l}$.

引理1　对一切 $(x,y)\in\Delta$，成立下列各式

$$M_n(1;x,y)=1, \tag{1}$$

$$M_n(u-x;x,y)=0, \tag{2}$$

$$M_n(v-y;x,y)=0, \tag{3}$$

$$M_n((u-x)^2;x,y)=\frac{x(1-x)^2}{n}+O(n^{-2})\quad (n\geqslant 2), \tag{4}$$

$$M_n((u-x)^2;x,y)\leqslant 3\frac{x(1-x)^2}{n+1}\quad (n\geqslant 2), \tag{5}$$

* 1992年2月7日收到. 94年1月31日收到修改稿. 国家基金委数学天元基金资助项目.

$$M_n((v-y)^2;x,y)=\frac{y(1-x)(1-y)}{n}+O(n^{-2})\quad(n\geqslant 2),\tag{6}$$

$$M_n((v-y)^2;x,y)\leqslant 4\frac{y(1-x)(1-y)}{n}\quad(n\geqslant 2),\tag{7}$$

$$M_n((u-x)(v-y);x,y)=\frac{y(1-x)^2}{n}+O(n^{-2}).\tag{8}$$

**证明** 当 $x=1$ 时,引理 1 各式显然成立.对 $x\neq 1$ 的情形,(2),(4),(5)三式由[2]的结果得到,(1),(3),(8)三式容易证明,此处只证(6),(7)两式.首先,计算得

$$M_n(v^2;x,y)=y^2+y(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+1}m_{n-1,k}(x)$$
$$+\frac{y(x-y)(1-x)}{nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k+1}m_{n-1,k}(x),$$

再令

$$I(x,y)=M_n((v-y)^2;x,y)-\frac{y(x-y)(1-x)}{nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k+1}m_{n-1,k}(x)$$
$$=y(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+1}m_{n-1,k}(x),$$

因此

$$\frac{I(x,y)}{y(1-x)}-\frac{1-x}{n+1}=\frac{I(x,y)}{y(1-x)}-\frac{1}{n+1}L_{n-1}(1-t;x)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+1}m_{n-1,k}(x)-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n-1+k}\right)m_{n-1,k}(x)$$
$$=\frac{2(1-x)}{(n-1)(n+1)}\sum_{k=1}^{\infty}m_{n-2,k}(x)\frac{k}{n-2+k}\left(1-\frac{3}{n+k+1}\right)\quad(n\geqslant 2).$$

于是

$$I(x,y)=\frac{y(1-x)^2}{n+1}\left\{1+\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}m_{n-2,k}(x)\frac{k}{n-2+k}\left(1-\frac{3}{n+k+1}\right)\right\}\quad(n\geqslant 2),$$

从而

$$M_n((v-y)^2;x,y)=\frac{y(1-x)^2}{n+1}\left\{1+\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}m_{n-2,k}(x)\frac{k}{n-2+k}\left(1-\frac{3}{n+k+1}\right)\right\}$$
$$+\frac{y(x-y)(1-x)}{nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k+1}m_{n-1,k}(x)$$
$$\leqslant\frac{y(1-x)(1-y)}{n+1}\left(1+\frac{2x}{n-1}\right)+\frac{y(x-y)(1-x)}{n}$$
$$\leqslant\frac{4y(1-x)(1-y)}{n}\quad(n\geqslant 2).$$

同时有

$$M_n((v-y)^2;x,y)=y\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{l+1}{n+k+1}p_{n,k,l}(x,y)-y^2$$
$$=-y^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+2}m_{n,k}(x)+y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+1}m_{n,k}(x)$$

$$= -\frac{y^2(1-x)}{n}\sum_{k=0}^{\infty}m_{n-1,k}(x)(1-\frac{2}{n+k+2})+\frac{y(1-x)}{n}$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}m_{n-1,k}(x)(1-\frac{1}{n+k+1})=\frac{y(1-x)(1-y)}{n}+O(n^{-2}).$$

证毕.

**引理 2** 对任何$(x,y)\in\Delta$,下列两式成立

$$M_n((u-x)^4;x,y)=O(n^{-2}),\tag{9}$$

$$M_n((v-y)^4;x,y)=O(n^{-2}).\tag{10}$$

**证明** 只证(10)在$x\neq 1$的情形.计算易得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{l^4}{(n+k)^4}p_{n,k,l}(x,y)=y^4-6y^4\frac{1-x}{n}+6y^3\frac{1-x}{n}+O(n^{-2}),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{l^3}{(n+k)^3}p_{n,k,l}(x,y)=y^3-3y^3\frac{1-x}{n}+3y^2\frac{1-x}{n}+O(n^{-2}),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{l^2}{(n+k)^2}p_{n,k,l}(x,y)=y^2-y^2\frac{1-x}{n}+y\frac{1-x}{n}+O(n^{-2}).$$

由此即可推得(10)式.证毕.

**定理 1** 设$f\in C(\Delta)$,则当$n\geqslant 2$时,有$|M_n(f;x,y)-f(x,y)|\leqslant\frac{55}{27}\omega(f,\frac{1}{\sqrt{n}})$,其中$\omega(f,\delta)$为$f$的连续模:对$\forall\ X_1,X_2\in\Delta$,定义$\omega(f,\delta)=\sup\limits_{\|X_1-X_2\|\leqslant\delta}|f(X_1)-f(X_2)|$($\|\cdot\|$表欧氏距离).

**定理 2** 设$f\in C^1(\Delta)$,则当$n\geqslant 2$时,有$|M_n(f;x,y)-f(x,y)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}(\omega(f_1,\frac{1}{\sqrt{n}})+\omega(f_2,\frac{1}{\sqrt{n}}))$,其中$f_1(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$,$f_2(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

**定理 3** 设$f\in C^2(\Delta)$,则当$n\to\infty$时,成立$n(M_n(f;x,y)-f(x,y))=\frac{1}{2}x(1-x)^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{1}{2}y(1-x)(1-y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}+y(1-x)^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}+o(1)$.

本文结果向更高维情形的推广是平凡的.

## 参 考 文 献


[1] W. Meyer-König and K. Zeller, Studia Math., 19(1960), 89—94.

[2] M. Becker and R. J. Nessel, Math. Z., 160(1978), 195—206.