极大算子的加权BMO有界性*

谌稳固　　　　潘建勋
(北京师范大学数学系，100875)　(山东工业大学数学系，250014)

关键词　极大算子，BMO，A_p 权.
分类号　AMS(1991) 42B25/CCL O174.2

在[1]中，Muckenhoupt 和 Wheeden 引进了加权有界平均振动函数空间.

设 $f(x)$ 在 R^n 上局部可积，$w(x)\geqslant 0$ 为 R^n 上的权函数，称 f 是对于 w 的加权有界平均振动函数，如果存在常数 C 使得

$$\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leqslant C\int_Q w(x)dx \tag{1}$$

对所有的边平行于坐标轴的 n 维方体 Q 成立，其中 $f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy$. 记 $\mathrm{BMO}_w=\{f:f\in L^1_{\mathrm{loc}}(R^n)$ 且 f 满足(1)$\}$，满足(1)式的最小常数 C 称为 f 的 BMO_w 范数，记为 $\|f\|_{w,*}$.

加权有界平均振动函数的另一种定义是指 f 满足：

$$\int_Q |f(x)-f_{Q,w}|w(x)dx \leqslant C\int_Q w(x)dx, \tag{2}$$

其中 $f_{Q,w}=\frac{1}{\int_Q w(x)dx}\int_Q f(x)w(x)dx$. 记 $(\mathrm{BMO})_w=\{f:f\in L^1_{\mathrm{loc}}(R^n)$ 且 f 满足(2)$\}$，而其中最小常数 C 称为 f 的 $(\mathrm{BMO})_w$ 范数，记为 $\|f\|_{*,w}$.

本文的主要结果是：

定理1　设 $w\in A_1$(Muckenhoupt 权类)，对于 $f\in \mathrm{BMO}_w$，若 $\inf\limits_{x\in R^n} M(f)(x)<\infty$，则 $M(f)\in \mathrm{BMO}_w$ 且 $\|M(f)\|_{w,*}\leqslant C_n\|f\|_{w,*}$，其中 $M(f)$ 表示 f 的 Hardy－Littlewood 极大函数，C_n 是只依赖于维数 n 的绝对常数.

定理1的证明依赖于以下几个引理：

引理1　设 $w\in A_1$，$f\in \mathrm{BMO}_w$，则存在 p，$1<p<\infty$，使得对任意 $\alpha>0$，

$$\int_{R^n}\frac{|f(x)-f_Q|^p}{\delta^{n+\alpha}+|x-x_0|^{n+\alpha}}dx \leqslant \frac{A_n}{\delta^\alpha}\|f\|^p_{w,*}[w(Q)/|Q|]^p,$$

其中 Q 表示以 x_0 为中心，δ 为边长的方体.

引理2　设 $\varphi(x)=\chi_{Q_0}(x)$，$\varphi_t(x)=t^{-n}\varphi(\frac{x}{t})$，$Q_0$ 表示中心在原点的单位方体，设 Q 以 x_0 为中心，$\widetilde{Q}$ 表示 Q 的同心4倍扩张。如果 $w\in A_1$，$f\in \mathrm{BMO}_w$，则

* 1992年4月17日收到. 95年8月28日收到修改稿.

$$\sup_{t>0,x\in Q}\left|\int_{\tilde{Q}^c}(\varphi_t(x-y)-\varphi_t(x_0-y))(f(y)-f_{\tilde{Q}})dy\right|\leqslant C\|f\|_{w,*}\frac{W(Q)}{|Q|}.$$

引理 3 若 $M(f)$在一点有限，则其在 R^n 上几乎处处有限.

另外，本文还得到：

定理 2 设 $w\in A_\infty$，对于 $f\in(\mathrm{BMO})_w$，若 $\inf\limits_{x\in R^n}M(f)(x)<\infty$，则 $M(f)\in(\mathrm{BMO})_w$ 且 $\|M(f)\|_{*,w}\leqslant C_n\|f\|_{*,w}$.

注 引理 3 是本文第一作者和山东曲阜师范大学数学系李兴民在另一文证明的.

参 考 文 献

[1] B. Muckenhoupt and R. L. Wneeden, Studia Math., 54(1976), 221—237.