第16卷第1期
1996年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 16 No. 1
Feb. 1996

T-型与超可解*

李秀萍
(山西财经学院基础部，太原 030006)

关键词 T-型，超可解.
分类号 AMS(1991) 20D10/CCL O152.1

在[1]中我们引入了有限群的 T-型概念，讨论了具有特殊 T-型的有限群. 本文继续考察 T-型对群结构的影响，得到了 Sylow 子群皆循环的有限群的一个刻划及有限群超可解的一个充分条件.

定理1 设 G 为有限群，则 $T(G)$ 由不同的素数组成的充要条件是 G 的 Sylow 子群皆循环.

证明 *必要性.* 设 $T(G)=(p_1,\cdots,p_t)$，其中 p_i 为两两不同的素数. 记 $\pi_i=\{p_1,\cdots,p_{i-1}\}(2\leqslant i\leqslant t)$. 由 $T(G)$ 的构成知 G 超可解，故存在 $p_i\in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ 使得 $p_1\cdots p_{i-1}\lhd G(2\leqslant i\leqslant t)$，且 $p_1\cdots p_{i-1}\in \mathrm{Hall}_{\pi_i}(G)$. 所以 $O_{\pi_i}(G)=p_1\cdots p_{i-1}$. 又存在 $H\in \mathrm{Hall}_{p_1'}(G)$，从而 $G=p_1H$. 设 $M\geqslant H$ 为 G 的极大子群，则 $M=(p_1\cap M)H$，$p_1\cap M\lhd M$，且 $|p_1:p_1\cap M|=|G:M|=p_1$. 得 $p_1\cap M\lhd p_1$. 因而 $p_1\cap M\lhd G$，且 $p_1\cap M$ 为 M 的唯一的 sylowp_1-子群. 再设 S 为 G 的任意指数为 p_1 的极大子群，则存在 $x\in p_1$ 使 $H^x\leqslant S$，即 $H\leqslant S^{x^{-1}}$. 由前面的讨论知 $p_1\cap S^{x^{-1}}\lhd G$ 且 $S^{x^{-1}}=(p_1\cap S^{x^{-1}})H$. 又存在 $g\in G$ 使 $M=S^{x^{-1}g}=(p_1\cap S^{x^{-1}})H^g$，故 $(p_1\cap S^{x^{-1}})\in \mathrm{Syl}_{p_1}(M)$ 必有 $p_1\cap M=p_1\cap S^{x^{-1}}=(p_1\cap S)^{x^{-1}}$，所以 $p_1\cap S=p_1\cap M$. 令 $N=p_1\cap M$. 对 G 的任意指数非 p_1 的极大子群 T，有 $N\leqslant p_1\leqslant T$. 所以 $N\leqslant \varphi(G)$，$N\leqslant p_1\cap\varphi(G)\not\leqslant p_1$. 又 N 为 p_1 的极大子群，故 $N=p_1\cap\varphi(G)$. 于是 $p_1\varphi(G)/\varphi(G)\cong p_1/N$ 为 p_1 阶循环群. 又 $p_1\lhd G$，则 $p_1\cap\varphi(G)=\varphi(p_1)$[3]. 即得 $p_1/\varphi(p_1)$ 为 p_1 阶循环群，因而 p_1 循环.

用[1]中的定理2及数学归纳法可证 $T(G/O_{\pi_i}(G))=(p_i,\cdots,p_t)$. 由上述证明可得 $p_iO_{\pi_i}(G)/O_{\pi_i}(G)$ 循环. 从而 p_i 为循环群 $(2\leqslant i\leqslant t)$. 所以 G 的 Sylow 子群都循环.

充分性. 设 $p_1,\cdots,p_t$ 为 $|G|$ 的全部不同的素因子且 $p_1>\cdots>p_t$. 由 G 的 Sylow 子群皆循环知 G 超可解. 因而存在必要性证明过程中的 $p_1,\cdots,p_t$. 设 M_1,M_2 为 G 的任意两个指数为 p_1 的极大子群，则存在 $H\in \mathrm{Hall}_{p_1'}(G)$ 使 $M_1\geqslant H$，及 $x\in G$ 使 $M_2\geqslant H^x$. 由 p_1 循环知 $p_1/\varphi(p_1)$ 为 p_1 阶循环群，从而 $p_1/p_1\cap\varphi(G)$ 为 p_1 阶循环群. 故 $p_1\cap\varphi(G)$ 为 p_1 的极大子群. 又 $p_1\cap\varphi(G)\leqslant p_1\cap M_1\not\leqslant p_1$，因此 $p_1\cap\varphi(G)=p_1\cap M_1$. $M_1=(p_1\cap M_1)H=(p_1\cap\varphi(G))H$. 由 $H\leqslant M_2^{x^{-1}}$ 得 $M_2^{x^{-1}}=(p_1\cap\varphi(G))H$. 所以 $M_1=M_2^{x^{-1}}$，即 M_1 与 M_2 共轭. 再由 $T(G/O_{\pi_i}(G))=(p_i,\cdots,p_t)(2\leqslant i\leqslant$

* 1992年7月29日收到. 93年9月14日收到修改稿.

t). 知 $G/O_{\pi_i}(G)$的任意两个指数为 p_i 的极大子群都共轭，从而 G 的任意两个指数为 p_i 的极大子群也共轭，由此可知 $T(G)=(p_1,\cdots,p_t)$. 所以 $T(G)$由不同的素数构成.

使用 Hölder-Burnside-Zassenhaus 定理[2]即可获得 T-型由不同的素数构成的有限群的构造如下：

推论 设 G 为有限群，则 $T(G)$由不同的素数组成的充要条件是 $G=\langle a,b \mid a^m=1=b^n, b^{-1}ab=a^r, r^n\equiv 1(\mathrm{mod}\, m), m$ 为奇数且 m 与 $n(r-1)$互素$\rangle$.

定理 2 设 G 为有限群，若 $T(G)=(p_1^{a_1^{(1)}},\cdots,p_1^{a_{s_1}^{(1)}},p_2^{a_1^{(2)}},\cdots,p_2^{a_{s_2}^{(2)}},\cdots,p_t^{a_1^{(t)}},\cdots,p_t^{a_{s_t}^{(t)}})$，其中 $p_1,\cdots,p_t$ 为不同的素数且 $p_j^{a_i^{(j)}}\not\equiv 1(\mathrm{mod}\, p_l)$，$(1\leqslant j\leqslant t-1, 1\leqslant i\leqslant s_j, j<l\leqslant t)$. 则 G 为超可解群，$T(G)=(p_1,\cdots,p_1,\cdots,p_t,\cdots,p_t)$.

证明概要 由 G 的极大子群指数均为素数幂知 $G/O_\infty(G)\cong 1$ 或 $\mathrm{PSL}_2(T)$[4]，但只能是 $G/O_\infty(G)\cong 1$，故 G 为可解群. 又因为定理中的条件对商群遗传，假设 G 为极小反例，则 G 必为外超可解群且 $\varphi(G)=1$，G 有唯一的极小正规子群 N. 所以，存在 G 的超可解的极大子群 A 使得 $G=AN, A\cap N=1$[5]. 因此存在 j 使 $|N|=|G:A|=p_j^{a_i^{(j)}}$，$G$ 的极大子群可分成两类，一类其指数为素数，另一类其指数为$|N|$. 故有 $i=1$. 再取 A 的关于$|A|$的最大素因子 p 的 Sylow 子群，根据超可解群的性质及 Sylow 定理可得 $p=p_j$ 且 $j=1$. 即 p_1 为$|A|$的最大素因子. 最后由[1]中定理 2 及 Fit(G)的性质得到 $p_1\nmid |A|$，此矛盾即表明本定理成立.

参 考 文 献

[1] 李秀萍，有限群的 T-型与群结构，山西大学学报(自然科学版)，3(1989)：281—283.

[2] Derek J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Group*, Springer-Verlag New York Inc., 1982.

[3] J. Campbell, *The Frattini Subgroup*, Thesis, Australian National University, Canberra, 1967.

[4] Robert M. Guralnick, *Subgroup of prime power index in a simple group*, Journal of Algebra, 81 (1983)：304—311.

[5] 陈重穆，内-外-Σ 群与极小非 Σ 群，1985.